Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/45-179
Ссылка для цитирования этой статьи:
Гренкин Г.В.. Алгоритм восстановления тепловых источников в модели сложного теплообмена // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2024. №1

УДК 517.95 DOI:10.24412/2541-9269-2024-4-09-12

АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ В МОДЕЛИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Гренкин Г.В.[1]
[1]Владивостокский государственный университет, Россия, Владивосток, Gleb.Grenkin@vvsu.ru

ALGORITHM FOR RECONSTRUCTION OF HEAT SOURCES IN A COMPLEX HEAT TRANSFER MODEL

Grenkin G.V.[1]
[1]Vladivostok State University, Russia, Vladivostok, Gleb.Grenkin@vvsu.ru

Аннотация. Рассматривается задача восстановления интенсивностей источников тепла при заданных их объемных плотностях и известных значениях средней температуры источников. Для моделирования процесса распространения тепла используется стационарная диффузионная модель сложного теплообмена. Для случая двух источников показана сходимость численного метода.

Ключевые слова: радиационный теплообмен, обратная задача, интегральное переопределение.

Abstract. The problem of reconstructing the intensities of heat sources with given volume densities and known values of average temperature within the complex heat transfer model is considered. The convergence of the numerical method is shown for the case of two sources.

Keywords: radiative heat transfer, inverse problem, integral overdetermination.

Задача восстановления тепловых источников по известным значениям их средней температуры изучалась в работе [1]. Установлено, что обратная задача имеет по крайней мере одно решение, и получены условия единственности решения, которые выполняются при достаточно большом коэффициенте температуропроводности.

Целью настоящей работы является исследование вопроса численного решения данной задачи, принимая во внимание возможную неединственность ее решения. Будет предложен алгоритм, обеспечивающий монотонную сходимость. Для анализа алгоритма вводится отношение директивности тепловых источников по отношению друг к другу, означающее невозможность одного источника обеспечить перегрев другого.

 201*, №*
ISSN 2541-9269

Отметим, что для аналогичных обратных задач для нестационарных уравнений сложного теплообмена однозначная разрешимость доказана [2]. Сходные обратные задачи, относящиеся к модели переноса кислорода в тканях мозга, исследовались в работах [3, 4], и для нестационарных уравнений также доказана безусловная единственность решения [5]. Вопросы численного решения обсуждались в работах [6-8].

Пусть $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ – ограниченная область с границей Г, в которой происходит процесс радиационно-кондуктивного теплообмена, описываемый функциями: θ — установившееся поле температуры, φ — поле интенсивности излучения, усредненной по всем направлениям. Установившийся процесс описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a\left(|\theta|^3\theta - \varphi\right) = q_1 f_1 + q_2 f_2, \qquad (1)$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - |\theta|^3\theta\right) = 0 \qquad (2)$$

с краевыми условиями

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \ \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma\left(\varphi - \theta_b^4\right) = 0 \quad \text{на } \Gamma. \qquad (3)$$

Здесь θ, φ – нормированные величины, положительные постоянные a, b, α, κ_a характеризуют радиационно-термические свойства среды, функции β, γ характеризуют отражающие свойства границы, f_1, f_2 – объемные плотности тепловых источников.

Поскольку уравнение (1) содержит неизвестные коэффициенты q_1, q_2, то для замыкания системы вводят интегральное переопределение

$$\int_\Omega f_j(x)\theta(x)dx = r_j, \ j = 1, 2. \qquad (4)$$

В настоящей работе ограничимся рассмотрением случая пропорциональных граничных коэффициентов: $\dfrac{\beta}{a} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Определим оператор Q_θ, который по заданной функции g дает компоненту z решения линеаризованной системы

$$-a\Delta u + b\kappa_a\left(4|\theta|^3 u - z\right) = g, \quad -\alpha\Delta z + \kappa_a\left(z - 4|\theta|^3 u\right) = 0,$$

$$a\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0, \ \alpha\frac{\partial z}{\partial n} + \gamma z = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

Также введем оператор R, который по заданной функции g дает решение краевой задачи

$$-\Delta u = g,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\beta}{a}u = 0 \ \text{ на } \Gamma.$$

В [8] показано, что если при заданном векторе $\mathbf{q}$ и соответствующем ему поле $\theta = \theta(\mathbf{q})$ выполнено неравенство

ISSN 2541-9269

$$\left(f_1, Q_\theta f_1\right) > \left(f_1, Q_\theta f_2\right)\frac{\left(f_1, Rf_2\right)}{\left(f_2, Rf_2\right)}, \tag{5}$$

то при малом приращении вектора **q**, при котором увеличивается общая энергия $S_j(\mathbf{q}) = aF_j(\mathbf{q}) + b\alpha G_j(\mathbf{q})$ в обоих источниках, количество радиационной энергии $G_j(\mathbf{q})$ может уменьшиться только во втором источнике.

Здесь $F_j(\mathbf{q}) = \int_\Omega f_j(x)\theta(x)dx$, $G_j(\mathbf{q}) = \int_\Omega f_j(x)\varphi(x)dx$.

В случае, когда в точке **q** выполнено неравенство (5), будем говорить, что источник f_1 директивен по отношению к источнику f_2 при интенсивностях **q**.

Оператор Q_θ обладает свойством положительности. Отсюда вытекает, что отношение директивности антисимметрично.

Заметим, что уменьшение радиационной энергии $G_j(\mathbf{q})$ в j-м источнике при увеличении общей энергии $S_j(\mathbf{q})$ означает преувеличение тепловой энергии $F_j(\mathbf{q})$ по сравнению с линейной моделью теплопроводности.

Алгоритм решения обратной задачи (1)–(4) приводится в работах [6, 8]. Для гарантии монотонности предлагается применить тот же алгоритм покоординатно. Шаг алгоритма состоит в придании приращения значениям общей энергии по очереди каждого j-го источника в соответствии с формулой

$$s_j \leftarrow s_j + \left(r_j - F_j(\mathbf{q})\right).$$

Если источники взаимно директивны, то сходимость алгоритма очевидна. Если только один источник директивен по отношению к другому, то в случае перегрева этого другого источника (достижения условия $F_j(\mathbf{q}) > r_j$) можно применить такой же шаг алгоритма к этому j-му источнику. Тогда, в силу нарушения условия (4), изменение излучения окажется положительным, следовательно, $F_j(\mathbf{q})$ станет меньше r_j. Отсюда вытекает монотонность и ограниченность последовательности приближений.

Литература

1. Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. T. 460. № 2. C. 737-744.
2. Chebotarev A.Yu., Pinnau R. An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. T. 472. № 1. C. 314-327.
3. Kovtanyuk A., Chebotarev A., Turova V., Sidorenko I., Lampe R., An inverse problem for equations of cerebral oxygen transport // Appl. Math. Comput. 2021. T. 402. C. 126154.
4. Kovtanyuk A., Chebotarev A., Turova V., Sidorenko I., Lampe R., Inverse problem for a linearized model of oxygen transport in brain // 2020 Days on Diffraction (DD), 2020, C. 44-49.

5. Kovtanyuk A., Chebotarev A., Turova V., Sidorenko I., Lampe R. Non-stationary model of cerebral oxygen transport with unknown sources // Mathematics. 2021. T. 9. № 8. C. 910.
6. Гренкин Г.В. Единственность решения обратной задачи для модели сложного теплообмена // Сиб. электрон. матем. изв. 2024. Т. 21. № 1. С. 98-104.
7. Гренкин Г.В. Управление нагревом области в рамках модели сложного теплообмена // Информатика и системы управления. 2024. №1 (79). С. 121-125.
8. Гренкин Г.В. Численное решение обратной задачи восстановления тепловых источников // Территория новых возможностей. Вестник Владивостокского государственного университета. 2024. Т. 16. № 2. (В печати.)