

С.В. Сёмкин<sup>1</sup>

В.П. Смагин<sup>2</sup>

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса  
Владивосток. Россия

## Приближенные методы исследования фазовых состояний в модели Поттса разбавленного магнетика\*

Рассмотрена модель Поттса разбавленного магнетика с произвольным числом состояний, находящегося во внешнем поле. Целью работы является исследование критического поведения этой модели. Фазовые переходы в этой модели исследованы тремя приближенными методами. Первый метод является классическим методом среднего поля. С помощью этого классического метода среднего поля проанализировано критическое поведение разбавленного магнетика Поттса с произвольным числом состояний, находящегося в ненулевом внешнем поле.

Для разбавленного магнетика Поттса построена модификация метода среднего поля, совпадающая с классическим методом для чистого магнетика. Этот второй метод является комбинацией классического среднего поля и биномиального распределения по числу занятых соседних узлов. Установлено, что магнитная восприимчивость в нулевом внешнем поле вблизи критической температуры является немонотонной функцией концентрации и имеет максимум при некотором ее значении, зависящем от числа состояний модели Поттса и координационного числа решетки. Третий метод есть комбинация усреднения по локальным кристаллическим полям и биномиального распределения по числу занятых соседних узлов.

Каждым из этих методов получены следующие результаты. Построена зависимость критической температуры от внешнего поля и концентрации магнитных атомов. Найден скачок намагнитченности на кривой фазовых переходов первого рода. Получена магнитная восприимчивость во всем диапазоне концентраций. Приблизительно найдены пороги протекания для различных решеток. Приведено сопоставление полученных результатов с известными ранее. Установлено, что координаты конечной точки линии фазовых переходов являются монотонно возрастающими функциями концентрации магнитных атомов.

**Ключевые слова и словосочетания:** фазовые переходы, модель Поттса, разбавленный магнетик.

---

<sup>1</sup> Сёмкин Сергей Викторович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий и систем; e-mail: Li15@rambler.ru.

<sup>2</sup> Смагин Виктор Павлович – д-р физ.-мат. наук, зав. лаб. геофизических полей; e-mail: Li15@rambler.ru.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проекта №3.7009.2017/БЧ базовой части государственного задания вузам на выполнение работ в сфере научной деятельности.

S.V. Semkin  
V.P. Smagin

Vladivostok State University of Economics and Service  
Vladivostok, Russia

## Approximate methods for studying phase states in the Potts model of a dilute magnet

The Potts model of a dilute magnet with an arbitrary number of states in an external field is considered. The aim of this paper is to study the critical behavior of this model. Three approximate methods have been used to study phase transitions in this model. The first method is the classical method of the mean field. Using this classical method of the mean field, the critical behavior of the diluted Potts magnet with an arbitrary number of states in a nonzero external field is analyzed. For a dilute Potts magnet, a modification of the mean field method is constructed, which coincides with the classical method for a pure magnet. This second method is a combination of the classical mean field and the binomial distribution by the number of occupied neighboring sites. It is found that the magnetic susceptibility in a zero external field near a critical temperature is a nonmonotonic concentration function and has a maximum at some value depending on the number of states of the Potts model and the coordination number of the lattice. The third method is a combination of averaging over local crystal fields and binomial distribution over the number of occupied neighboring sites. Each of these methods obtained such results. The dependence of the critical temperature on the external field and the concentration of magnetic atoms is constructed. A jump in the magnetization on a curve of phase transitions of the first order is found. A magnetic susceptibility has been obtained in the entire range of concentrations. The percolation thresholds for various lattices are found approximately. Comparison of the results with the previously known results is given. It is obtained that the coordinates of the end point of the phase transition line are monotonically increasing functions of the concentration of magnetic atoms.

**Keywords:** phase transitions, Potts model, dilute magnet.

### Введение

Рассмотрим модель Поттса с немагнитными примесями на некоторой регулярной решетке с координационным числом  $q$ . Пусть каждый узел решетки занят магнитным атомом с вероятностью  $b$  или атомом немагнитной примеси с вероятностью  $1-b$  независимо от заполнения других узлов; иными словами, будем рассматривать магнетик с замороженными примесями. Каждому узлу, содержащему магнитный атом, поставим в соответствие величину  $\sigma_i$  («спин») которая может принимать  $s$  различных значений, скажем  $1, 2, \dots, s$  [1]. Два соседних спина  $\sigma_i$  и  $\sigma_j$  взаимодействуют с энергией  $-J_p \delta(\sigma_i, \sigma_j)$ , где

$$\delta(\sigma_i, \sigma_j) = \begin{cases} 1, & \sigma_i = \sigma_j \\ 0, & \sigma_i \neq \sigma_j \end{cases}$$

Пусть также есть внешнее поле  $H$ , которое действует на состояние 1. Тогда полная энергия системы равна

$$E = -J_p \sum_{(i,j)} \xi_i \xi_j \delta(\sigma_i, \sigma_j) - H \sum_i \xi_i \delta(\sigma_i, 1),$$

где  $\xi_i=1$  для узлов, занятых магнитными атомами, и  $\xi_i=0$  – для узлов, занятых атомами примеси.

В работах [2, 3] было установлено, что критическое поведение этой модели может зависеть от концентрации примесей, вплоть до того, что характер фазового перехода может измениться при определенной концентрации примесей. В работе [4] мы рассмотрели поведение модели Поттса разбавленного магнетика на решетке Бете в случае, когда немагнитные примеси распределены псевдохаотически. В настоящей работе мы предлагаем другой подход к исследованию критического поведения в модели Поттса разбавленного магнетика.

Рассмотрим некоторый узел решетки, занятый магнитным атомом. Пусть  $n_1, n_2 \dots n_s$  – количество атомов первой координационной сферы этого узла, находящихся в состоянии  $1, 2 \dots s$  соответственно. Все числа  $n_i$  являются случайными величинами, меняющимися от узла к узлу с совместной функцией распределения  $W(n_1, n_2 \dots n_s)$ .

Будем исходить из соотношения

$$\left\langle \frac{e^{Kn_j+h\delta(j,1)}}{\sum_i e^{Kn_i+h\delta(i,1)}} \right\rangle_W = p_j, \quad (1)$$

которое является обобщением формулы, приведенной в работе [5]. Здесь  $p_j$  – вероятность обнаружить магнитный атом в состоянии  $j$ ,  $K=J_p/kT$ ,  $h=H/kT$  ( $k$  – постоянная Больцмана). Определим намагниченность для модели Поттса следующим образом [2]:

$$M = \frac{sp_1-1}{s-1}.$$

Из этого определения и из условия нормировки  $p_1 + \sum_{i=2}^s p_i = 1$  получим:

$$M = p_1 - \frac{1}{s-1} \sum_{i=2}^s p_i,$$

что, согласно формуле (1), приводит к выражению

$$M = \left\langle \frac{e^{Kn_1+h} - \frac{1}{s-1} \sum_{i=2}^s e^{Kn_i}}{e^{Kn_1+h} + \sum_{i=2}^s e^{Kn_i}} \right\rangle_W. \quad (2)$$

Для дальнейшего анализа необходимо построить функцию  $W(n_1, n_2 \dots n_s)$ , по которой производится усреднение в правой части формулы (2). Здесь возможны различные приближения. Мы рассмотрим три таких приближения.

### Классический метод среднего поля

Самым простым способом использования формулы (2) является метод среднего поля. Он заключается в подстановке в правую часть (2) вместо  $n_i$  их средних значений  $\langle n_j \rangle_W = qbp_j$ , выраженных через намагниченность  $M$  по формулам:

$$p_1 = M + \frac{1-M}{s} \quad \text{и} \quad p = \frac{1-M}{s}.$$

Эта подстановка дает самосогласованное уравнение для  $M$ :

$$M = \frac{e^{yM+h} - 1}{e^{yM+h} - 1 + s}, \quad (3)$$

где  $y = qKb$ . Это уравнение определяет зависимость намагниченности  $M$  от температуры, концентрации и внешнего магнитного поля. Из формулы (3) видно, что зависимость намагниченности от температуры, концентрации и координационного числа решетки сводится к зависимости от  $y$ , что типично для приближения среднего

поля. Для неразбавленного ( $b = 1$ ) магнетика Поттса этот метод применялся как в отсутствии внешнего поля [6], так и (для  $s = 3$ ) в ненулевом внешнем поле [8]. Однако его непосредственное обобщение на случай разбавленного магнетика не приводит, как видно из формулы (3), к каким-либо нетривиальным результатам – концентрация  $b$  входит в (3) только через произведение  $qb$ . В статье мы предлагаем модификацию метода среднего поля, которая, как мы надеемся, дает более точное описание влияния немагнитного разбавления на критическое поведение модели Поттса. Но прежде чем ввести эту модификацию, рассмотрим, что дает классический метод среднего поля (3) применительно к разбавленному магнетик.

При  $h = 0$  у (3) всегда есть решение  $M = 0$ . Однако это решение является устойчивым только если производная по  $M$  от правой части (3) меньше 1 при  $M = 0$ . Вычислив эту производную, можно убедиться, что нулевое решение устойчиво при  $y \leq s$ , что приводит к следующей зависимости температуры фазового перехода  $T_0 = 1/K_0$  от концентрации  $b$ , числа состояний спина  $s$  и координационного числа  $q$ :

$$T_0 = \frac{qb}{s}. \quad (4)$$

Другими словами, температура фазового перехода при  $h = 0$  в рассматриваемом приближении просто пропорциональна концентрации магнитных атомов  $b$ .

При  $y > s$  ( $T < T_0$ ) спонтанная намагниченность определяется ненулевым решением (3) при  $h = 0$ . Это ненулевое решение при  $s = 2$  стремится к нулю при  $y \rightarrow s + 0$ , что означает отсутствие разрыва в критической точке  $y = s$ , то есть фазовый переход второго рода. Напомним, что при  $s = 2$  модель Поттса эквивалентна модели Изинга, у которой магнитный фазовый переход всегда второго рода. Если же  $s > 2$ , ненулевое решение (3) стремится при  $y \rightarrow s + 0$  к конечному значению  $M^*$ , определяемому из уравнения

$$M^* = \frac{e^{sM^*} - 1}{e^{sM^*} - 1 + s}, \quad (5)$$

то есть фазовый переход является переходом первого рода. В несколько ином варианте метода среднего поля, описанном в [6], получена аналогичная зависимость  $M_1^*(s) = \frac{s-2}{s-1}$ .

Восприимчивость  $\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_{H=0} = \frac{K}{J_p} \left. \frac{\partial M}{\partial h} \right|_{h=0}$  при  $y > s$  определяется из (3) и равна  $\chi = \frac{K}{J_p} \frac{1}{s-y}$ . Если  $y > s$ , выражение для восприимчивости имеет следующий вид:

$$\chi = \frac{K}{J_p} \left( \frac{s}{(1+(s-1)M)(1-M)} - y \right)^{-1}. \quad (6)$$

При  $s = 2$  это выражение при  $y \rightarrow 2 + 0$  приближенно равно  $\chi \approx \frac{1}{2} \frac{K}{J_p} \frac{1}{y-2}$ . Если же  $s > 2$ , восприимчивость (6) остается конечной при  $y \rightarrow s + 0$  и имеет в точке  $y = s$  максимальное значение, определяемое подстановкой в (6)  $M = M^*$ .

Как известно [7, 8], в модели Поттса при  $s > 2$  имеет место, в отличие от модели Изинга, не одна точка фазового перехода при  $h = 0$ , а линия фазовых переходов первого рода на плоскости  $(K, h)$ , которая начинается в точке  $(K_0, 0)$  и заканчива-

ется в точке  $(K_e, h_e)$ , в которой фазовый переход является переходом второго рода. Точки линии фазовых переходов находятся из условий

$$\begin{cases} F(M, h) = M \\ \frac{dF(M, h)}{dM} = 1 \end{cases}, \text{ где } F(M, h) = 1 - s / (e^{yM+h} - 1 + s).$$

Отсюда

$$e^h = \left(\frac{s}{1-M} - s + 1\right) e^{-yM}, \quad (7)$$

а намагниченность  $M$  определяется из уравнения

$$y(s-1)x^2 - ysx + s = 0, \quad (x = 1 - M). \quad (8)$$

Это уравнение имеет решение только для  $y \in \left[\frac{4(s-1)}{s}, s\right]$ . Верхняя граница этого отрезка соответствует температуре фазового перехода (4) при  $h = 0$ , а нижняя – температуре  $T_e = \frac{qbs}{4(s-1)}$ . Из (7) и (8)  $h_e = \ln(s-1) - 2(s-2)/s$ . В работе [8] найдена методом среднего поля конечная точка линии фазовых переходов первого рода для частного случая  $s = 3$  и  $q = 6$  (кубическая решетка) в модели Поттса без разбавления ( $b = 1$ ). Наш результат при подстановке этих значений в точности совпадает с приведенным в указанной работе. Уравнение линии фазовых переходов первого рода можно из (7) и (8) записать так:

$$\begin{aligned} h(y) &= \ln\left(\frac{s}{x_c(y)} - s + 1\right) - y(1 - x_c(y)), \\ x_c(y) &= \frac{ys + \sqrt{y^2s^2 - 4ys(s-1)}}{2y(s-1)}, \quad y = Kqb. \end{aligned}$$

Иначе говоря, влияние концентрации магнитных атомов  $b$  (как и координационного числа решетки  $q$ ) сводится в классическом приближении среднего поля просто к изменению масштаба по оси температур. В частности,  $h_e$  не зависит от  $b$ , а намагниченность в точке  $K_e$ ,  $h_e$  не зависит от  $b$  и  $q$  и равна

$$M_e = 1 - \frac{s}{2(s-1)}.$$

### Модифицированный метод среднего поля

Функцию  $W(n_1, n_2 \dots n_s)$ , по которой производится усреднение в правой части (2), можно представить в следующем виде:

$$W(n_1, n_2 \dots n_s) = \sum_{z=0}^q P(z) W_z(n_1, n_2 \dots n_s), \quad (9)$$

где  $P(z)$  – вероятность обнаружить  $z$  магнитных атомов в первой координационной сфере узла, занятого магнитным атомом. Для замороженных примесей очевидно

$$P(z) = C_q^z b^z (1-b)^{q-z}. \quad (10)$$

где  $C_q^z = \frac{q!}{z!(q-z)!}$  – биномиальные коэффициенты.

Приближенно построим  $W_z(n_1, n_2 \dots n_s)$  следующим образом. Обозначим  $\Omega_z$  совокупность таких магнитных атомов, которые являются соседними к магнитным атомам, имеющим ровно  $z$  магнитных соседей. Пусть  $p_j(z)$  – вероятность обнаружить в состоянии  $j$  атом из  $\Omega_z$ . Будем считать, что  $p_j(z) = p_j$ . Тогда средние значения  $n_j$ , вычисленные по функциям распределения  $W_z(n_1, n_2 \dots n_s)$ , равны  $zp_j$ . Зададим функции  $W_z(n_1, n_2 \dots n_s)$  следующим образом:

$$W_z(n_1, n_2 \dots n_s) = \prod_{i=1}^s \delta(n_i - zp_i); \quad (11)$$

то есть, для каждого конкретного значения  $z$  приравняем  $n_j$  их средним значениям. В этом и заключается наша модификация классического метода среднего поля. Для чистого ( $b = 1$ ) магнетика Поттса это соответствует обычному приближению среднего поля. В общем случае, получим самосогласованное уравнение для определения  $M$

$$M = \sum_{z=0}^q C_q^z b^z (1-b)^{q-z} \frac{e^{KzM+h}-1}{e^{KzM+h-1+s}}. \quad (12)$$

Температура фазового перехода при  $h = 0$  находится аналогично предыдущему случаю:

$$1 = \frac{K_0}{s} \sum_{z=0}^q z C_q^z b^z (1-b)^{q-z} = \frac{K_0 qb}{s}.$$

То есть температура фазового перехода определяется по формуле (4) как и в предыдущем случае. Аналогично уравнению (3) у уравнения (12) существует при  $T < T_0$  устойчивое ненулевое решение, которое и определяет спонтанную намагниченность. Если  $s = 2$  (модель Изинга), это решение обращается в ноль при  $T \rightarrow T_0 - 0$ , а при  $s > 2$   $M \rightarrow M^* > 0$ . Другими словами, фазовый переход при  $s = 2$  является переходом второго рода, а при  $s > 2$  – первого.

Однако между поведением решения (3) и решения (12) есть все же некоторое различие. Решение (3) зависит только от параметра  $y = qKb$ , а зависимость решения (12) от  $q$ ,  $K$  и  $b$  является более сложной. В частности, величина  $M^*$  зависит теперь не только от  $s$ , как в предыдущем случае, но и от  $q$  и  $b$  и определяется из уравнения:

$$M^* = \sum_{z=0}^q C_q^z b^z (1-b)^{q-z} \frac{\exp\left(\frac{z s M^*}{qb}\right) - 1}{\exp\left(\frac{z s M^*}{qb}\right) - 1 + s}, \quad (13)$$

которое совпадает с (5) только при  $b = 1$ .

Дифференцируя (12) по  $H$ , найдем магнитную восприимчивость. При  $T > T_c$  (в этом случае спонтанная намагниченность равна нулю) получим:

$$\chi = \frac{K}{J_p} \sum_{z=0}^q \frac{Kz\chi+1}{s} C_q^z b^z (1-b)^{q-z},$$

что сводится к  $\chi = \frac{K}{J_p} \frac{1}{s-y}$ , как и в предыдущем случае. При  $T > T_c$  получим следующее уравнение для восприимчивости:

$$\chi = \frac{K}{J_p} \frac{\langle \varphi(z) \rangle}{1 - K\chi \langle z\varphi(z) \rangle}, \quad (14)$$

где

$$\varphi(z) = \frac{e^{KzM}}{e^{KzM-1+s}} - \frac{(e^{KzM-1})e^{KzM}}{(e^{KzM-1+s})^2},$$

а треугольные скобки означают усреднение по биномиальному распределению (10).

При  $T < T_0$  восприимчивость  $\chi$  монотонно растет с ростом температуры, достигая конечного предельного значения при  $T = T_0 - 0$ . Величина этого предельного значения  $\chi^*$  показана как функция концентрации магнитных атомов на рис. 1. Видно, что  $\chi^*$  немонотонна и стремится к конечному пределу при  $b \rightarrow 0$ . В классическом

методе среднего поля, как это видно из формул (5) и (6), предельная восприимчивость  $\chi_c^*$  обратно пропорциональна  $b$ :  $\chi_c^*(b) = \frac{\chi_c^*(1)}{b}$  и расходится при  $b \rightarrow 0$ .

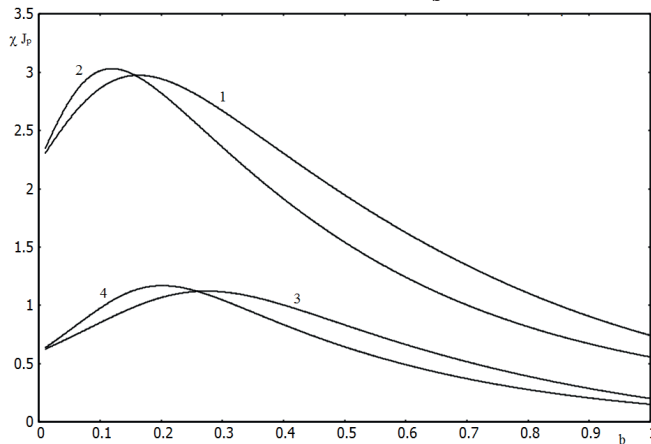


Рис. 1. Зависимость магнитной восприимчивости при  $T = T_c - \theta$  от концентрации магнитных атомов в модифицированном методе среднего поля: по горизонтальной оси – концентрация магнитных атомов  $b$ ; по вертикальной – восприимчивость. Кривая 1 –  $q = 3, s = 3$ , кривая 2 –  $q = 4, s = 3$ . Кривая 3 –  $q = 3, s = 4$ , кривая 4 –  $q = 4, s = 4$

Рассмотрим теперь нахождение линии фазовых переходов первого рода в рамках модифицированного метода среднего поля. Для определения точек этой линии необходимо найти совместное решение (12) и условия равенства единице производной по  $M$  от правой части (12). Результаты расчета показаны на рис. 2. При расчете классическим методом среднего поля не обнаруживается зависимости  $h_e$  от концентрации  $b$  (кривые 1, 3, 5 на рис. 2), в то время как при расчете модифицированным методом  $h_e$  убывает при уменьшении  $b$  (кривые 1, 2, 4).

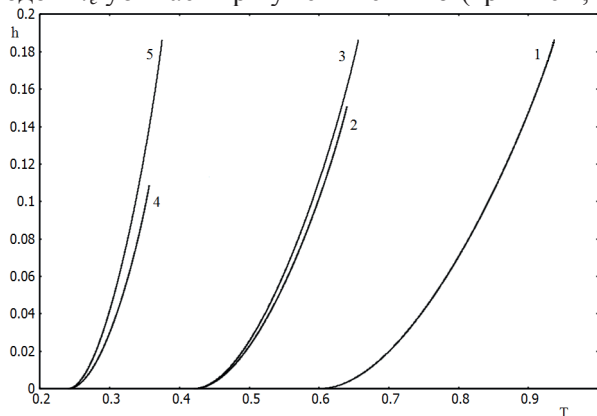


Рис. 2. Линии фазовых переходов первого рода, вычисленные в приближении среднего поля для модели Поттса с  $s = 5$  и  $q = 3$  при различных концентрациях магнитных атомов: по горизонтальной оси – температура; по вертикальной – внешнее поле. Кривые 1, 3, 5 – приближение классического среднего поля, кривые 1, 2, 4 – приближение модифицированного среднего поля. Концентрация магнитных атомов  $b$  равна 1 для кривой 1, 0,7 – для кривых 2 и 3 и 0,4 – для кривых 4 и 5

Величину скачка намагниченности на кривой фазовых первого рода иллюстрирует рис. 3. Верхние ветви кривых на этом рисунке соответствуют значениям намагниченности на кривой фазовых переходов при приближении «сверху» со стороны меньших значений температуры или больших значений внешнего поля, нижние, соответственно, «снизу». Величина скачка намагниченности при некотором  $h \in [0, h_e]$  равна разности этих значений. В приближении классического среднего поля эта величина не зависит от концентрации  $b$  и намагниченность на линии фазовых переходов описывается кривой 1 на рис. 3 для любого значения концентрации. В приближении модифицированного среднего поля величина скачка оказывается зависящей от  $b$  и с уменьшением  $b$  убывает (кривые 2 и 3).

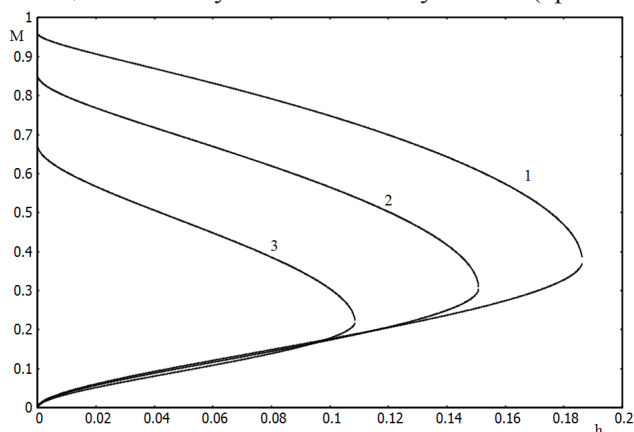


Рис. 3. Скачок намагниченности на линии фазовых переходов первого рода для модели Поттса с  $s = 5$  и  $q = 3$  в приближении среднего поля при различных концентрациях магнитных атомов: по горизонтальной оси – внешнее поле; по вертикальной – намагниченность. Кривая 1 –  $b = 1$ , кривая 2 –  $b = 0,7$  и кривая 3 –  $b = 0,4$

### Метод усреднения по локальным полям

Будем теперь строить функцию распределения  $W(n_1, n_2 \dots n_s)$ , считая, что каждый магнитный атом первой координационной сферы может находиться в состоянии  $j$  с вероятностью  $p_j$  независимо от других атомов. Это приводит к функции распределения следующего вида:

$$W(n_1, n_2 \dots n_s) = \sum_{z=0}^q C_q^z b^z (1-b)^{q-z} \sum_{\{n_i\}} C_z^{n_1, n_2, \dots, n_s} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}.$$

Здесь  $C_q^z = \frac{q!}{z!(q-z)!}$  – биномиальные коэффициенты, а  $C_z^{n_1, n_2, \dots, n_s} = \frac{z!}{n_1! n_2! \dots n_s!}$  – мультиномиальные коэффициенты.

Будем искать решение, в котором все  $p_j$  для  $i > 1$  одинаковы и равны  $p$ . Тогда, выражая  $p$  и  $p_1$  через намагниченность  $M$ , получим из (2) самосогласованное уравнение для определения  $M$ :

$$M = \sum_{z=0}^q C_q^z b^z (1-b)^{q-z} \sum_{n_1=0}^z C_z^{n_1} \left(M + \frac{1-M}{s}\right)^{n_1} \left(\frac{1-M}{s}\right)^{z-n_1} \Lambda_{z,s}^{n_1}(K, h), \quad (15)$$

$$\Lambda_{z,s}^{n_1}(K, h) = \sum_{\{n_i\}} C_{z-n_1}^{n_2, \dots, n_s} \frac{e^{Kn_1+h} \frac{1}{s-1} \sum_{i=2}^s e^{Kn_i}}{e^{Kn_1+h} + \sum_{i=2}^s e^{Kn_i}}.$$



При  $h = 0$  уравнение (15) всегда имеет решение  $M = 0$ , которое является устойчивым при  $K < K_c(b)$ , что означает отсутствие спонтанной намагниченности при высоких температурах. Уравнение для  $K_c(b)$  можно получить, приравняв к 1 производную по  $M$  правой части (15) при  $M = 0$ :

$$1 = \sum_{z=0}^q C_q^z b^z (1-b)^{q-z} \sum_{n_1=0}^z C_z^{n_1} \frac{n_1 s - z}{s^z} \Lambda_{z,s}^{n_1}(K_c(b), 0). \quad (16)$$

При  $K = K_c(b)$  происходит (при  $s > 2$ ) скачкообразное увеличение спонтанной намагниченности  $M$  (фазовый переход 1-го рода). При  $s = 2$ , что соответствует модели Изинга, фазовый переход является переходом 2-го рода.

При  $q = 3$  из основного уравнения (15) получим уравнение для намагниченности для шестиугольной решетки. Это уравнение имеет достаточно громоздкий вид, но существенно упрощается в пределе  $K \rightarrow \infty$  (то есть, при нулевой температуре). Полагая внешнее поле равным нулю, получим:

$$M_0 = M_0 \left( -\frac{s-1}{s} M_0^2 + \frac{s-2}{s} M_0 + \frac{1}{s} \right) \left( \frac{b}{1-b} \right)^3. \quad (17)$$

Решение  $M_0 = 0$  является устойчивым решением этого уравнения только при  $b < b_c$ , где  $b_c$  определяется из условия  $s = \left( \frac{b_c}{1-b_c} \right)^3$ , то есть

$$b_c = \frac{\sqrt[3]{s}}{1 + \sqrt[3]{s}}. \quad (18)$$

Величина  $b_c$  по смыслу является порогом протекания для решетки с координационным числом 3. Конечно, порог протекания по своему определению не может зависеть от числа состояний спина  $s$ , однако в рамках рассматриваемого метода мы получаем именно такой результат. На рис. 4 приведены температуры фазового перехода  $T_c(b) = 1/K_c(b)$ , найденные из (16), в зависимости от концентрации магнитных атомов  $b$  (кривые 1, 2 и 3 построены для  $q = 3$  для числа состояний спина 2, 3 и 4 соответственно). Видно, что функция  $T_c(b)$  имеет бесконечную производную при  $b = b_c$  и является практически линейной при  $b$  близких к 1.

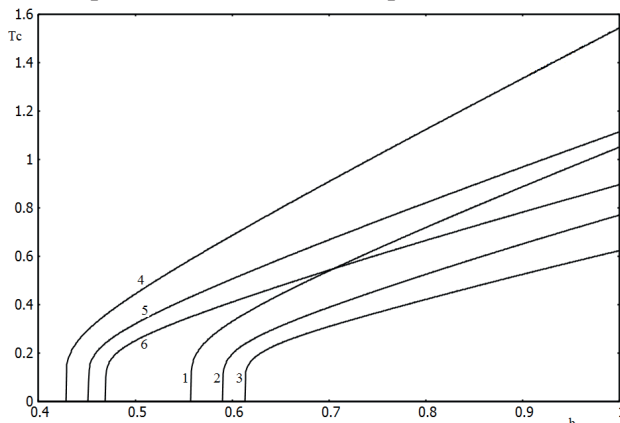


Рис. 4. Зависимость критической температуры от концентрации магнитных атомов. Кривые 1, 2 и 3 построены для координационного числа  $q = 3$ ; кривые 4, 5, 6 – для  $q = 4$ . Количество состояний спина  $s = 2$  для кривых 1 и 4,  $s = 3$  для кривых 2 и 5 и  $s = 4$  для кривых 3 и 6

При  $b > b_c$  спонтанная намагниченность, согласно (17), определяется выражением:

$$M_0 = \frac{s-2 + \sqrt{s^2 - 4(s-1)s\left(\frac{1-b}{b}\right)^3}}{2(s-1)} \quad (19)$$

При  $b = b_c$  величина  $M_0$  скачком возрастает от нуля до значения  $\Delta M_0 = \frac{s-2}{s-1}$ .

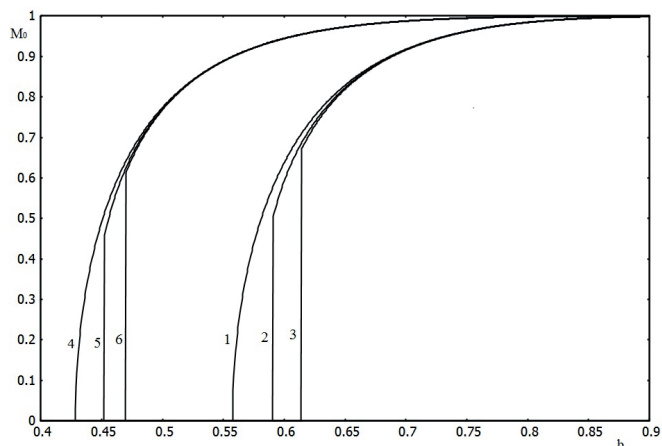


Рис. 5. Зависимость спонтанной намагниченности от концентрации магнитных атомов при нулевой температуре. Кривые 1, 2 и 3 построены для координационного числа  $q = 3$ ; кривые 4, 5, 6 – для  $q = 4$ . Количество состояний спина  $s = 2$  для кривых 1 и 4,  $s = 3$  для кривых 2 и 5 и  $s = 4$  для кривых 3 и 6

На рисунке 5 показаны графики функций  $M_0(b)$  для значений  $s$ , равных 2, 3 и 4 (кривые 1, 2 и 3 соответственно). Видно, что кривые фактически совпадают при больших значениях концентрации  $b$ , но заметно различаются вблизи перколяционных порогов.

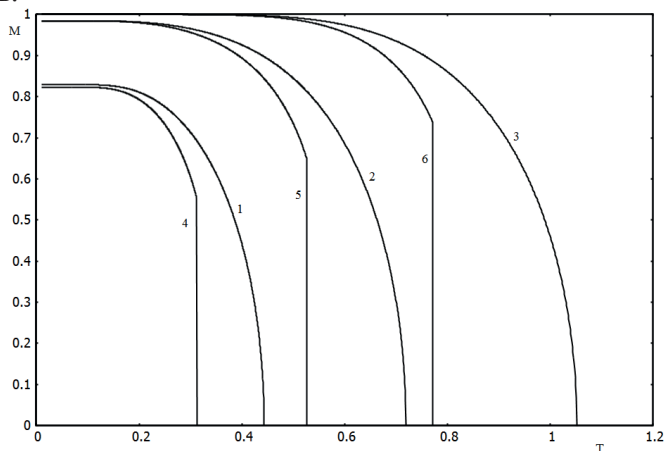


Рис. 6. Зависимость спонтанной намагниченности от температуры для разбавленного магнетика с координационным числом решетки  $q = 3$ . Кривые 1, 2 и 3 построены для  $s = 2$  (модель Изинга) при концентрациях магнитных атомов 0,65, 0,8 и 1,0 соответственно. Кривые 4, 5 и 6 – для  $s = 3$  при тех же значениях концентрации

На рисунке 6 показана температурная зависимость спонтанной намагниченности при различных концентрациях  $b$  и числах состояний спина  $s$ . Из рисунка видно, что при  $s = 2$  (модель Изинга) фазовый переход является переходом второго рода, а при  $s = 3$  – первого рода. Хотя мы не получили изменение характера фазового перехода при уменьшении концентрации магнитных атомов, как это было обнаружено в [2] и [3], но все же величина скачка намагниченности в критической точке уменьшается с уменьшением  $b$ .

Для  $q = 4$  из (15) получим при  $K \rightarrow \infty$  уравнение для спонтанной намагниченности при нулевой температуре:

$$(1-b)^4 = 4b^3(1-b) \left( -\frac{s-1}{s} M_0^2 + \frac{s-2}{s} M_0 + \frac{1}{s} \right) + b^4 \left( \frac{2(s-2)(s-1)}{s^2} M_0^3 - \frac{5s^2-15s+12}{s^2} M_0^2 + \frac{3(s-2)^2}{s^2} M_0 + \frac{3s-4}{s^2} \right). \quad (20)$$

Это уравнение имеет решение для  $b > b_c$ , которое, в свою очередь, определяется из уравнения:

$$(1-b_c)^4 = 4b_c^3(1-b_c) \frac{1}{s} + \frac{3s-4}{s^2} b_c^4. \quad (21)$$

Как и в случае  $q = 3$ , перколяционный порог  $b_c$  оказывается зависящим от  $s$ . Для  $s = 2$  уравнение (20) сводится к явной зависимости

$$M_0(b) = \sqrt{1 - \frac{2(1-b)^4}{4b^3(1-b)+b^4}}. \quad (22)$$

График этой функции, а также решение (20) при  $s = 3$  и 4 показаны на рис. 5 (кривые 4, 5 и 6 соответственно). Видно, что величина скачка при  $b = b_c$  растет с ростом  $s$ . Зависимости температуры фазового перехода от концентрации и спонтанной намагниченности от температуры и концентрации при  $q = 4$  аналогичны соответствующим зависимостям для  $q = 3$  (рис. 1, 3).

### Выводы

С помощью классического метода среднего поля мы проанализировали критическое поведение разбавленного магнетика Поттса с произвольным числом состояний, находящегося в ненулевом внешнем поле. Результаты этого анализа можно рассматривать как обобщение результатов, полученных ранее в работах [2, 5].

Для разбавленного магнетика Поттса мы построили модификацию метода среднего поля, совпадающую с классическим методом при  $b = 1$ . С помощью этого метода мы проанализировали влияние немагнитного разбавления на кривую фазовых переходов первого рода и получили следующие основные результаты:

1. Магнитная восприимчивость в нулевом внешнем поле при  $T = T_0 - 0$  является немонотонной функцией концентрации  $b$  и имеет максимум при некотором значении  $b$ , зависящем от  $s$  и  $q$  (рис. 1).

2. Координаты конечной точки линии фазовых переходов  $(T_c, h_c)$  являются функциями концентрации  $b$ , и обе эти функции убывают с уменьшением  $b$  (рис. 2).

3. Скачок намагниченности на линии фазовых переходов зависит от  $b$ , и его величина убывает при всех значениях  $h \in [0, h_e(b)]$  (рис. 3).

1. Р. Бэкстер. Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир. 1985. 486 с.
2. Муртазаев А.К., Бабаев А.Б., Азнаурова Г.Я. Исследование влияния замороженных немагнитных примесей на фазовые переходы в трехмерной модели Поттса // Физика твердого тела. 2008. Т. 50, №4. С. 703–708.
3. C. Chatelain, B. Berche, W. Janke, P.-E. Berche, Nucl. Phys. B 719/3, 275 (2005).
4. С.В. Семкин, В.П. Смагин. Модель Поттса на решетке Бете с немагнитными примесями // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2015. Т. 148, №4 (10). С. 729–733.
5. H.B. Callen, Phys. Lett., 4, 161 (1963).
6. F.Y. Wu. Rev. Mod. Phys. 54, 235 (1982)
7. W. Janke, R. Villanova, Nucl. Phys. B 489, 679 (1997)
8. T.A. DeGrand, C. DeTar, Nucl. Phys. B 225, 590 (1983)

### Транслитерация

1. R. Bekster. Tochno reshaemye modeli v statisticheskoi mekhanike, M.: Mir, 1985, 486 p.
2. Murtazaev A.K., Babaev A.B., Aznaurova G.Ya. Issledovanie vliyaniya vmorozhennykh nemagnitnykh primesei na fazovy perekhody v trekhmernoii modeli Potts, *Fizika tverdogo tela*, 2008, vol. 50, No 4, pp. 703–708..
3. C. Chatelain, B. Berche, W. Janke, P.-E. Berche, Nucl. Phys. B 719/3, 275 (2005).
4. S.V. Semkin, V.P. Smagin. Model' Potts na reshetke Bete s nemagnitnymi primesyami, *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, 2015, vol. 148, No 4 (10), pp. 729–733.
5. H.B. Callen, Phys. Lett., 4, 161 (1963).
6. F.Y. Wu. Rev. Mod. Phys. 54, 235 (1982)
7. W. Janke, R. Villanova, Nucl. Phys. B 489, 679 (1997)
8. T.A. DeGrand, C. DeTar, Nucl. Phys. B 225, 590 (1983)

© С.В. Семкин, 2017

© В.П. Смагин, 2017

**Для цитирования:** Семкин С.В., Смагин В.П. Приближенные методы исследования фазовых состояний в модели Поттса разбавленного магнетика // Территория новых возможностей. Вестник Владивостокского государственного университета экономики и сервиса. 2017. Т. 9, № 2. С. 140–151.

For citation: Semkin S.V., Smagin V.P. Approximate methods for studying phase states in the Potts model of a dilute magnet, *The Territory of New Opportunities. The Herald of Vladivostok State University of Economics and Service*, 2017, Vol. 9, No 2, pp. 140–151.

Дата поступления: 16.03.2017.