УДК 681.513

Кривошеев В.П.*, Бессонов И.И.*, Ануфриев А.В.*

**Кривошеев В.П., профессор кафедры ИСПИ института ИИИБС ВГУЭС*

E-mail: vladimir.krivosheev@vvsu.ru

**Бессонов И.И., студент кафедры ИСПИ института ИИИБС ВГУЭС*

E-mail: iliyabessonov@gmail.com

**Ануфриев А.В., ассистент кафедры химический и ресурсосберегающих технологий ШЕН ДВФУ*

E-mail: tekerrr@list.ru

РЕШЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Ключевые слова: симплекс-метод, критерий оптимальности, многокритериальная оптимизация, оптимальный базис, относительная степень достижения оптимума, компромиссное решение.

Рассматривается задача определения компромиссного решения между частными критериями оптимальности для линейных систем. При определении оптимальных базисов частных критериев использован симплекс-метод. Компромиссное решение достигается максимизацией частного критерия, имеющего минимальное значение относительной степени достижения цели. Признаком окончания поиска является уменьшение относительной степени достижения цели одного из критериев до значения относительной степени достижения цели для максимизируемого критерия.

Решение оптимизационной задачи для систем в статическом режиме часто выполняется по единственному критерию оптимальности. Однако, на практике приходится принимать управленческие решения с учетом нескольких критериев одновременно. Такая ситуация возникает в тех случаях, когда трудно выделить наиболее существенный показатель эффективности функционирования системы а остальные требования на функционирование системы сформулировать в виде ограничений.

В условиях естественной противоречивости критериев оптимальности, когда, в общем случае, невозможно обеспечить оптимальное значение по всем критериям одновременно, возникает желание найти такое решение (такой план), для которого была бы в определенном смысле наилучшей совокупность этих значений по всем критериям вместе взятым. Такие решения (планы) называют оптимальными компромиссными.

Множество решений (планов), характеризующихся таким свойством, что на нем ни одно решение не может быть улучшено ни по одному из критериев без ущерба для других критериев, носит название множества Парето[1].

Наиболее предпочтительным при решении экономических задач является метод максимизации минимальной относительной степени достижения цели [2]. Сущность метода состоит в следующих поэтапных действиях.

1 этап. Все критерии приводятся к виду, позволяющему достигать наилучшего значения в одном направлении, например, в смысле максимума (или минимума).

Получают модель: $f(\mathbf{u}) = \{f_1(\mathbf{u}); f_2(\mathbf{u}); \ldots; f_s(\mathbf{u})\} \to \max\limits_{\mathbf{u}}$, при $g_i(\mathbf{u}) \le b_i, i = 1, \ldots, m.$

2 этап. Отыскивается максимум (минимум) каждого критерия в отдельности, а результаты решения сводятся в таблицу следующего вида:

Таблица 1 Значения оптимальных решений по каждому из критериев и значения критериев при этих решениях

Критерии	Оптимальные решения (планы)	Критерии			
		$f_1(\mathbf{u})$	$f_2(\mathbf{u})$	…	$f_s(\mathbf{u})$
1	2	3	4	5	6
$f_1(\mathbf{u})$	$\mathbf{u}_1^{opt}$	$f_1(\mathbf{u}_1^{opt})$	$f_2(\mathbf{u}_1^{opt})$	…	$f_s(\mathbf{u}_1^{opt})$
$f_2(\mathbf{u})$	$\mathbf{u}_2^{opt}$	$f_1(\mathbf{u}_2^{opt})$	$f_2(\mathbf{u}_2^{opt})$	…	$f_s(\mathbf{u}_2^{opt})$
…	…	…	…	…	…
$f_s(\mathbf{u})$	$\mathbf{u}_s^{opt}$	$f_1(\mathbf{u}_s^{opt})$	$f_2(\mathbf{u}_s^{opt})$	…	$f_s(\mathbf{u}_s^{opt})$
$F_j - \max\limits_{j=1,2,\ldots,s}$ по столбцу		F_1	F_2	…	F_s
$f_j - \min\limits_{j=1,2,\ldots,s}$ по столбцу		f_1	f_2	…	f_s
$\Delta_j = F_j - f_j$		Δ_1	Δ_2	…	Δ_s

3 этап. Определяется нормированная степень достижения цели по j-ому критерию $\phi_j(\mathbf{u}) = (f_j(\mathbf{u}) - f_j) / \Delta_j, j = 1,2,\ldots,s.$ При этом получают $0 \le \phi_j(\mathbf{u}) \le 1, \mathrm{j} = 1,2,\ldots,\mathrm{s}.$

4 этап. Формализуется принятая схема компромисса, как получение максимума наихудшей степени достижения оптимума по какому либо критерию при не меньших значениях степеней достижения цели остальными критериями.

В этом случае задачу максимизации минимальной степени достижимости оптимума можно записать в виде:

$$\min_j \phi_j(\mathbf{u}) \to \max_{\mathbf{u}},$$

$$g_i(\mathbf{u}) \le b_i, i = 1,2,\ldots,m,$$

$$\phi_j(\mathbf{u}) \ge \min_j \phi_j(\mathbf{u}), j = 1,2,\ldots,s.$$

В качестве примера рассмотрено решение задачи многокритериальной оптимизации, сформулированной в [3].

В план условного предприятия могут быть включены два изделия: одно изделие в количестве u_1, второе изделие в количестве u_2; при этом необходимо выпустить не менее 20 штук каждого изделия. Объем выпуска в стоимостном выражении должен быть не менее 240 тыс. рублей.

Рассматривается поиск рационального компромиссного плана. В качестве целей функционирования рассматриваемой системы выбраны следующие критерии: прибыль ($f_2(u_1,u_2) = 5u_1 + u_2 \to \max\limits_{u_1,u_2}$), стоимость объема выпуска продукции ($f_1(u_1,u_2) = 6u_1 + 3u_2 \to \max\limits_{u_1,u_2}$) и себестоимость ($f_3(u_1,u_2) = 3u_1 + 2u_2 \to \min\limits_{u_1,u_2}$).

Ограничения: по фонду времени на механообработку $g_1(u_1,u_2) = 10u_1 + 40u_2 \le 2600$ ед. времени, по фонду времени на сборку $g_2(u_1,u_2) = 30u_1 + 10u_2 \le 2300$ ед. времени, по объёму суммарного выпуска изделий $g_3(u_1,u_2) = 6u_1 + 3u_2 \le 240$ тыс. руб., по объёму выпуска изделий $u_1 \ge 20$ штук, $u_2 \ge 20$ штук.

Используя симплекс-метод, вычисляются оптимальные значения каждого из критериев и значения каждого из критериев при оптимальных решениях для остальных критериев согласно таблице 1. Результаты расчётов помещены в таблицу 2.

Таблица 2 Значения критериев оптимальности

Критерий оптимальности	Оптимальные решения	Значения критериев оптимальности		
		$f_1(u_1,u_2)$	$f_2(u_1,u_2)$	$f_3(u_1,u_2)$
1	2	3	4	5
$f_1(u_1,u_2)$	$u_1^{opt} = 60$ $u_2^{opt} = 50$	510	350	-160
$f_2(u_1,u_2)$	$u_1^{opt} = 70$ $u_2^{opt} = 20$	480	370	-110

1	2	3	4	5
$f_3(u_1,u_2)$	$u_1^{opt} = 30$ $u_2^{opt} = 20$	240	170	-70
F_j – max по столбцу		510	370	-70
f_j – min по столбцу		240	170	-160
$\Delta_j = F_j - f_j$		270	200	90

Степени достижения по каждому из критериев оптимальности имеют следующие выражения: по стоимости $\phi_1(u_1,u_2) = (6u_1 + 3u_2 - 240)/270$; по прибыли $\phi_2(u_1,u_2) = (5u_1 + u_2 - 170)/200$; по себестоимости $\phi_3(u_1,u_2) = (-u_1 - 2u_2 + 160)/90$.

Значения степени достижения цели для каждого из рассматриваемых критериев в точках, соответствующих оптимальному значению одного из критериев, приведены в таблице 3.

Таблица 3 Значения относительных степеней достижения цели

Критерий оптимальности	Оптимальные решения	Степени достижения		
		$\phi_1(u_1,u_2)$	$\phi_2(u_1,u_2)$	$\phi_3(u_1,u_2)$
1	2	3	4	5
$f_1(u_1,u_2)$	$u_1^{opt} = 60$ $u_2^{opt} = 50$	1	0,9	0
$f_2(u_1,u_2)$	$u_1^{opt} = 70$ $u_2^{opt} = 20$	0,88	1	0,56
$f_3(u_1,u_2)$	$u_1^{opt} = 30$ $u_2^{opt} = 20$	0	0	1

Задача максимизации минимальной степени достижения оптимума решалась из точки с координатами $u_1^{opt} =$ 60, $u_2^{opt} =$ 50, соответствующей минимальному значению степени достижения оптимума по критерию $f_3(u_1,u_2)$. В результате получено компромиссное решение: $u_1^{комп} = 50{,}0607$; $u_2^{комп} = 30{,}1211$.

При этом степени достижения цели равны: $\phi_1(u_1,u_2) = 0{,}558$; $\phi_2(u_1,u_2) = 0{,}552$; $\phi_3(u_1,u_2) = 0{,}552$.

Значения критериев оптимальности составили: $f_1(u_1, u_2) = 390{,}727$ тыс. руб.; $f_2(u_1, u_2) = 280{,}727$ тыс. руб.; $f_3(u_1, u_2) = 110$ тыс. руб.

Блок-схема решения многокритериальной задачи приведена на рисунке 1.

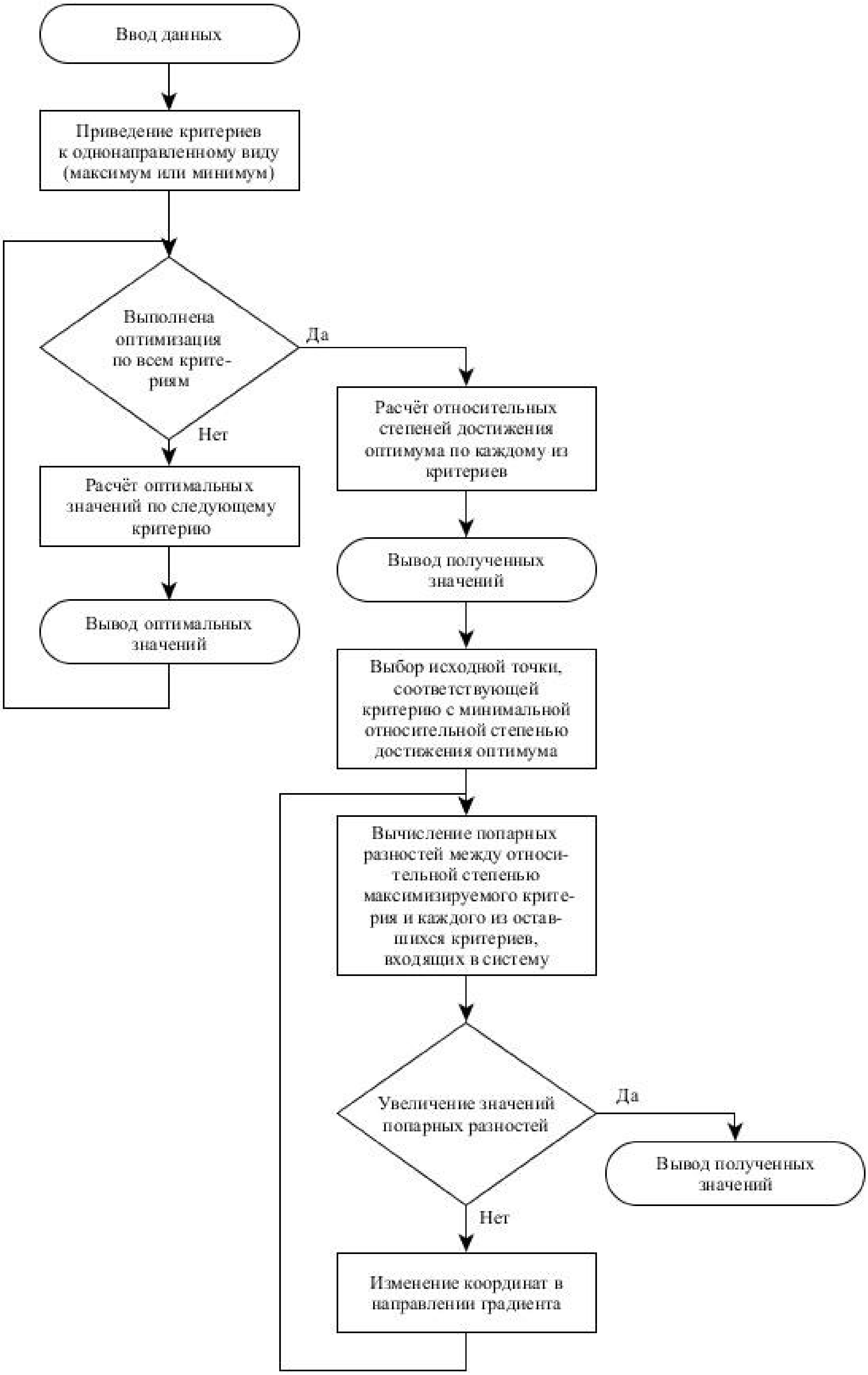

Рисунок 1 Блок-схема алгоритма поиска компромиссного решения

Алгоритм реализован в среде Qt 4.7.4 by Nokia Corporation, распространяемой под лицензией GNU Lesser General Public License (LGPL) v2.1.

Заключение. Разработано алгоритмическое и программное обеспечение многокритериальной оптимизации для поиска компромиссного решения в линейных системах.

Список источников и литературы

1. Машунин, Ю.К. Теоретические основы и методы векторной оптимизации в управлении экономическими системами / Ю.К. Машунин. – Владивосток: Изд-во ДВГАЭУ, 1999. – 256 с.
2. Шимко, П.Д. Оптимальное управление экономическими системами / П.Д. Шимко. – Санкт-Петербург: Изд-во Бизнес-пресса, 2004. – 240 с.
3. Кривошеев, В.П. Теория оптимального управления экономическими системами.

/ В.П. Кривошеев. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС. 2010. –140 с.