Симплекс-таблица 2

Базисные перем.	Своб. члены	Переменные													
		u_{n+1}	…	u_{n+j-1}	u_{n+j}	u_{n+j+1}	…	u_{n+m}	u_1	…	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	…	u_n
u_{n+1}	$\tilde{b}_1$	1	…	0	$\tilde{a}_{1\,i}$	0	…	0	$\tilde{a}_{11}$	…	$\tilde{a}_{1\,i-1}$	0	$\tilde{a}_{1\,i+1}$	…	$\tilde{a}_{1\,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
u_{n+j-1}	$\tilde{b}_{j-1}$	0	…	1	$\tilde{a}_{j-1\,i}$	0	…	0	$\tilde{a}_{j-1\,1}$	…	$\tilde{a}_{j-1\,i-1}$	0	$\tilde{a}_{j-1\,i+1}$	…	$\tilde{a}_{j-1\,n}$
u_i	$\tilde{b}_i$	0	…	0	$\tilde{a}_{j,i}$	0	…	0	$\tilde{a}_{j\,1}$	…	$\tilde{a}_{j\,i-1}$	1	$\tilde{a}_{j\,i+1}$	…	$\tilde{a}_{j\,n}$
u_{n+j+1}	$\tilde{b}_{j+1}$	0	…	0	$\tilde{a}_{j+1\,i}$	1	…	0	$\tilde{a}_{j+1\,1}$	…	$\tilde{a}_{j+1\,i-1}$	0	$\tilde{a}_{j+1,i+1}$	…	$\tilde{a}_{j+1\,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
u_{n+m}	$\tilde{b}_m$	0	…	0	$\tilde{a}_{m\,i}$	0	…	1	$\tilde{a}_{m\,1}$	…	$\tilde{a}_{m\,i-1}$	0	$\tilde{a}_{m\,i+1}$	…	$\tilde{a}_{m\,n}$
линейн. форма Q	$\tilde{C}_0$	0	…	0	$-\tilde{C}_{n+j}$	0	…	0	$-\tilde{C}_1$	…	$-\tilde{C}_{i-1}$	0	$-\tilde{C}_{i+1}$	…	$-\tilde{C}_n$

Координаты базиса $\mathbf{u}^2 =$

$$= (u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+j-1}, u_{n+j}, u_{n+j+1}, \ldots, u_{n+m}) =$$
$$= (0, \ldots, 0, \tilde{b}_i, 0, \ldots, 0, \tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_{j-1}, 0, \tilde{b}_{j+1}, \ldots, \tilde{b}_m).$$

Линейная форма в этом базисе $Q = \tilde{C}_0$.

Строки симплекс-таблицы 2 формируются следующим образом:

1. Выбираются варьируемая переменная, например u_i, и отыскивается разрешающий элемент a_{ji}.

2. Строка, содержащая разрешающий элемент a_{n+ji}, умножается на величину $1/a_{n+ji}$. Значения полученных при этом элементов записываются на месте соответствующих элементов старой строки.

3. К каждой из строк симплекс-таблицы 1 поочередно прибавляется полученная в пункте 2 строка, умноженная на такой коэффициент, при котором сумма элементов двух складываемых строк в столбце u_i обращается в нуль.

4. Анализируются элементы строки линейной формы. Если, за исключением $\tilde{C}_0$, все $\tilde{C}_k$ (k – для коэффициентов при n свободных переменных) удовлетворяют условию $\tilde{C}_k > 0$ в задаче максимизации линейной формы ($\tilde{C}_k < 0$ в задаче минимизации линейной формы), то найдено оптимальное решение. Если указанные условия не выполняются, то вычисления продолжаются относительно полученного базиса переходом к пункту 1.

Пример. Максимизация выпуска продукции при ограничениях на расходы сырья. Необходимо спланировать работу производства по выработке двух видов продукции $П_1$ и $П_2$ таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

При этом используются четыре вида сырья b_1, b_2, b_3, и b_4. Величина запасов b_1=19, b_2=13, b_3=15, b_4=18.

Потребность в количестве единиц сырья для производства единицы продукции каждого вида приведена в таблице.

Продукты / Сырье	$П_1$	$П_2$
b_1	2	3
b_2	2	1
b_3	0	3
b_4	3	0

От производства единицы продукции вида $П_1$ получают семь единиц прибыли, а от производства единицы продукции вида $П_2$ получают пять единиц прибыли.

Обозначим объем производства продукции вида $П_1$ и $П_2$ соответственно через u_1 и u_2.

Теперь запишем постановку задачи в математической форме

$$Q = 7u_1 + 5u_2 \to \max_{\mathbf{u} \in Q}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 2u_1 + 3u_2 &\le 19 \\ 2u_1 + u_2 &\le 13 \\ 3u_2 &\le 15 \\ 3u_1 &\le 18 \\ u_1 \ge 0, \quad u_2 &\ge 0 \end{aligned}.$$

Перепишем систему ограничений в канонической форме

$$\begin{aligned} 19 &= 2u_1 + 3u_2 + u_3 \\ 13 &= 2u_1 + u_2 + u_4 \\ 15 &= 3u_2 + u_5 \\ 18 &= 3u_1 + u_6 \\ & u_i \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,6 \end{aligned}.$$

Целевую функцию (линейную форму) перепишем в виде

$$0 = Q - 7u_1 - 5u_2 .$$

В качестве исходного базиса принимаем вершину многогранника ограничений при значениях $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$. Следовательно, свободными переменными в исходном базисе будут u_1, u_2, а остальные переменные u_3, u_4, u_5, u_6 будут базисными.

Симплекс-таблица 1

Базисные переменные	Свободные члены	Переменные					
		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
1	2	3	4	5	6	7	8
u_3	19	2	3	1	0	0	0
u_4	13	2	1	0	1	0	0

1	2	3	4	5	6	7	8
u_5	15	0	3	0	0	1	0
u_6	18	3	0	0	0	0	1
Линейная форма Q	0	-7	-5	0	0	0	0

Координаты первого базиса $\mathbf{u}_1 = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ соответственно равны $\mathbf{u}_1 = (0,0,19,13,15,18)$, линейная форма принимает значение $Q = 0$.

В качестве варьируемой переменной выбираем u_1. Разрешающий элемент $a_{61} = 3$. Согласно алгоритму формирования симплекс-таблиц получим для второго базиса:

Симплекс-таблица 2

Базисные переменные	Свободные члены	Переменные					
		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_3	7	0	3	1	0	0	-0.67
u_4	1	0	1	0	1	0	-0.670
u_5	15	0	3	0	0	1	0
u_1	6	1	0	0	0	0	0.33
Линейная форма Q	42	0	-5	0	0	0	2.3

Координаты второго базиса $\mathbf{u}_2 = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ соответственно равны $\mathbf{u}_2 = (6,0,7,1,15,0)$, линейная форма Q = 42.

Так как коэффициенты линейной формы при свободных переменных u_2, u_6 не удовлетворяют условиям максимума линейной формы, то расчет продолжается. Переходим к третьему базису, варьируя переменную u_2. Строим для третьего базиса таблицу с разрешающим элементом $a_{42} = 1$.

Симплекс-таблица 3

Базисные переменные	Свободные члены	Переменные					
		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_3	4	0	0	1	-3	0	1.3
u_2	1	0	1	0	1	0	-0.670
u_5	12	0	0	0	-3	1	2
u_1	6	1	0	0	0	0	0.23
Линейная форма Q	47	0	0	0	5	0	-1

Координаты третьего базиса $\mathbf{u}_3 = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ соответственно равны $\mathbf{u}_3 = (6,1,4,0,12,0)$, линейная форма Q = 47. Она получена из $47 = 0 + 5u_4 - u_6$.

Так как коэффициенты линейной формы при свободных переменных u_4, u_6 не удовлетворяют условиям максимума линейной формы, то расчет продолжается. Переходим к четвертому базису, варьируя переменную u_6. Строим для четвертого базиса таблицу с разрешающим элементом $a_{36} = 1.3$.

Симплекс-таблица 4

Базисные переменные	Свободные члены	Переменные					
		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_6	3	0	0	0.75	-2.3	0	1
u_2	3	0	1	0.5	-0.5	0	0
u_5	6	0	0	-1.5	1.5	1	0
u_1	5	1	0	-0.25	-0.75	0	0
Линейная форма Q	50	0	0	0.75	2.8	0	0

Координаты четвертого базиса $\mathbf{u}_4 = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ соответственно равны $\mathbf{u}_4 = (5,3,0,0,6,3)$, линейная форма Q = 50. Она получена из $50 = 0 + 0.75u_3 + 2.8u_4$.

Так как коэффициенты линейной формы при свободных переменных u_3, u_4 имеют положительные знаки, то данный базис является оптимальным. В результате расчета оптимального плана производства продукции двух видов получены объемы производств видов Π_1 и Π_2 соответственно $u_1 = 5$ и $u_2 = 3$. При этом оптимальная прибыль составит 50 единиц.

Контрольные вопросы

1. Какова математическая форма постановки задачи оптимизации в линейном программировании?
2. В чем состоит особенность задачи линейного программирования? Какова область применения линейного программирования?
3. Как называются вершины многогранника ограничений в линейном программировании?
4. Как определяется число степеней свободы (размерность задачи) в линейном программировании?
5. Какие переменные в выбранной вершине многогранника ограничений называются свободными, а какие базисными?
6. Какой вид имеет линия уровня в двумерной задаче линейного программирования?
7. В чем сущность симплекс-метода?
8. Каково содержание алгоритма решения задачи симплекс-методом?
9. Каков принцип формирования исходной таблицы при решении задачи с помощью таблиц?
10. Каково содержание алгоритма формирования новой таблицы при переходе от одного базиса к другому?
11. Что является признаком получения решения в симплекс-методе?

3.4.6. Многокритериальная оптимизация

Выше были рассмотрены методы оптимизации по одному критерию оптимальности. Однако на практике приходится принимать управленческое решение с учетом нескольких критериев одновременно. Такая ситуация возникает в тех случаях, когда трудно выделить наиболее существенный показатель эффективности функционирования системы, а остальные требования на функционирование системы сформулировать в виде ограничений. Затруднение вызывает также выбор весовых коэффициентов при отдельных показателях функционирования системы, если объединить эти показатели в единый критерий.

Трудность выбора решения в условиях многокритериальной оптимизации обусловлена противоречивостью критериев: например, стремление к максимизации объема выпуска продукции приводит к суммарному росту ее себестоимости, а максимизация показателя качества продукции приводит, как правило, к увеличению затрат при заданном объеме производства или к снижению объема производства при заданном уровне затрат, т.е. также приводит к повышению себестоимости получаемой продукции.

В условиях естественной противоречивости критериев оптимальности, когда в общем случае невозможно обеспечить оптимальные значения по всем критериям одновременно, возникает желание найти такое решение (такой план), для которого была бы в определенном смысле наилучшей совокупность этих значений по всем критериям вместе взятым. Такие решения (планы) называют оптимальными компромиссными.

Множество решений (планов), характеризующееся таким свойством, что на нем ни одно решение не может быть улучшено ни по одному из критериев без ущерба для других критериев, носит название множества Парето. На этом множестве каждый эффективный план по-своему исчерпывает возможность оптимизируемой экономической системы, реализуя определенный компромисс между частными критериями. Определение на этом множестве оптимального компромиссного решения (плана) требует обоснованного выбора той или иной схемы компромисса. На практике обычно пользуются некоторым набором схем выбора компромиссного решения, наиболее предпочтительной из которых считают схему (метод) максимизации минимальной относительной степени достижения цели. Сущность метода состоит в следующих поэтапных действиях.

1 этап. Все критерии приводятся к виду, позволяющему достигать наилучшего значения в одном направлении, например, в смысле максимума (или минимума).

Получают модель

$$f(\mathbf{u}) = \{f_1(\mathbf{u}), f_2(\mathbf{u}), \ldots, f_s(\mathbf{u})\} \to \max_{\mathbf{u}} \tag{3.145}$$

при

$$g_i(\mathbf{u}) \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.146}$$

2 этап. Отыскивается максимум (минимум) каждой целевой функции в отдельности, а результаты решения сводятся в таблицу следующего вида

Целевые функции	Оптимальные решения (планы)	Целевые функции			
		$f_1(\mathbf{u})$	$f_2(\mathbf{u})$	....	$f_s(\mathbf{u})$
1	2	3	4	5	6
$f_1(\mathbf{u})$	$\mathbf{u}_1^{opt}$	$f_1(\mathbf{u}_1^{opt})$	$f_2(\mathbf{u}_1^{opt})$	....	$f_s(\mathbf{u}_1^{opt})$

1	2	3	4	5	6
$f_2(\mathbf{u})$	$\mathbf{u}_2^{opt}$	$f_1(\mathbf{u}_2^{opt})$	$f_2(\mathbf{u}_2^{opt})$	….	$f_s(\mathbf{u}_2^{opt})$
……..	…….	…….	………..	….	………...
$f_s(\mathbf{u})$	$\mathbf{u}_s^{opt}$	$f_1(\mathbf{u}_s^{opt})$	$f_2(\mathbf{u}_s^{opt})$	….	$f_s(\mathbf{u}_s^{opt})$
$F_j = \max\limits_{j=1,2,...,s}$ по столбцу $f_j = \min\limits_{j=1,2,...,s}$ по столбцу $\Delta_j = F_j - f_j$		F_1 f_1 Δ_1	F_2 f_2 Δ_2	…. …. ….	F_s f_s Δ_s

3 этап. При решении однокритериальных задач оптимальное решение (план) отыскивается сразу как элемент a_{jj}, соответствующий j-й строке и j-му столбцу критерия $f_j(\mathbf{u})$. В случае многокритериальной оптимизации определяется степень достижения абсолютного оптимума. В абсолютном измерении степень достижения цели по j-му показателю может быть рассчитана по формуле ($f_j(\mathbf{u}) - f_j$), т.е. как величина удаления текущего значения j-го критерия оптимальности $f_j(\mathbf{u})$ от наименьшего его значения. Поскольку каждый из критериев оптимальности задается в своих единицах измерения и в своем масштабе, в общем случае отличных от единиц измерения и масштабов других критериев, то для сопоставления степеней достижения цели по каждому критерию при поиске компромиссного решения (плана) их необходимо нормировать.

Нормирование степеней достижения оптимума по j-му критерию осуществляют следующим образом:

$$\varphi_j(\mathbf{u}) = (f_j(\mathbf{u}) - f_j)/\Delta_j, \quad j = 1,2,...,s\,. \tag{3.147}$$

При этом получают

$$0 \le \varphi_j(\mathbf{u}) \le 1, \quad j = 1,2,...,s\,. \tag{3.148}$$

4 этап. Формализуется принятая схема компромисса. Поскольку невозможно получить максимальную степень достижения цели по всем критериям сразу, задаются целью, чтобы наибольшей была минимальная по любому из критериев степень достижения оптимума. Это означает, что если достигнут максимум наихудшей степени достижения оптимума по какому-либо критерию, то по всем остальным критериям степень достижения цели будет не меньшей.

В этом случае задачу максимизации минимальной степени достижения оптимума можно записать в виде

$$\min_{j} \varphi_j(\mathbf{u}) \to \max_{\mathbf{u}}, \tag{3.149}$$

$$g_i(\mathbf{u}) \le b_i, \quad i = 1,2,...,m, \tag{3.150}$$

$$\varphi_j(\mathbf{u}) \ge \min_{j} \varphi_j(\mathbf{u}), \quad j = 1,2,...,s. \tag{3.151}$$

Рассмотрим пример поиска компромиссного решения следующей задачи.

В план условного предприятия могут быть включены два изделия (***A*** и ***B***), обладающие в планируемом отрезке времени неограниченным спросом; при этом необходимо выпустить не менее 20 штук каждого изделия. Объем выпуска в стоимостном выражении должен быть не менее 240 тыс. руб. Нормативы затрат ресурсов двух видов, используемых для изготовления изделий, располагаемые объемы этих ресурсов, а также другая необходимая информация для формализации модели информации представлены в нижеприведенной таблице.

Нормативы затрат ресурсов

Группы	Трудоемкость изготовления продукции (ед. времени)		Располагаемый фонд времени работы оборудования (годовой) (ед. времени)
	A	B	
Механообработка	10	40	2600
Сборка	30	10	2300
Оптовая цена (тыс.руб.)	6	3	——
Себестоимость (тыс.руб.)	1	2	——
Прибыль (тыс.руб.)	5	1	——

Найти рациональный компромиссный план, рассмотрев в качестве целей функционирования (критериев оптимальности) просматриваемой системы прибыль, себестоимость и стоимость объема выпуска.

Решение задачи

Критерий оптимальности:

Стоимость объема выпуска $f_1(u_1,u_2) = 6u_1 + 3u_2 \to \max_{u_1,u_2}$;

прибыль $f_2(u_1,u_2) = 5u_1 + u_2 \to \max_{u_1,u_2}$;

себестоимость $\qquad f_3(u_1,u_2) = u_1 + 2u_2 \to \min\limits_{u_1,u_2}$.

Задачу минимизации себестоимости заменим задачей максимизации функции

$$\bar{f}_3(u_1,u_2) = -f_3(u_1,u_2) = -u_1 - 2u_2 \to \max\limits_{u_1,u_2} .$$

Ограничения:

по фонду времени на механообработку

$$g_1(u_1,u_2) = 10u_1 + 40u_2 \le 2600 \text{ ед. времени;}$$

по фонду времени на сборку

$$g_2(u_1,u_2) = 30u_1 + 10u_2 \le 2300 \text{ ед. времени;}$$

по объему выпуска изделий вида ***A***

$$u_1 \ge 20 \text{ штук;}$$

по объему выпуска изделий вида ***B***

$$u_2 \ge 20 \text{ штук;}$$

по объему суммарного выпуска изделий вида ***A*** и ***B*** в стоимостном выражении

$$g_3(u_1,u_2) = 6u_1 + 3u_2 \ge 240 \text{ тыс. руб.}$$

На рис. 3.23 изображена область допустимых решений и указаны точки оптимальных решений: 1 – по стоимости объема выпуска; 2 – по прибыли; 3 – по себестоимости.

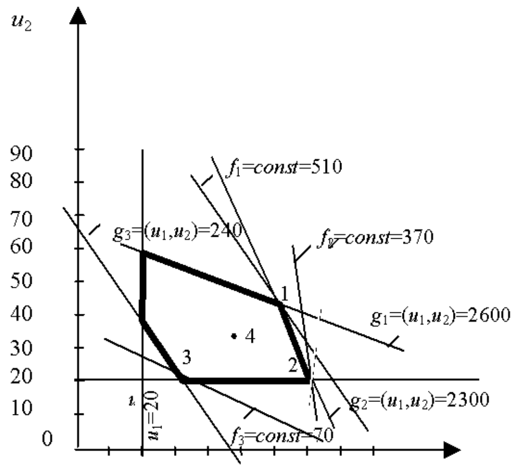

Рис. 3.23. Область допустимых решений

Составим таблицу значений критериев оптимальности.

Критерии оптимальности	Оптимальные решения	Значения критерия оптимальности		
		$f_1(u_1,u_2)$	$f_2(u_1,u_2)$	$\bar{f}_3(u_1,u_2)$
$f_1(u_1,u_2)$	$u_1^{opt}=60$ $u_2^{opt}=50$	510	350	-160
$f_2(u_1,u_2)$	$u_1^{opt}=70$ $u_2^{opt}=20$	480	370	-110
$f_3(u_1,u_2)$	$u_1^{opt}=30$ $u_2^{opt}=20$	240	170	-90
$F_j-\max$ по столбцу		510	370	-70
$f_j-\min$ по столбцу		480	170	-160
$\Delta_j=F_j-f_j$		240	200	90

Степени достижения по каждому из критериев оптимальности:
по стоимости

$$\varphi_1(u_1,u_2)=(6u_1+3u_2-480)/240\,;$$

по прибыли

$$\varphi_2(u_1,u_2)=(5u_1+u_2-170)/200\,;$$

по себестоимости

$$\varphi_3(u_1,u_2)=(-u_1-2u_2+160)/90\,.$$

Значения степени достижения цели для каждого из рассматриваемых критериев в точках, соответствующих оптимальному значению одного из критериев, приведены в таблице.

Критерий оптимальности	Оптимальные решения	Степени достижения		
		$\varphi_1(u_1,u_2)$	$\varphi_2(u_1,u_2)$	$\varphi_3(u_1,u_2)$
1	2	3	4	5
$f_1(u_1,u_2)$	$u_1^{opt}=60$ $u_2^{opt}=50$	1	0,9	0

1	2	3	4	5
$f_2(u_1,u_2)$	$u_1^{opt}=70$ $u_2^{opt}=20$	0,88	1	0,56
$\bar{f}_3(u_1,u_2)$	$u_1^{opt}=30$ $u_2^{opt}=20$	0	0	1

Задача максимизации минимальной степени достижения оптимума решалась из исходной точки 1 (рис. 3.23), соответствующей минимальному значению степени достижения оптимума по критерию $\bar{f}_3(u_1,u_2)$.

В результате получено компромиссное решение (точка 4 на рис. 3.23):

$$u_1^{комп}=50\,;\; u_2^{комп}=30\,.$$

При этом:
степени достижения равны

$$\varphi_1(u_1,u_2)=0{,}555\,,\qquad \varphi_2(u_1,u_2)=0{,}55\,,\qquad \varphi_3(u_1,u_2)=0{,}555\,;$$

значения критериев оптимальности

$$f_1=6\cdot 50+3\cdot 30=360 \text{ тыс. руб.};$$
$$f_2=5\cdot 50+30=280 \text{ тыс. руб.};$$
$$f_3=50+2\cdot 30=110 \text{ тыс. руб.}$$

Контрольные вопросы

1. В каких случаях возникает необходимость в многокритериальной оптимизации?
2. В чем сущность метода максимизации минимальной относительной степени достижения?
3. Каково содержание относительной степени достижения цели?
4. Каково условие достижения компромиссного решения?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*

1. Акулич, И.Д. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Д. Акулич. – М.: Высш. шк., 1973.
2. Васильев, О.В., Аргучинцев, А.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях / О.В. Васильев, А.В. Аргучинцев. – М.: Физматлит, 1999.
3. Жданов, С.А. Методы и рыночные технологии экономического управления / С.А. Жданов. – М.: Дело и сервис, 1999.
4. **Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и математическая экономика / М. Интрилигатор. – М.: АЙРИС ПРЕСС. 2002.**
5. Колемаев, В.А. Математическая экономика: учебник для вузов / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ, 1999.
6. Кривошеев, В.П. Теория оптимального управления экономическими системами: практикум / В.П. Кривошеев. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2005.
7. Малышев, Б.С. Лекции по математической экономике / Б.С. Малышев, П.Б. Казакова, М.В. Романова. – Благовещенск: Изд-во Амурского государственного университета. 2001.
8. Пантелеев, А.В., Летова, Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высш. шк., 2002.
9. Рубан А.И. Методы оптимизации: Учеб. Пособие. 3-е изд., испр. и доп. – Красноярск: ИПЦ КГТУ. 2004.
10. **Сборник задач по математике для втузов. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения / под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука, 1990.**
11. Фролькис, В.А. Введение в теорию оптимизации для экономистов: учеб. пособие для вузов / В.А. Фролькис. – СПб.: Питер, 2002.
12. **Шимко, П.Д. Оптимальное управление экономическими системами: учеб. пособие / П.Д. Шимко. – СПб.: Изд. Дом «Бизнес-пресса», 2004.**

* Книги, отмеченные полужирным шрифтом, относятся к обязательной литературе.

ОГЛАВЛЕНИЕ