

УДК 539.374

## О СДАВЛИВАНИИ ТЯЖЕЛОГО СЖИМАЕМОГО СЛОЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ИЛИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

© 2017 г. Л.В. Ковтаниук<sup>1</sup>, Г.Л. Панченко<sup>2, 3, \*</sup>

<sup>1</sup> *Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток*

<sup>2</sup> *Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре*

<sup>3</sup> *Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Владивосток;*

*\*e-mail: panchenko.21@yandex.ru*

В рамках теории малых деформаций приводится решение задачи о деформировании горизонтального плоского слоя сжимаемого материала. Верхняя граница слоя находится под действием сдвиговых и сжимающих нагрузок, а на нижней границе слоя с плоскостью выполняется условие прилипания. Нагрузки с течением времени увеличиваются по абсолютной величине, затем в некоторый момент времени становятся постоянными и далее уменьшаются до нуля. Рассматриваются различные условия пластичности, учитывающие сжимаемость материала: условие пластичности Кулона–Мора, условие пластичности Мизеса–Шлейхера, а также данные условия с учетом вязких свойств материала. Для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент необратимых деформаций разработана конечно-разностная схема для пространственной области, увеличивающейся со временем. Указаны закономерности продвижения упругопластических границ, вычислены напряжения, деформации, скорости деформаций и перемещения, найдены остаточные напряжения и деформации.

*Ключевые слова:* упругость, пластичность, вязкость, сжимаемость, малые деформации.

**1. Введение.** Впервые задачу о сжатии слоя из идеального жесткопластического материала рассмотрел Прандтль [1] в 1923 году. А. Надаи [2] дополнил решение Прандтля, определив поле скоростей перемещений. В. Гартман [3] обобщил решение задачи Прандтля на случай линейной зависимости максимального касательного напряжения от среднего давления, что характерно для сыпучих сред. Он же рассмотрел предельное состояние сыпучих сред, сжатых наклонными плитами, изогнутыми плитами в случае плоской деформации. В.В. Соколовский [4] получил численные решения задачи о сжатии полосы для различных соотношений длины и толщины. Проблема течения пластического слоя между шероховатыми поверхностями исследовалась А.А. Ильюшиным [5, 6]. В [7] решена задача о сжатии пластического слоя с учетом сил инерции и рассмотрено сжатие анизотропно упрочняющегося пластического слоя шероховатыми плитами. В [8] обобщено решение Прандтля на случай неоднородного пластического слоя. В [9], следуя Гартману, рассмотрено сжатие параллельными шероховатыми плитами слоя из сжимаемого идеальнопластического материала. В [10] изучено статически неопределимое состояние идеально пластического слоя, сжатого жесткими шероховатыми поверхностями, при условии пластичности Мизеса. В работе [11] рассмотрена задача о сжатии

плоского идеальнопластического слоя жесткими шероховатыми плитами с учетом силы тяжести. Решение задачи о сжатии ортотропного идеальнопластического слоя получено в [12]. В работе [13] на основе асимптотического анализа с малым геометрическим параметром без каких-либо первоначальных статических или кинематических гипотез получено единственное точное решение задачи о квазистатическом сжатии между жесткими шероховатыми плитами тонкого слоя несжимаемого идеально жесткопластического материала. Данное решение совпадает с обобщенным решением Прандтля на случай произвольного коэффициента шероховатости плит. Показана неправомочность таких асимптотик вблизи среднего сечения слоя, где построено другое, внутреннее, асимптотическое разложение, соответствующее сжатию тонкой вертикальной полосы в середине слоя. Работа [14] является обобщением [13] на случай произвольной области, занимаемой слоем в плане.

Здесь рассмотрим одномерную задачу о сжатии и сдвиге горизонтального слоя сжимаемого материала, проявляющего упругие, пластические и вязкие свойства. Учет упругих свойств материала позволяет в отличие от предыдущих работ получить закономерности продвижения упругопластических границ и определить остаточные напряжения.

**2. Упругое деформирование.** Рассмотрим слой высоты  $h$  сжимаемого упругопластического материала, верхняя граница которого  $x_2 = h$  нагружена. До достижения предельного состояния по напряжениям материал слоя остается упругим, а при выходе напряженного состояния на поверхность нагружения начинается его пластическое течение. Таким образом, полагаем, что деформации  $d_{ij}$  складываются из упругих  $e_{ij}$  и пластических  $p_{ij}$ :

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \dot{d}_{ij} = \frac{\partial \dot{d}_{ij}}{\partial t} = \dot{e}_{ij} + \dot{p}_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

Обратимые деформации задают напряжения в среде

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.2)$$

В соотношениях (2.1), (2.2)  $u_i$  – компоненты вектора перемещений,  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе.

Нагрузку на верхней границе слоя зададим в виде

$$\sigma_{12}|_{x_2=h} = \beta t^2, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = -\gamma t^2 \quad (2.3)$$

Здесь  $t$  – время;  $\beta > 0, \gamma > 0$  – заданные постоянные величины. Считаем, что слой расположен на абсолютно шероховатой плоскости, т.е. проскальзывание на линии контакта  $x_2 = 0$  отсутствует [15]:

$$u_1|_{x_2=0} = 0, \quad u_2|_{x_2=0} = 0 \quad (2.4)$$

где  $u_1(x_2, t), u_2(x_2, t)$  – отличные от нуля компоненты вектора перемещений.

В случае, пока пластическое течение не началось, для компонент деформаций и напряжений получаем

$$\begin{aligned} e_{12} &= u_{1,2}/2, \quad e_{22} = u_{2,2} \\ \sigma_{11} &= \sigma_{33} = \lambda u_{2,2}, \quad \sigma_{12} = \mu u_{1,2}, \quad \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu)u_{2,2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Интегрируя уравнения равновесия (квазистатическое приближение):

$$\partial\sigma_{12}/\partial x_2 = 0, \quad \partial\sigma_{22}/\partial x_2 - \rho g = 0 \quad (2.6)$$

в которых  $\rho$  – плотность материала,  $g$  – ускорение свободного падения, с использованием условий (2.3) получим распределение компонент напряжений  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$  в слое

$$\sigma_{12} = \beta t^2, \quad \sigma_{22} = \rho g(x_2 - h) - \gamma t^2 \quad (2.7)$$

Согласно (2.5) и (2.7), используя краевые условия (2.4), определим перемещения в слое и компоненты напряжений  $\sigma_{11} = \sigma_{33}$ :

$$u_1 = \frac{\beta t^2 x_2}{\mu}, \quad u_2 = \frac{\rho g x_2 (x_2 - 2h)}{2(\lambda + 2\mu)} - \frac{\gamma t^2 x_2}{\lambda + 2\mu} \quad (2.8)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{33} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\rho g(x_2 - h) - \gamma t^2)$$

Полученное решение (2.7), (2.8) справедливо до некоторого момента времени  $t = t_0$ . Начиная с этого момента времени, при достижении напряженным состоянием поверхности нагружения в материале слоя начинается пластическое течение. В дальнейшем принимается условие принципа максимума Мизеса, следствием которого является ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \xi \partial f / \partial \sigma_{ij}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \xi > 0 \quad (2.9)$$

Здесь  $k$  – предел текучести материала.

В качестве поверхности нагружения, учитывающей сжимаемость упругопластического материала, будем использовать условия пластичности Кулона–Мора

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2(k - q\sigma) \quad (2.10)$$

и Мизеса–Шлейхера

$$\tau_{ij} \tau_{ji} = 2(k - q\sigma)^2 \quad (2.11)$$

В соотношениях (2.10), (2.11)  $\sigma_i$  – главные значения тензора напряжений,  $\sigma = 1/3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  – среднее напряжение,  $\tau_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3\sigma_{kk}\delta_{ij}$  – девиатор тензора напряжений,  $q$  – константа материала.

При учете вязких свойств материала в условиях пластического течения условия Кулона–Мора (2.10) и Мизеса–Шлейхера (2.11) будем использовать соответственно в формах

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2(k - q\sigma) + \eta \max|\varepsilon_k^p - \varepsilon_s^p| \quad (2.12)$$

$$(\tau_{ij} - \eta \varepsilon_{ij}^p)(\tau_{ji} - \eta \varepsilon_{ji}^p) = 2(k - q\sigma)^2 \quad (2.13)$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - 1/3\varepsilon_{kk}^p\delta_{ij}$  – девиатор тензора скоростей пластических деформаций,  $\eta$  – вязкость.

**3. Пластическое течение при условии пластичности Кулона–Мора. Разгрузка среды.** При достижении напряженным состоянием (2.7) поверхности нагружения (2.10) в материале слоя начинается пластическое течение. Условие пластичности (2.10) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}\sigma_{21}} + \frac{2q}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 2k \quad (3.1)$$

Используя (3.1), (2.7) и (2.8), определим момент начала пластического течения  $t_0$ , которое впервые начнется в точках плоскости  $x_2 = h$ :

$$t_0 = \sqrt{\frac{ka}{\gamma}} \left( \sqrt{1 + \frac{\beta^2 a^2}{\gamma^2}} - \frac{qb}{3} \right)^{-1/2}, \quad a = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \quad b = \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \quad (3.2)$$

При дальнейшем увеличении нагрузки (2.3), начиная с момента времени  $t_0$ , от границы  $x_2 = h$  развивается область течения, занимающая слой  $m(t) \leq x_2 \leq h$ , а в слое  $0 \leq x_2 \leq m(t)$  материал по-прежнему деформируется обратимо. Таким образом, граница  $x_2 = m(t)$  является движущейся границей области пластического течения.

В области течения  $m(t) \leq x_2 \leq h$ , интегрируя уравнения равновесия (2.6) при крайних условиях (2.3), найдем, что компоненты напряжений  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$  вычисляются зависимостями (2.7). Из этих же уравнений, учитывая условия непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе  $x_2 = m(t)$ , получим, что в области обратимого деформирования  $0 \leq x_2 \leq m(t)$  остаются справедливыми зависимости (2.7) и (2.8). Подстановка компонент напряжений (2.7) и (2.8) в условие пластичности (3.1) позволяет получить уравнение движения границы области пластического течения  $m(t)$ :

$$m(t) = h + \frac{\gamma t^2}{\rho g} - \frac{3a k q b - \sqrt{9k^2 - \beta^2 t^4 (9 - q^2 b^2)}}{\rho g^2} \quad (3.3)$$

Из зависимостей (2.1) и (2.2) для компонент напряжений, деформаций и скоростей деформаций в области пластического течения получим соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)e_{11} + \lambda(e_{22} + e_{33}), & \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu)e_{22} + \lambda(e_{11} + e_{33}) \\ \sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu)e_{33} + \lambda(e_{11} + e_{22}), & \sigma_{12} &= 2\mu e_{12} \\ d_{11} &= e_{11} + p_{11} = 0, & d_{22} &= e_{22} + p_{22}, & d_{33} &= e_{33} + p_{33} = 0, & d_{12} &= e_{12} + p_{12} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{11}^p = \frac{\partial e_{11}}{\partial t} + \frac{\partial p_{11}}{\partial t} = 0, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{22}^p = \frac{\partial e_{22}}{\partial t} + \frac{\partial p_{22}}{\partial t}$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^e + \varepsilon_{33}^p = \frac{\partial e_{33}}{\partial t} + \frac{\partial p_{33}}{\partial t} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^e + \varepsilon_{12}^p = \frac{\partial e_{12}}{\partial t} + \frac{\partial p_{12}}{\partial t}$$

Используя соотношения (3.4), для компонент обратимых деформаций и напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{33}$  найдем

$$\begin{aligned} e_{11} &= -p_{11}, \quad e_{33} = -p_{33}, \quad e_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu}, \quad e_{22} = \frac{\sigma_{22} + \lambda(p_{11} + p_{33})}{\lambda + 2\mu} \\ \sigma_{11} &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} p_{11} - \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} p_{33} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{22} \\ \sigma_{33} &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} p_{33} - \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} p_{11} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{22} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Следуя ассоциированному закону пластического течения (2.9), из условия пластичности (3.1) в области  $m(t) \leq x_2 \leq h$  получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^p &= \xi \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} + \frac{2}{3}q \right), \quad \varepsilon_{22}^p = \xi \left( -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} + \frac{2}{3}q \right) \\ \varepsilon_{33}^p &= \frac{2}{3}\xi q, \quad \varepsilon_{12}^p = \xi \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Добавляя к уравнениям (3.6) условие пластичности (3.1) и исключая компоненты обратимых деформаций и напряжений по формулам (3.5), получим систему дифференциальных уравнений в частных производных для нахождения компонент пластических деформаций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{11}}{\partial t} + \frac{\partial p_{22}}{\partial t} &= 2 \frac{\partial p_{33}}{\partial t} \\ \frac{\partial p_{11}}{\partial t} &= -\frac{\partial p_{12}}{\partial t} \frac{(2(\lambda + \mu)p_{11} + \lambda p_{33} + \sigma_{22})}{a\sigma_{12}} + \frac{\partial p_{33}}{\partial t} \\ \frac{\partial p_{33}}{\partial t} &= \frac{2q}{3\sigma_{12}} \frac{\partial p_{12}}{\partial t} \left( k + \frac{q}{3} \frac{b}{a} (2\mu(p_{11} + p_{33}) - \sigma_{22}) \right) \\ \frac{3\sigma_{12}}{2q} \frac{\partial p_{33}}{\partial t} &= \frac{\partial p_{12}}{\partial t} \sqrt{a^{-2} (2(\lambda + \mu)p_{11} + \lambda p_{33} + \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2} \\ \xi &= \frac{3}{2q} \frac{\partial p_{33}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для решения полученной системы была разработана конечно-разностная схема первого порядка по времени. Так как пластическая область увеличивается со временем, то на каждом шаге по времени происходит пересчет шага по координате  $x_2$ . Начальными и граничными условиями для системы (3.7) является равенство компонент пластических деформаций нулю в момент времени  $t_0$  и на упругопластической границе  $x_2 = m(t)$ .

По найденным упругим и пластическим деформациям перемещения в области пластического течения определяются из дифференциальных уравнений

$$\partial u_1 / \partial x_2 = 2(e_{12} + p_{12}), \quad \partial u_2 / \partial x_2 = e_{22} + p_{22} \quad (3.8)$$

при условии их равенства на упругопластической границе  $x_2 = m(t)$  перемещениям в упругой области (2.8).

Пусть, начиная с некоторого момента времени  $t_1 > t_0$  напряжения  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{22}$  перестают изменяться. По-прежнему в материале присутствует область упругого деформирования и область вязкопластического течения, которая при этом перестанет развиваться дальше.

Из решения системы уравнений (3.7), которая остается справедливой в данном случае, следует, что при постоянных  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{22}$  в области  $m(t_1) \leq x_2 \leq h$  происходит нейтральное нагружение ( $\xi = 0$ ), т.е. перестают изменяться пластические деформации. Напряженное состояние находится на пределе упругости: условие пластичности (3.1) выполнено во всех точках области  $m(t_1) \leq x_2 \leq h$ .

Перемещения в области обратимого деформирования  $0 \leq x_2 \leq m(t_1)$  определяются из (2.8) при  $t = t_1$ , а в области нейтрального нагружения  $m(t_1) \leq x_2 \leq h$  находятся из уравнений (3.8).

Положим далее, что с момента времени  $t_2 > t_1$  компоненты напряжений  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{22}$  уменьшаются

$$\sigma_{12}|_{x_2=h} = \beta t_1^2 - \beta_1(t-t_2)^2, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = -\gamma t_1^2 + \gamma_1(t-t_2)^2 \quad (3.9)$$

Такое изменение в режиме нагружения приведет к появлению новой границы  $x_2 = m_1(t)$ , отделяющей область нейтрального нагружения  $m_1(t) \leq x_2 \leq h$  от области разгрузки  $m(t_1) \leq x_2 \leq m_1(t)$ , в которой присутствуют накопленные необратимые деформации, но

$$\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}\sigma_{21}} + \frac{2q}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) < 2k$$

Область  $0 \leq x_2 \leq m(t_1)$  остается областью упругого деформирования.

Компоненты напряжений  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{22}$  в области нейтрального нагружения  $m_1(t) \leq x_2 \leq h$ , как и ранее, определим интегрированием уравнений равновесия с использованием краевых условий (3.9):

$$\sigma_{12} = \beta t_1^2 - \beta_1(t-t_2)^2, \quad \sigma_{22} = \rho g(x_2 - h) - \gamma t_1^2 + \gamma_1(t-t_2)^2 \quad (3.10)$$

Учитывая непрерывность компонент напряжений на границах  $m_1(t)$  и  $m(t)$ , получим, что и в области разгрузки, и в упругой области для компонент напряжений  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{22}$  выполнены соотношения (3.10). Следовательно, во всей области деформирования компонента обратимых деформаций  $e_{12}$  вычисляется зависимостью

$$e_{12} = \frac{\beta t_1^2 - \beta_1(t-t_2)^2}{2\mu}$$

В области обратимого деформирования  $0 \leq x_2 \leq m(t_1)$ , используя соотношения (2.5) и условия (2.4), для остальных компонент обратимых деформаций, напряжений и перемещений найдем

$$e_{22} = \frac{\rho g(x_2 - h) - \gamma t_1^2 + \gamma_1(t-t_2)^2}{\lambda + 2\mu}$$

$$u_1 = \frac{(\beta t_1^2 - \beta_1(t-t_2)^2)x_2}{\mu}, \quad u_2 = \frac{\rho g x_2(x_2 - 2h)}{2(\lambda + 2\mu)} - \frac{(\gamma t_1^2 - \gamma_1(t-t_2)^2)x_2}{\lambda + 2\mu}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{33} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\rho g(x_2 - h) - \gamma t_1^2 + \gamma_1(t-t_2)^2)$$

Для компонент обратимых деформаций и напряжений в областях разгрузки и нейтрального нагружения выполнены соотношения (3.5). Учитывая, что пластические деформации в этих областях известны и далее не изменяются, из выполняющегося на границе  $m_1(t)$  условия пластичности (3.1) получим уравнение изменения данной границы

$$m_1(t) = h + \frac{\gamma t_1^2 - \gamma_1(t-t_2)^2}{\rho g} - \frac{3a(kqb + 3\mu p_{11}) + (9\lambda + 2\mu q^2 b^2)(p_{11} + p_{33})}{\rho g(9 - q^2 b^2)} + \frac{3a\sqrt{(3k + \mu qb(2p_{11} + p_{33}))^2 - (\beta t_1^2 - \beta_1(t-t_2)^2)^2(9 - q^2 b^2)}}{\rho g(9 - q^2 b^2)} \quad (3.11)$$

Интегрированием уравнений (3.8) определим перемещения в области разгрузки и нейтрального нагружения с учетом их совпадения с перемещениями в упругой области при  $x_2 = m(t_1)$ .

В момент времени  $t_3 > t_2$  упругопластическая граница  $x_2 = m_1(t)$  достигнет верхней границы  $x_2 = h$ , и в слое теперь останется две области: область обратимого деформирования  $0 \leq x_2 \leq m(t_1)$  и область с накопленными пластическими деформациями  $m(t_1) \leq x_2 \leq h$ .

При расчетах полагалось, что  $\beta/\beta_1 = \gamma/\gamma_1 = c^2$ . Тогда в момент времени  $t_k = ct_1 + t_2$  напряжения  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{22}$  на верхней границе слоя одновременно становятся равными нулю. Перемещения в области  $0 \leq x_2 \leq m(t_1)$  определяются по формулам

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{\rho g x_2 (x_2 - 2h)}{2(\lambda + 2\mu)}$$

а в области  $m(t_1) \leq x_2 \leq h$  интегрированием уравнений (3.8), в которых упругие деформации принимают следующий вид:

$$e_{12} = 0, \quad e_{22} = \frac{\rho g (x_2 - h) + \lambda(p_{11} + p_{33})}{\lambda + 2\mu}$$

В конечный момент времени компонента напряжения  $\sigma_{12}$  равна нулю во всем слое, а компонента  $\sigma_{22} = \rho g (x_2 - h)$ .

**4. Пластическое течение и разгрузка среды при условии пластичности Мизеса–Шлейхера.** Рассмотрим теперь решение задачи при условии пластичности Мизеса–Шлейхера (2.11), которое для рассматриваемого случая принимает форму

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}\sigma_{21} = 6\left(k - \frac{q}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\right)^2 \quad (4.1)$$

Качественно решение предыдущего параграфа не изменится, все изменения будут связаны с соотношениями, где необходимо использование условия (4.1).

Момент начала пластического течения на верхней границе слоя  $x_2 = h$  теперь находится по формуле

$$t_0 = \sqrt{\frac{ka}{\gamma} \left( \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{\beta^2 a^2}{\gamma^2}} - \frac{qb}{3} \right)^{-1/2}} \quad (4.2)$$

Уравнение изменения упругопластической границы  $x_2 = m(t)$ , отделяющей область пластического течения  $m(t) \leq x_2 \leq h$  от области обратимого деформирования имеет вид

$$m(t) = h + \frac{\gamma t^2}{\rho g} - \frac{3a kqb - \sqrt{12k^2 - \beta^2 t^4 (12 - q^2 b^2)}}{12 - q^2 b^2} \quad (4.3)$$

Соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$\varepsilon_{11}^p = 2\xi(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33} + D), \quad \varepsilon_{22}^p = 2\xi(2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33} + D)$$

$$\varepsilon_{33}^p = 2\xi(2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22} + D), \quad \varepsilon_{12}^p = 6\xi\sigma_{12}, \quad D = 2q\left(k - \frac{q}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\right)$$

вместе с условием пластичности (4.1) приводят к следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных для определения компонент пластических деформаций в области  $m(t) \leq x_2 \leq h$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{11}}{\partial t} - \frac{\partial p_{33}}{\partial t} &= -2\mu \frac{\partial p_{12}}{\partial t} \frac{p_{11} - p_{33}}{\sigma_{12}} \\ \frac{\partial p_{11}}{\partial t} - \frac{\partial p_{22}}{\partial t} &= -\frac{2}{a\sigma_{12}} \frac{\partial p_{12}}{\partial t} (\sigma_{22} + 2(\lambda + \mu)p_{11} + \lambda p_{33}) \\ \frac{\partial p_{11}}{\partial t} + \frac{\partial p_{22}}{\partial t} + \frac{\partial p_{33}}{\partial t} &= \frac{2q}{\sigma_{12}} \frac{\partial p_{12}}{\partial t} \left( k - \frac{qb}{3a} (\sigma_{22} - 2\mu(p_{11} + p_{33})) \right) \\ &\frac{2}{a^2} (\sigma_{22} + 2(\lambda + \mu)p_{11} + \lambda p_{33})^2 + \frac{2}{a^2} (\sigma_{22} + \lambda p_{11} + 2(\lambda + \mu)p_{33})^2 + \\ &+ 2\mu^2 (p_{11} - p_{33})^2 + 3\sigma_{12}^2 = 3 \left( k - \frac{qb}{3a} (\sigma_{22} - 2\mu(p_{11} + p_{33})) \right)^2 \\ \xi &= \frac{1}{6\sigma_{12}} \frac{\partial p_{12}}{\partial t} \end{aligned}$$

Уравнение изменения границы  $x_2 = m_1(t)$ , отделяющей область разгрузки от области нейтрального нагружения при разгрузке, находится по формуле

$$\begin{aligned} m_1(t) &= h + \frac{\gamma_1^2 - \gamma_1(t - t_2)^2}{\rho g} - \frac{3akqb + 2(3a\mu + 6\lambda + \mu q^2 b^2)(p_{11} + p_{33})}{\rho g(12 - q^2 b^2)} + \\ &+ \frac{3a \sqrt{3(2k + \mu qb(p_{11} + p_{33}))^2 - (12 - q^2 b^2) \left( \mu^2 (p_{11} - p_{33})^2 + (\beta_1 t^2 - \beta_1(t - t_2))^2 \right)}}{\rho g(12 - q^2 b^2)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

**5. Пластическое течение и разгрузка среды при условиях пластичности, учитывающих вязкие свойства материала.** Здесь рассмотрим решение задачи для условий пластичности, обобщенных на случай учета вязких свойств материала. Условие пластичности (2.12) в нашем случае примет вид

$$\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}\sigma_{21}} + \frac{2q}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 2k + 2\eta \sqrt{(\epsilon_{11}^p - \epsilon_{22}^p)^2 + 4\epsilon_{12}^p \epsilon_{21}^p}$$

Момент начала пластического течения  $t_0$  на плоскости  $x_2 = h$  находится по формуле (3.2), уравнение движения границы области пластического течения принимает форму (3.3).

Систему дифференциальных уравнений относительно компонент тензора пластических деформаций в области вязкопластического течения получаем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{11}}{\partial t} &= -\frac{\partial p_{12}}{\partial t} \frac{\sigma_{22} + 2(\lambda + \mu)p_{11} + \lambda p_{33}}{a\sigma_{12}} + \frac{\partial p_{33}}{\partial t} \\ \frac{\partial p_{22}}{\partial t} &= 2 \frac{\partial p_{33}}{\partial t} - \frac{\partial p_{11}}{\partial t} \\ \frac{\partial p_{33}}{\partial t} &= \frac{2q}{3\sigma_{12}} \frac{\partial p_{12}}{\partial t} \sqrt{\frac{(\sigma_{22} + 2(\lambda + \mu)p_{11} + \lambda p_{33})^2}{a^2}} + \sigma_{12}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\sigma_{12}} \frac{\partial p_{12}}{\partial t} - \frac{1}{\eta} \right) \sqrt{\frac{(\sigma_{22} + 2(\lambda + \mu)p_{11} + \lambda p_{33})^2}{a^2} + \sigma_{12}^2} = \\ & = -\frac{1}{\eta} \left( k - \frac{qb}{3a} (\sigma_{22} - 2\mu(p_{11} + p_{33})) \right) \\ \xi & = \frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{(\sigma_{22} + 2(\lambda + \mu)p_{11} + \lambda p_{33})^2}{a^2} + \sigma_{12}^2} - \frac{2}{\eta} \left( k - \frac{qb}{3a} (\sigma_{22} - 2\mu(p_{11} + p_{33})) \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Условие пластичности (2.13) принимает форму

$$\begin{aligned} & (\sigma_{11} - \sigma_{22} - \eta(\epsilon_{11}^p - \epsilon_{22}^p))^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33} - \eta(\epsilon_{22}^p - \epsilon_{33}^p))^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11} - \eta(\epsilon_{33}^p - \epsilon_{11}^p))^2 + \\ & + 6(\sigma_{12} - \eta\epsilon_{12}^p)(\sigma_{21} - \eta\epsilon_{21}^p) = 6 \left( k - \frac{q}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right)^2 \end{aligned}$$

Момент начала пластического течения  $t_0$  на плоскости  $x_2 = h$  находится по формуле (4.2), уравнение движения границы области пластического течения принимает форму (4.3).

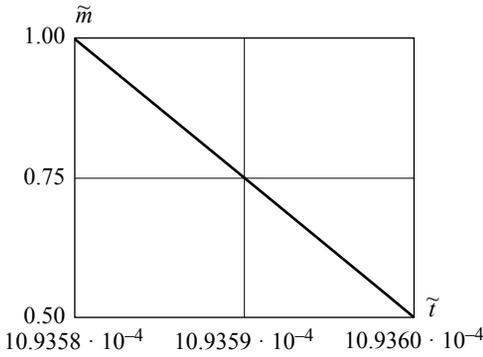
В таком случае получим систему дифференциальных уравнений для компонент необратимых деформаций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{11}}{\partial t} - \frac{\partial p_{22}}{\partial t} & = -2 \frac{\partial p_{12}}{\partial t} \frac{\sigma_{22} + 2(\lambda + \mu)p_{11} + \lambda p_{33}}{a\sigma_{12}} \\ \frac{\partial p_{22}}{\partial t} - \frac{\partial p_{33}}{\partial t} & = 2 \frac{\partial p_{12}}{\partial t} \frac{\sigma_{22} + \lambda p_{11} + 2(\lambda + \mu)p_{33}}{a\sigma_{12}} \\ \frac{\partial p_{33}}{\partial t} - \frac{\partial p_{11}}{\partial t} & = 2\mu \frac{\partial p_{12}}{\partial t} \frac{p_{11} - p_{33}}{\sigma_{12}} \\ \frac{\partial p_{12}}{\partial t} & = \frac{2\xi\sigma_{12}}{1 + 2\xi\eta} \end{aligned} \quad (5.2)$$

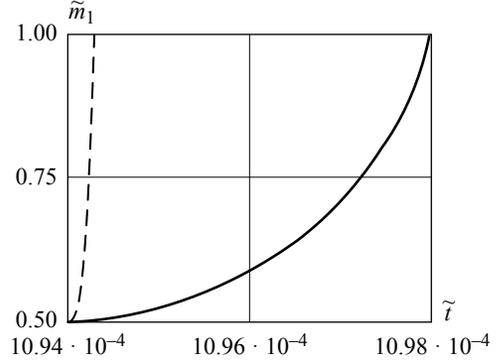
$$\begin{aligned} \xi & = \frac{1}{2\eta} \left( k - \frac{qb}{3a} (\sigma_{22} - 2\mu(p_{11} + p_{33})) \right)^{-1} \left( \frac{2}{3}\mu^2 (p_{11} - p_{33})^2 + \sigma_{12}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2(\sigma_{22} + 2(\lambda + \mu)p_{11} + \lambda p_{33})^2}{3a^2} + \frac{2(\sigma_{22} + \lambda p_{11} + 2(\lambda + \mu)p_{33})^2}{3a^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\eta} \end{aligned}$$

В отличие от предыдущих случаев, когда в момент времени  $t_1$  напряжения  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{22}$  становятся постоянными, из решения систем (5.1) и (5.2) следует, что, хотя граница области вязкопластического течения не изменяется, в области  $m(t_1) \leq x_2 \leq h$  течение продолжается. Только после того, как напряжения в момент времени  $t_2$  начнут уменьшаться (3.9), пластические деформации в области  $m_1(t) \leq x_2 \leq h$  перестанут изменяться, то есть в этой области будет происходить нейтральное нагружение, в то время как области  $0 \leq x_2 \leq m(t_1)$  и  $m(t_1) \leq x_2 \leq m_1(t)$ , как и в предыдущих случаях, являются упругой областью и областью разгрузки соответственно. Границы  $m_1(t)$  определяются уравнениями (3.11) и (4.4).

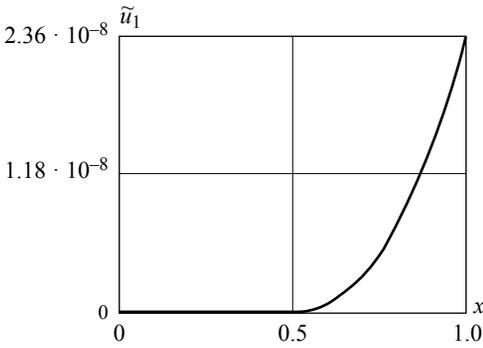
В расчетах используются следующие значения параметров:  $\lambda/\mu = 1.2721$ ,  $k/\mu = 0.0031$ ,  $\rho gh/(\lambda + 2\mu) = 2.8962 \cdot 10^{-7}$ ,  $\eta/\mu\sqrt{\gamma/(\lambda + 2\mu)} = 0.00001$ ,  $b = 5.8162$ ,  $c = 1$ ,  $q = 0.3$ .



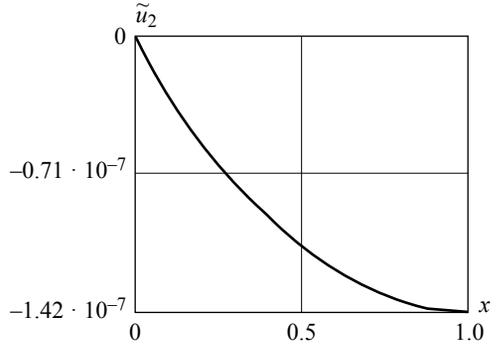
Фиг. 1



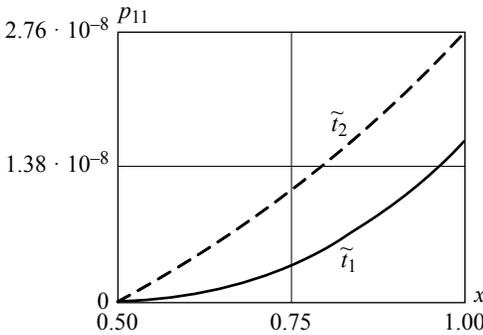
Фиг. 2



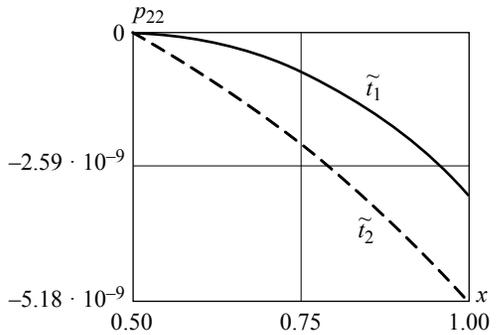
Фиг. 3



Фиг. 4



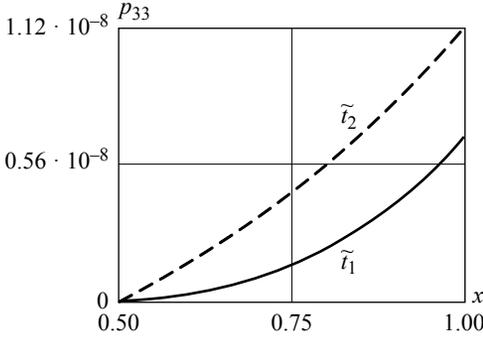
Фиг. 5



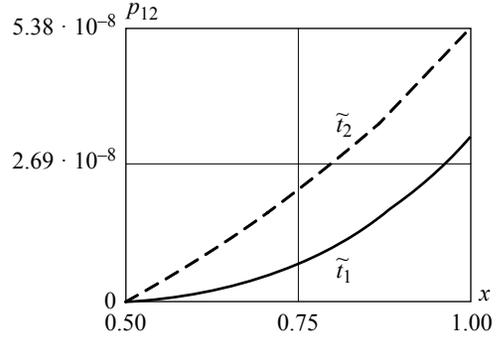
Фиг. 6

Проведенные расчеты проиллюстрированы для условия пластичности Кулона–Мора с учетом вязкости. В остальных случаях для приведенных параметров напряженно-деформированного состояния качественных отличий не наблюдается.

На фиг. 1 показано изменение упругопластической границы  $\tilde{m} = m / h$  в зависимости от безразмерного времени  $\tilde{t} = \gamma t^2 / (\lambda + 2\mu)$ . Зависимость упругопластической границы



Фиг. 7



Фиг. 8

$\tilde{m}_1 = \tilde{m}_1 / h$  от времени  $\tilde{t}$  представлена на фиг. 2 штриховой линией без учета вязкости и сплошной линией с учетом вязкости.

На фиг. 3 и фиг. 4 изображены распределения перемещений  $\tilde{u}_1 = u_1/h$  и  $\tilde{u}_2 = u_2/h$  по слою ( $x = x_2/h$ ) в конечный момент времени.

Фиг. 5 – фиг. 8 иллюстрируют распределения компонент необратимых деформаций  $p_{11}$ ,  $p_{22}$ ,  $p_{33}$  и  $p_{12}$  в пластической области  $\tilde{m} \leq x \leq 1$  в моменты времени  $\tilde{t}_1$  и  $\tilde{t}_2$ .

**6. Заключение.** Здесь получено решение краевой задачи о деформировании горизонтального плоского слоя сжимаемого материала под действием сдвиговых и сжимающих усилий. Для сравнения рассмотрены условия пластичности Кулона-Мора и Мизеса-Шлейхера, а также данные условия, учитывающие вязкие свойства материала. Учет вязкости в условиях пластичности приводит к тому, что при постоянных нагрузках продолжается пластическое течение, в то время как при использовании условий пластичности без вязкости область пластического течения становится областью нейтрального нагружения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 16-31-60017 мол\_а\_дж), программы фундаментальных научных исследований «Дальний Восток» (0262-2015-0122).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прандтль Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел // Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 102–113.
2. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. 647 с.
3. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Иностран. лит., 1969. 864 с.
4. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с.
5. Ильющин А.А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхности // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 3. С. 265–288.
6. Ильющин А.А. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 6. С. 693–713.
7. Быковцев Г.И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: сб. статей. Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.

8. Кузнецов А.И. Задача о неоднородном пластическом слое // Прикл. механика. 1960. Т. 12. № 2. С. 163–172.
9. Marshall E.A. The compression of a slab of ideal soil between rough plates // Acta Mech. 1967. V. 3. № 2. P. 82–92.
10. Максимова Л.А. О статически неопределимом состоянии идеально пластического слоя, сжатого жесткими шероховатыми поверхностями // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 98–103.
11. Григорьев И.П. О сжатии плоского идеальнопластического слоя с учетом сил тяжести // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2009. № 6. С. 130–133.
12. Кузнецов Е.Е., Матченко И.Н., Матченко Н.М. Сжатие идеально пластического ортотропного слоя // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. № 8. 2010. С. 280–287.
13. Георгиевский Д.В. Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 1. С. 83–93.
14. Георгиевский Д.В. Течение Сен-Венана в тонком слое, подверженном пластическому сжатию // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 104–115.
15. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

Поступила в редакцию  
29.05.2016