МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2018

УДК 539.37+539.214

ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗОГРЕВ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ ЕГО ДВИЖЕНИИ ЗА СЧЕТ ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ

© 2018 г.
А.А. БУРЕНИН[1], Л.В. КОВТАНЮК[2], Г.Л. ПАНЧЕНКО[1,3]*

[1]Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре
[2]Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток
[3]Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Владивосток;
**e-mail: panchenko.21@yandex.ru*

В рамках теории больших упругопластических деформаций, обобщенной на случай учета вязких и теплофизических свойств материалов, приводится решение последовательности связанных задач о зарождении и развитии течения в слое материала, находящегося в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями под действием увеличивающегося со временем перепада давления, и последующем торможении течения при уменьшении градиента давления. Теплофизические и деформационные процессы взаимосвязаны, предел текучести зависит от температуры. В качестве дополнительного источника тепла принимается его производство за счет трения материала слоя о граничные шероховатые цилиндрические поверхности.

Ключевые слова: упругость, пластичность, вязкость, теплопроводность, большие деформации

1. Введение. Рассматриваемая в данной статье задача относится к числу тех задач, которые ставит технологическая практика перед фундаментальной механикой. Постановка такой задачи возникла из необходимости модельно оценить процессы, происходящие в материале при высокоскоростной штамповке, высокотемпературном прессовании в порошковой металлургии, прессовании моделей в высокоточном литье [1] и др. Во всех этих процессах деформации, приобретаемые материалами, большие. Наряду с упругими свойствами материалов необходимо учитывать пластические и вязкие. При этом обрабатываемый материал заметно разогревается как за счет деформирования, так и вследствие трения о жесткие стенки. Поэтому задача оказывается неизотермической и рассматривается в рамках теории больших деформаций сред с упругими, пластическими и вязкими свойствами. Полагаем, что предел текучести зависит от температуры, а деформирование, тепловыделение и теплопередача не разделяются. Отметим, что в настоящее время публикаций, посвященных связанным задачам теории больших упруговязкопластических деформаций, очень мало [2–6]. В качестве математической модели больших деформаций будем использовать модель, предложенную ранее [7] и обобщенную на неизотермический случай [8,9].

2. Основные модельные соотношения. В прямоугольной системе пространственных переменных Эйлера x_i кинематика больших деформаций среды [9] определяется зависимостями

$$
\begin{aligned}
& d_{ij} = m_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} m_{ik} m_{kj} - m_{ik} p_{kj} - p_{ik} m_{kj} + m_{ik} p_{km} m_{mj} \\
& \frac{Dm_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{p} - \frac{1}{2}\Big((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^{p} + z_{ik}) m_{kj} + m_{ik} (\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^{p} - z_{kj}) \Big) \\
& \frac{Dp_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij}^{p} - p_{ik} \varepsilon_{kj}^{p} - \varepsilon_{ik}^{p} p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik} n_{kj} + n_{ik} r_{kj} \\
& \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\big(v_{i,j} + v_{j,i} \big), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
& m_{ij} = e_{ij} + \alpha (T - T_0) \delta_{ij}, \quad r_{ij} = \frac{1}{2}\big(v_{i,j} - v_{j,i} \big) + z_{ij} (\varepsilon_{sk}, m_{sk})
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

В соотношениях (2.1) d_{ij} – компоненты тензора деформаций Альманси, $m_{ij} - m_{ik} m_{kj}/2$, p_{ij} – его обратимая и необратимая составляющие; D/Dt – используемая объективная производная тензоров по времени, которая приведена для произвольного тензора n_{ij}; ε_{ij}^{p} и r_{ij} – компоненты тензоров скоростей пластических деформаций и вращений; z_{ij} – нелинейная составляющая тензора вращений, которая выписана полностью в [9]; v_i и u_i – компоненты векторов скоростей и перемещений точек среды. Тепловое расширение считаем обратимым, таким образом e_{ij} – линейная часть тензора упругих деформаций, α – коэффициент линейного расширения, T – текущая температура, T_0 – комнатная температура тела в свободном состоянии.

Примем условие, что изменение объема среды определяется только ее тепловым расширением, а механически она несжимаема. Тогда

$$
\sigma_{ij} = \begin{cases}
-P\delta_{ij} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \dfrac{\partial W}{\partial d_{ik}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}) & \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0 \\
-P_1 \delta_{ij} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \dfrac{\partial W}{\partial m_{ik}} \big(\delta_{kj} - m_{kj} \big) & \text{при} \quad p_{ij} \neq 0
\end{cases}
\qquad (2.2)
$$

$$
\theta = (T - T_0) T_0^{-1}
$$

В формулах (2.2) σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Эйлера – Коши, P и P_1 – неизвестные функции добавочного гидростатического давления. При выводе соотношений (2.2) использовалось предположение, что плотность распределения свободной энергии ψ зависит только от обратимых деформаций, поэтому имеем $W = \rho_0 \psi$ (ρ_0 – плотность материала в свободном состоянии). Для упругого потенциала W принимаем его разложение в ряд Маклорена относительно свободного состояния при температуре T_0. Принимая условие изотропии, получаем

$$
\begin{aligned}
W = & -2\mu J_1 - \mu J_2 + b J_1^2 + (b - \mu) J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \nu_1 J_1 \theta + \nu_2 \theta^2 - \\
& - \nu_3 J_1 \theta^2 - \nu_4 J_1^2 \theta - \nu_5 J_2 \theta - \nu_6 \theta^3 + \ldots
\end{aligned}
\qquad (2.3)
$$

$$
J_k = \begin{cases} L_k & \text{при} \ p_{ij} = 0 \\ I_k & \text{при} \ p_{ij} \neq 0 \end{cases}
$$

$$
L_1 = d_{kk}, L_2 = d_{ik} d_{ki}, \ I_1 = c_{kk}, \ I_2 = c_{ik} c_{ki}, \ c_{ij} = m_{ij} - m_{ik} m_{kj}/2
$$

Здесь μ – модуль сдвига, b, χ, ν_m $(m = 1, 2, \ldots, 6)$ – термомеханические постоянные [10].

Принимая закон теплопроводности Фурье, согласно уравнению баланса энтропии получаем уравнение теплопроводности (q – коэффициент температуропроводности):