ВВЕДЕНИЕ

При выполнении любых действий и при принятии решений в различных областях деятельности основополагающим желанием является получение наилучшего в определенном смысле результата.

Смысл действий и принятие решений определяются заинтересованностью в этих действиях и решениях в соответствии с имеющимися возможностями.

Заинтересованность может выражаться в получении максимальной прибыли, минимальной себестоимости при заданной производительности, максимальной производительности при заданных затратах и т.п.

Одной из важных задач является задача перевода объекта или системы из одного состояния в другое за минимальное время.

В учебном пособии можно выделить три раздела. В первом разделе излагается понятие экономической системы, отмечаются ее основные свойства, возможные состояния, виды критериев оптимальности, даются понятия оптимизации и оптимального управления экономическими системами. Во втором разделе сформулирована задача оптимального управления как задача динамической оптимизации в стиле Лагранжа, Понтрягина, Беллмана и рассмотрены три метода ее решения: классическое вариационное исчисление, принцип максимума, динамическое программирование в непрерывной форме (уравнение Беллмана). В третьем разделе сформулирована задача статической оптимизации и рассмотрены методы ее решения: аналитический метод исследования функций на экстремум, численные методы решения одномерных и многомерных задач, динамическое программирование в дискретной форме для решения задач большой размерности и симплекс-метод решения задач линейного программирования

Содержание учебного пособия определено стандартом специальности 080116.65 (математические методы в экономике) по дисциплине «Теория оптимального управления экономическими системами». При разработке данного учебного пособия автор руководствовался желанием не перегружать пособие строгими доказательствами, а изложить в наиболее доступной форме базовые теоретические основы методов оптимального управления и оптимизации и снабдить излагаемые методы примерами экономического содержания.

Тема 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Экономическая система. Свойства экономической системы

Существует большое количество определений экономической системы. Особого внимания заслуживает следующее определение: «экономическая система» – это система общественного производства, обмена, распределения и потребления материальных благ, основной функцией которой является максимальное удовлетворение потребностей население в товарах и услугах. Экономические системы относятся к так называемым большим системам, характеризующимся упорядоченной совокупностью большого числа взаимосвязанных и взаимодействующих элементов. Принципиальной особенностью больших систем является наличие у них такого свойства, которым не обладает ни один элемент данной системы в отдельности. Эти системы представляют такой объект, свойства которого не сводятся просто к совокупности свойств составляющих его элементов. Принцип появления у целого (системы) свойств, не выводимых из наблюдаемых свойств частей (элементов), называется принципом эмерджентности.

Экономическая система в отличие от систем других типов содержит в качестве важнейшего элемента сознательно действующего человека, который выполняет функции управления. В соответствии с этим в качестве экономических систем различной степени сложности могут рассматриваться различные подразделения предприятий (фирм), сами предприятия (фирмы), научно-исследовательские и проектные организации, объединения, отрасли и, наконец, все народное хозяйство страны в целом.

Из основных свойств экономических систем следует отметить:

1. Эмерджентность как проявление в наиболее яркой форме свойства целостной системы. Эмерджентность порождается возникновением между элементами системы синергетических связей, которые обеспечивают увеличение общего эффекта до величины большей, чем сумма эффектов элементов системы, действующих независимо. Отсюда следует, что экономические системы необходимо исследовать в целом.

2. Массовый характер многих экономических процессов и явлений, что требует анализировать значительное количество наблюдений и использовать результаты этих анализов.

3. Неопределенность в развитии экономических процессов, для изучения которой необходимо использование теории нечетких множеств.

4. Динамический характер развития экономических систем, предполагающий оптимизацию траектории их развития во времени под влиянием внутренних и внешних воздействий.

5. Случайность в развитии экономических явлений и процессов, исследование которой эффективно лишь с использованием теории вероятности и математической статистики.

6. Невозможность исследования многих экономических систем аналитическими методами. Чрезвычайная сложность таких систем диктует необходимость использования для этой цели так называемых алгоритмических подходов.

7. Многоцелевой характер функционирования, предполагающий поиск при управлении сложными экономическими системами оптимальных компромиссных решений.

8. Необходимость структуризации сложных экономических систем на подсистемы, доступные для непосредственного эффективного управления, что требует разработки и использования соответствующих методов оптимальной декомпозиции систем и согласования оптимальных решений для отдельных подсистем с целью оптимизации траектории развития всей системы в целом.

1.2. Оптимизация экономических систем. Оптимальное управление экономическими системами

Оптимизация и оптимальное управление является основными задачами кибернетики – науки об управлении. В зависимости от области применения кибернетики в последние годы бесспорными становятся такие направления кибернетики, как техническая, химическая, экономическая.

Управление рассматривается как специально организованное воздействие на объект управления с целью получения желаемого результата. Под объектом управления подразумевается объект, в котором протекает управляемый процесс. Если специально организованное воздействие на объект управления приводит к получению наилучшего в определенном смысле результата, то такое воздействие называется оптимальным управлением.

Процесс нахождения оптимального управления называется оптимизацией.

Для решения задачи оптимального управления необходимо иметь в той или иной форме математическое описание оптимизируемого объекта и метод определения оптимальных управлений (решений).

Для решения задачи оптимального управления объектами используется метод математического моделирования.

Таким образом, рассматривая экономическую систему как объект управлении, решение задачи оптимального управления экономической системой сводится к:

1) разработке ее экономическо-математической модели;

2) моделированию режимов ее функционирования с использованием соответствующих методов оптимизации для определения оптимальных управлений (решений).

1.3. Моделирование оптимальных режимов функционирования экономической системы при предполагаемом характере внешних воздействий на систему

Моделирование рассматривается как процесс воспроизведения поведения объекта управления на его модели.

Под моделью подразумевается такой объект, который воспроизводит с предельной точностью основные свойства объекта-оригинала в поставленной задаче. В дальнейшем под экономико-математической моделью будем понимать совокупность взаимосвязанных математических зависимостей, формально отражающих условия функционирования реальных экономических объектов. Математические зависимости, как правило, представляют собой уравнения или неравенства. Экономико-математическая модель должна обеспечить возможность изучения функционирования и оценки изменения его эффективности при возможных изменениях характеристик внешней среды.

Поскольку количественные исследования на модели позволяют получить наиболее полное представление о том, как будут действовать в различных условиях реальные экономические системы, экономико-математические модели могут дать большой эффект не только для структуризации целей управления, но и для самого анализа глубинных процессов развития моделирования систем.

При исследовании принципа экономико-математического моделирования могут быть значительно уменьшены материальные и трудовые затраты, присущие экспериментальным методам.

Особую роль экономико-математическое моделирование играет в решении проблемы эффективного использования вычислительной техники в процессе функционирования экономических систем и управления ими. Следует отметить, что из-за своей чрезвычайной сложности экономические процессы слабо формализованы математически, а это сдерживает их использование на средствах вычислительной техники, требующих, как известно, строгой формализации. Качество решения реальных задач ограничивается именно из-за несовершенства экономических моделей.

По общему целевому назначению экономико-математические модели делятся на теоретико-аналитические, используемые при изучении общих свойств и закономерностей экономических систем, и на прикладные, применяемые для решения конкретных экономических задач системного анализа.

По степени агрегирования объектов моделирования модели делятся на макроэкономические, описывающие функционирование всей экономической системы в целом, и микроэкономические, исследующие системы уровня фирмы, предприятия, отдельного подразделения фирмы и т.п.

По характеру учета фактора времени экономико-математические модели подразделяются на статические, в которых все зависимости относятся к единому моменту времени, и динамические, описывающие процесс развития экономической системы во времени. По учету фактора случайности такие модели классифицируются, как детерминированные, если в них результаты на выходе однозначно определяются входными воздействиями, и вероятностные (стохастические), если при задании на входе модели определенной совокупности значений на ее выходе могут получаться различные результаты, зависимые от действия случайного фактора (непредсказуемых неизмеряемых воздействий).

По цели создания и применения выделяют балансовые, оптимизационные и алгоритмические модели. Балансовые модели выражают требования соответствия наличия факторов производства и их использования. Оптимизационные модели предназначены для выбора оптимального, т.е. наилучшего по конкретному критерию, решения. Алгоритмические модели предназначены для использования в режиме машинной имитации исследуемых экономических моделей.

Экономико-математические модели эффективны лишь тогда, когда они отражают важнейшие черты изучаемого процесса, отвлекаясь от тех или иных сторон реального явления, имеющих второстепенное значение для решения данной конкретной задачи.

Таким образом, при построении любой экономико-математической модели ее разработчику необходимо стремиться к тому, чтобы выделить и воспроизвести только те свойства и характеристики реальных объектов, которые необходимы и достаточны для решения поставленной задачи.

При формализации любой экономико-математической модели необходимо соответствие между целевой установкой и мерой абстракции, которая должна быть необходимой и достаточной для реализации именно этой, а не какой-либо другой цели. Сформулированное положение может быть названо принципом информационно-целевой адекватности.

Из данного принципа со всей очевидностью следует, что конкретную экономико-математическую модель необходимо использовать в строго определенной области.

Важным практическим требованием, предъявляемым к экономико-математическим моделям, является требование их эффективной реализуемости. Необходимость соблюдения данного требования заставляет при построении конкретной экономико-математической модели стремиться к тому, чтобы получить модель, принадлежащую к хорошо изученному классу математических структур, для которых существует достаточно универсальный и эффективный метод их решения.

Особенно важно учитывать это обстоятельство при подготовке экономико-математической модели для оптимизации экономической системы с целью оптимального управления.

1.4. Принципы управления экономическими системами

Любое предприятие, производящее и реализующее продукцию, представляет иерархическую структуру, включающую, как минимум, два уровня. На нижнем уровне решаются технические задачи по получению из выданного объема сырья при имеющихся технических и энергетических возможностях получить готовую продукцию. На верхнем уровне решаются организационно-экономические задачи по обеспечению предприятия оборудованием, материалами, сырьем, энергией, работниками и т.п. для функционирования производства, а также по реализации готовой продукции.

В связи с этим задачи управления на нижнем уровне для отдельных стадий технологического процесса и задача управления на верхнем уровне решаются по различным критериям. Так, например, в большинстве случаев для отдельных стадий технологического процесса критериями могут быть производительность по продукту заданного качества, энергозатраты на получение продукта заданного качества, чистота разделения смеси на отдельные фракции. Для предприятия в целом, как правило, критерием является прибыль.

Управляющими воздействиями на нижнем уровне являются потоки энергии или вещества, а на верхнем уровне – решения по планированию поставок сырья, материалов, энергоносителей, оборудования, по реализации готовой продукции и т.п.

В настоящее время достаточно хорошо изучены вопросы управления технологическими процессами. Имея математическую модель технологического процесса, можно известными способами синтезировать систему управления, обеспечивающую оптимальное ее функционирование по заданному критерию оптимальности. Ниже будут рассмотрены принципы управления технологическими процессами и показано, что с учетом особенностей экономической системы как верхнего уровня предприятия эти принципы и подходы к созданию систем управления технологическими процессами применимы также к экономическим системам. Это обусловлено существованием науки кибернетики как науки об управлении вообще применительно к любым объектам управления. Такими объектами могут быть отдельные технологические аппараты, участки производства, предприятия, отрасли промышленности, государство, общество и т.д.

Если объектом управления является техническая система, в которой протекают технологические процессы, то наука управления ими носит название технической кибернетики. В настоящее время в литературе можно встретить название экономической кибернетики, что оправдано спецификой задач управления и способами их решения применительно к экономическим системам как объектам управления.

Кибернетический подход предполагает наличие обратной связи в системе управления. Результат функционирования в виде выходных переменных передается на вход управляющего устройства. В качестве управляющего устройства в технических системах используются регуляторы, а в экономических системах – лицо или группа лиц, принимающих решение.

Основополагающими принципами управления являются два принципа: принцип управления по отклонению и принцип управления по возмущению.

На рис. 1.1 приведена схема реализации принципа управления по отклонению.

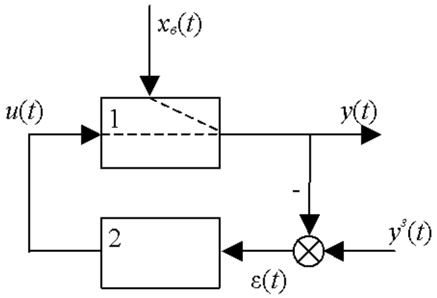


Рис. 1.1. Структурная схема системы управления с обратной связью: 1 – объект управления, 2 – управляющее устройство

Ставится задача – поддержать выходную переменную $y(t)$ на заданном значении $y^з(t)$. При появлении возмущающего воздействия $x_в(t)$ выходная переменная $y(t)$ отклоняется от заданного значения $y^з(t)$, и величина рассогласования $\varepsilon(t) = y^з(t) - y(t)$ поступает в управляющее устройство, которое по заданному алгоритму формирует управляющее воздействие $u(t)$. Преимущество принципа управления по отклонению состоит в том, что не требуется знаний величины возмущающего воздействия. К недостатку следует отнести длительность достижения заданного значения выходной переменной после подачи возмущающего воздействия.

На рис. 1.2 приведена схема реализации принципа управления по возмущению.

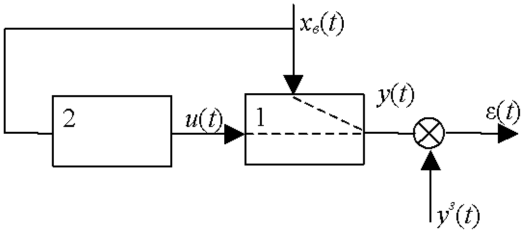
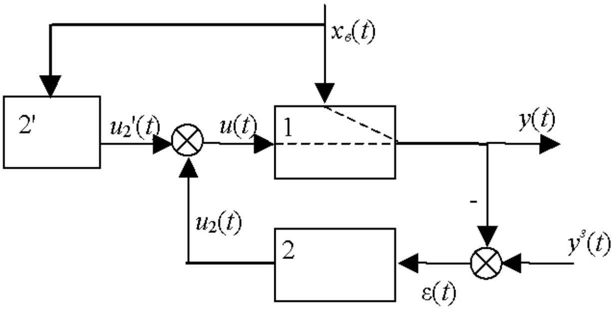


Рис. 1.2. Структурная схема инвариантной системы:
1 – объект управления, 2 – управляющее устройство

Управляющее устройство 2 здесь носит название компенсатора. При возмущении $x_в(t)$ компенсатор должен выработать такое управляющее воздействие, при котором выходная переменная $y(t)$ не отклонялась бы от своего заданного значения $y^з(t)$, т.е. чтобы обеспечивалось условие $\varepsilon(t) = y^з(t) - y(t) = 0$. В этом случае говорят, что обеспечивается инвариантность выходной переменной $y(t)$ по отношению к возмущающему воздействию $x_в(t)$. Преимущество принципа управления по возмущению состоит в том, что в идеальном случае выходная переменная не реагирует на возмущающее воздействие вообще, а в реальном случае выходная переменная выходит на установившееся значение на коротком временном интервале. К его недостатку следует отнести отсутствие возможности измерить воздействие с требуемой точностью, а в случае многомерного вектора возмущений (отсутствует возможность измерить) – некоторых из его составляющих (этого вектора). Также не всегда принципиально возможно технически реализовать закон формирования управляющего воздействия для обеспечения инвариантности. Например, это имеет место, если время чистого (транспортного) запаздывания по каналу передачи воздействия $x(t)$ на $y(t)$ меньше времени чистого запаздывания по каналу передачи воздействия $u(t)$ на $y(t)$. В этом случае требуется реализация чистого опережения.

Учитывая преимущества и недостатки обоих принципов, в тех случаях, когда имеется возможность получить информацию об основной составляющей вектора возмущающих воздействий, используют одновременно оба принципа управления, реализуя их с помощью комбинированной системы управления. На рис. 1.3 приведена схема комбинированной системы управления.

а)



б)

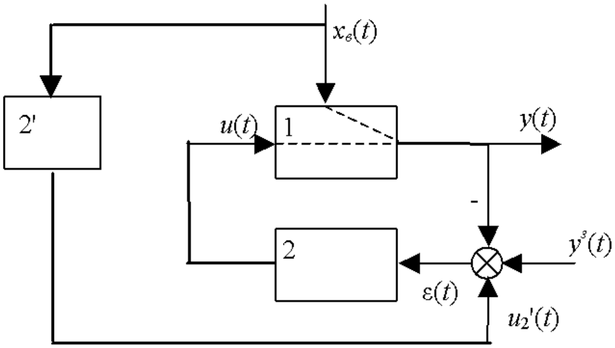


Рис. 1.3. Структурная схема комбинированной системы управления: а) выходной сигнал компенсатора $u_{2'}(t)$ алгебраически суммируется с выходным сигналом управляющего устройства $u_2(t)$; б) выходной сигнал компенсатора $u_{2'}(t)$ алгебраически суммируется с выходной регулируемой переменной $y(t)$ и ее заданным значением $y^з(t)$

Выбирается тот вариант а) или б) комбинированной системы управления, при котором проще технически реализовать компенсатор 2'.

Область применения систем управления с обратной связью, реализующих только принципы управления по отклонению, – это стабилизация выходных переменных процесса на заданном значении.

Область применения систем, реализующих принцип управления по возмущению, – это как стабилизация выходных переменных на заданном значении при возможности достижения инвариантности, так и оптимизация процесса.

Во втором случае управляющее устройство выполняет функцию оптимизатора, который по математической модели процесса вычисляет значения управляющего воздействия $u(t)$ на объект управления, при котором выходная переменная достигает наилучшего, в смысле принятого критерия, оптимального значения.

Областью применения комбинированных систем управления является как стабилизация выходной переменной $y(t)$, так и обеспечение оптимального функционирования объекта управления. Во втором случае роль компенсатора сводится к выработке такого коррекционного сигнала, поступающего на вход стабилизирующего управляющего устройства, который приводит величину задания на выходную переменную к оптимальному значению при условиях возмущающего воздействия $x(t)$.

Практически в этом случае компенсатор играет роль оптимизатора для приведения задающего воздействия к оптимальному значению в статике и для возможной компенсации основного возмущения в динамике.

В настоящее время вопросы устойчивости и качества приведенных выше систем управления (рис. 1.1–1.3) систем управления обстоятельно изложены в литературе по теории автоматического управления. Причем, что касается специфики производственных систем, обусловленной тем, что течение времени в них измеряется событиями производственного цикла, т.е. дискретно, то в теории автоматического управления развито направление теории дискретных и импульсных систем.

В настоящем пособии изложены методы оптимизации, используемые при решении задач оптимального управления, и проиллюстрировано их применение на примерах задач оптимизации применительно к экономическим системам. Следует отметить, что методы статической оптимизации имеют место как при решении задачи оптимального управления динамическими объектами численными методами, так и имеют самостоятельное назначение при решении задач оптимального управления системами, рассматриваемыми в статическом состоянии, например, представленными в виде сетей, при решении задач оптимизации производства продукции при заданных запасах сырья, при определении оптимального срока службы изделия и т.п.

Оптимизация есть процесс нахождения таких управлений или решений, при которых показатель функционирования объекта управления принимает наилучшее (минимальное или максимальное) значение.

Критерий оптимальности есть количественный показатель функционирования объекта управления.

Объект управления есть объект, в котором протекает управляемый процесс.

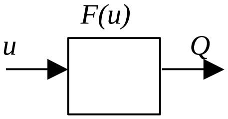
1.5. Виды критериев оптимальности

К критериям оптимальности относятся:

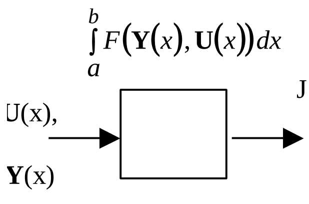
– целевая функция,

– функционал.

Целевая функция есть математический оператор $F(u)$, который числу u на входе ставит в соответствие число Q на выходе.



Функционал есть математический оператор $\int\limits_a^b \mathrm{F}(\mathbf{Y}(x), \mathbf{U}(x))dx$, который функциям $\mathbf{Y}(x)$ и $\mathbf{U}(x)$ на входе ставит в соответствие число J на выходе.



1.6. Виды объектов управления

Различают объекты с сосредоточенными и с распределенными параметрами.

Объект с сосредоточенными параметрами есть объект, в каждой точке которого в рассматриваемый момент времени характеризующие его состояние переменные принимают одни и те же значения.

Например, емкость, в которой все ингредиенты перемешаны, является объектом с сосредоточенными параметрами. В любой точке этого объекта температура, давление, состав смеси и т.п. в рассматриваемый момент времени имеют одни и те же значения.

Объект с распределенными параметрами есть объект, в направлении координатных осей которого в рассматриваемый момент времени характеризующие его состояние переменные имеют различные значения (распределены в направлении координатных осей).

В качестве примера для объекта с распределенными параметрами можно взять трубчатый теплообменник, в каждой точке которого по его длине в рассматриваемый момент времени температура имеет различные значения, т.е. имеет место температурный профиль.

1.7. Состояния объекта управления

Объект управления может находиться в двух состояниях: статическом и динамическом.

Признаком статического состояния объекта управления является постоянство во времени переменных, характеризующих состояние объекта управления, т.е. $dx_i / dt = 0$, где x_i – переменные, характеризующие состояние объекта управления. Физически статическое состояние есть состояние, при котором имеет место условие:

Приход (*энергии, вещества*) = Расход (*энергии, вещества*).

Признаком динамического состояния объекта управления является изменение во времени переменных, характеризующих состояние объекта управления, т.е. $dx_i / dt \neq 0$.

Физически динамическое состояние есть состояние, при котором имеет место условие:

Приход (*энергии, вещества*) – Расход (*энергии, вещества*) =
= Накопление или истечение (*энергии, вещества*).

Объект управления представлен на рис. 1.4.

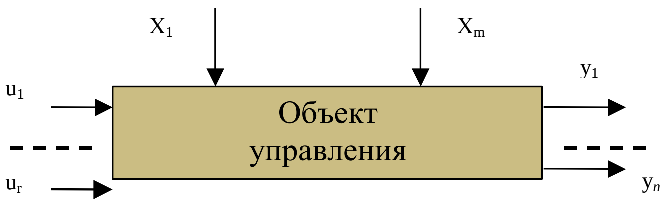


Рис. 1.4. Переменные, характеризующие объект управления

Из переменных, характеризующих объект управления, выделяют:
входные переменные:

a) возмущающие (внешние) воздействия x_k, $k = 1,2,...,m$;

b) управляющие воздействия u_j, $j = 1,2,...,r$;

выходные переменные y_i, $i = 1,2,...,n$.

Возмущающими воздействиями являются воздействия, порожденные внешней средой. На них невозможно влиять с целью приведения объекта в желаемое состояние.

Примером таких воздействий является: скорость изменения потока (расхода) сырья в технологический аппарат, изменение температуры окружающей среды, поток товаров, поступивших на рынок и т.п.

Управляющие воздействия формируются с целью приведения объекта в желаемое состояние.
Примером таких воздействий являются изменение скорости потоков энергоносителей, изменение объема инвестиций, вкладываемых в мероприятия т.п.

Выходные переменные отражают результат воздействия возмущений и управлений на объект управления.

Примером выходных переменных могут быть расход целевого (или товарного) продукта, получаемого в объекте, его состав, объем полученной денежной массы и т.п.

1.8. Связь переменных при статическом и динамическом состояниях объекта

Связь переменных при статическом состоянии объекта управления с сосредоточенными переменными представляется алгебраическими или трансцендентными выражениями

$$y_i = \varphi_i(x_1,...,x_m,u_1,...,u_r, \quad i = 1,...,n, \tag{1.1}$$

или

$$\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x},\mathbf{u}), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{y} = (y_1,...,y_n)$, $\mathbf{x} = (x_1,...,x_m)$, $\mathbf{u} = (u_1,...,u_r)$.

Связь переменных при динамическом состоянии объекта управления с сосредоточенными переменными представляется системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$dy_i(t)/dt = f_i(y_1(t),...,y_n(t),u_1(t),...,u_r(t)), \quad i = 1,...,n, \tag{1.3}$$

или

$$d\mathbf{y}(t)/dt = f(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)), \tag{1.4}$$

где

$$d\,\mathbf{y}(t)/dt=(d\,y_1(t)/dt,...,d\,y_n(t)/dt),\ \mathbf{f}=(f_1,...,f_n),$$

$$\mathbf{y}(t)=(y_1(t),...,y_n(t)),\ \ \mathbf{u}=(u_1(t),...,u_r(t))$$

Здесь y_i – переменная, характеризующая состояние объекта управления.

1.9. Выбор критериев оптимальности для задач оптимизации объектов, находящихся в статическом и динамическом состояниях

Результат функционирования объекта управления оценивается количественно в виде критерия оптимальности.

Критерий оптимальности для объектов с сосредоточенными параметрами, находящихся в статическом состоянии, есть целевая функция в виде

$$Q=Q(\mathbf{Y})\ \text{ или }\ Q=Q(\mathbf{x},\mathbf{u}), \tag{1.5}$$

а для объектов с распределенными параметрами – функционал в виде

$$Q(l)=\int_{l_0}^{l}(\partial Q(l)/\partial l)dl, \tag{1.6}$$

где l – пространственная координата.

Критерий оптимальности для объектов с сосредоточенными параметрами, находящихся в динамическом состоянии, есть функционал в виде:

$$Q(t)=\int_{t_0}^{t}(dQ(t)/dt)dt, \tag{1.7}$$

где $dQ(t)/dt=F(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))$, t – время.

1.10. Постановка задачи оптимального управления в стиле Лагранжа, Понтрягина, Беллмана (как задачи динамической оптимизации)

Заданы:

функционал, который требуется улучшить,

$$\int_{t_1}^{t}F(y_1(t),...,y_n(t),u_1(t),...,u_r(t))dt\to\min_{\mathbf{u}(t)\in\Omega}(\max); \tag{1.8}$$

граничные условия

$$y_i(t_1) = y_i^0, \quad y_i(t_k) = y_i^k, \quad i = 1,...,n; \qquad (1.9)$$

математическое описание процесса

$$dy_i / dt = f_i(y_1(t),..., y_n(t), u_1(t),..., u_r(t)), \; i = 1,..., n; \qquad (1.10)$$

ограничения на управления

$$u_j^{\min} \le u_j(t) \le u_j^{\max}, \quad j = 1,..., r, \qquad (1.11)$$

где $y_i(t),\ i = 1,..., n$, – функции состояния системы управления, $u_j(t),\ j = 1,..., r$, – функции управления; Ω – область допустимых управлений.

Требуется найти такие функции управления $u_j(t),\ j = 1,..., r$, при которых система переходит из состояния $\mathbf{y}^0$ в другое состояние $\mathbf{y}^k$, и при этом выполняются указанные выше условия (1.10) и (1.11), а критерий оптимальности принимает минимальное (максимальное) значение.

Контрольные вопросы

1. Дать определение оптимизации.
2. Как называется количественная оценка эффективности объекта управления?
3. В чем отличие целевой функции от функционала?
4. В чем отличие объекта с сосредоточенными параметрами от объекта с распределенными параметрами?
5. В каких состояниях может находиться объект управления? Каковы признаки этих состояний?
6. Какими переменными характеризуется объект управления?
7. Какими математическими выражениями описываются состояния объекта управления?
8. Что понимается под экономической системой?
9. Какими свойствами обладает экономическая система?
10. Какое определение можно дать оптимальному управлению экономической системой?
11. Какова классификация экономико-математических моделей, используемых при моделировании режимов функционирования экономических систем?
12. Моделирования какого вида имеют место при оптимизации экономических систем?
13. Какие принципы управления применимы при управлении экономическими системами?

14. В чем сущность принципа управления по возмущению? Как называются системы управления, реализующие этот принцип?

15. В чем сущность принципа управления по отклонению? Как называются системы управления, реализующие этот принцип?

16. Как называются системы управления, реализующие оба принципа одновременно?

17. Где место решения задачи оптимизации в комбинированной системе управления?

18. Как ставится задача оптимального управления в стиле Лагранжа, Понтрягина, Беллмана.

19. В какой математической форме представляется математическая модель объекта управления в постановке задачи оптимального управления?

Тема 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

К методам решения задач динамической оптимизации относятся:

– классическое вариационное исчисление;

– принцип максимума;

– динамическое программирование в непрерывной форме (уравнение Беллмана).

2.1. Классическое вариационное исчисление

2.1.1. Уравнение Эйлера для простейшего функционала

Рассматривается класс непрерывных функций $y(x)$, имеющих непрерывные первые производные (класс функций C^1). Здесь x может быть пространственной координатой (длина l, радиус R) или временем t.

Ставится задача

$$J = \int_a^b F(y(x), y'(x), x)dx \to \max_{y(x)}(\min), \tag{2.1}$$

где $y'(x) = dy(x)/dx$,

граничные условия:

$$y(a) = A, y(b) = B\ . \tag{2.2}$$

Пусть в рассматриваемом классе функций, приведенных на рис. 2.1, экстремум функционалу доставляет функция $y(x)$. Необходимые условия экстремума функционала можно получить при вариации функции $\tilde{y}(x)$ относительно функции $y(x)$ в обе стороны. Заметим, что сравниваемые функции в точках a и b имеют одно и то же значение. Функционал (2.1), в подынтегральное выражение которого входит одна функция и ее первая производная, называется простейшим функционалом.

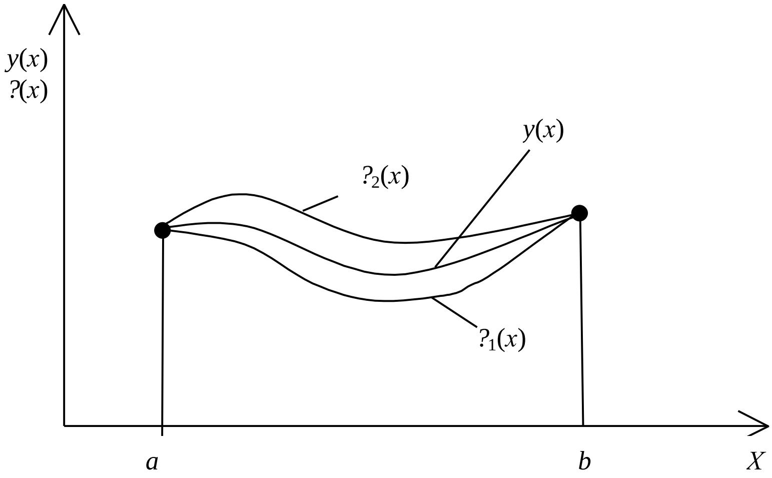


Рис. 2.1. Вариация функции

Представим процедуру вариации функции $y(x)$ однопараметрическим семейством функций $y(\alpha,x)=\alpha\tilde{y}(x)+(1-\alpha)y(x)$. Здесь полагаем, что экстремум достигается на функции $y(x)$. Используя однопараметрическое семейство функций $y(\alpha,x)$, можно записать

$$J=\int_a^b F(y(\alpha,x),y'(\alpha,x),x)\,dx. \tag{2.3}$$

Введем обозначение $\delta y(x)=\tilde{y}(x)-y(x)$, тогда $d(\delta y(x))/dx=\delta' y(x)=\tilde{y}'-y'(x)=\delta y'(x)$. Заметим, что из однопараметрического семейства функций функции, доставляющей экстремум функционалу, соответствует $\alpha=0$.

Необходимое условие экстремума функционала при однопараметрическом представлении варьируемой функции можно записать как

$$dJ/d\alpha=0, \tag{2.4}$$

или

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{F}(y(\alpha,x),y'(\alpha,x),x)\,dx\Big|_{\alpha=0}=0. \tag{2.5}$$

Раскроем подынтегральное выражение в уравнении (2.5)

$$
\begin{aligned}
&d(F(y(\alpha,x),y'(\alpha,x),x)/d\alpha = \\
&= \partial(F(y(\alpha,x),y'(\alpha,x),x)/\partial y\cdot d(y(\alpha,x))/d\alpha + . \\
&+ \partial(F(y(\alpha,x),y'(\alpha,x),x)/\partial y'\cdot d(y'(\alpha,x))/d\alpha
\end{aligned}
\qquad (2.6)
$$

Введем обозначения: $F_y = \partial F/\partial y$, $F_{y'} = \partial F/\partial y'$. Из (2.6), с учетом введенных обозначений и выражения однопараметрического семейства функций, получим

$$
\begin{aligned}
&\partial(F(y(\alpha,x),y'(\alpha,x),x)/\partial\alpha = \\
&= F_y(y(\alpha,x),y'(\alpha,x),x)(\tilde{y}(x)-y(x)) + \\
&+ F_{y'}(y(\alpha,x),y'(\alpha,x),x)(\tilde{y}'(x)-y'(x)) = \\
&= F_y(y(\alpha,x),y'(\alpha,x),x)\delta y(x) + \\
&+ F_{y'}(y(\alpha,x),y'(\alpha,x),x)\delta' y(x))
\end{aligned}
\qquad (2.7)
$$

Подставим (2.7) в функционал

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b (F_y(y(\alpha,x),y'(\alpha,x),x)\delta y(x) + \\
&+ F_{y'}(y(\alpha,x),y'(\alpha,x),x)\delta' y(x))dx = 0
\end{aligned}
\qquad (2.8)
$$

Из (2.8) выделим вторую составляющую

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b F_{y'}(y(x),y'(x),x)\delta' y(x)dx = \\
&= \int_a^b F_{y'}(y(x),y'(x),x)d(\delta y(x))
\end{aligned}
\qquad (2.9)
$$

и возьмем интеграл (2.9) по частям

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b F_{y'}(y(x),y'(x),x)d(\delta y(x)) = \\
&= F_{y'}(y(x),y'(x),x)\delta y(x)\Big|_a^b - \int_a^b \delta y(x)dFy'(y(x),y'(x)x) = \\
&= F_{y'}(y(x),y'(x),x)\delta y(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{dFy'(y(x),y'(x)x)}{dx}\delta y(x)dx
\end{aligned}
\qquad (2.10)
$$

Учитывая тот факт, что сравниваемые функции имеют одинаковые значения в граничных точках, т.е. $\delta(y(a)) = \delta(y(b)) = 0$, имеем $F_{y'}(y(x),y'(x),x)\delta y(x)\Big|_a^b = 0$.

Оставшуюся часть $-\int_a^b \frac{dFy'(y(x),y'(x),x)}{dx}\delta y(x)dx$ подставим в функционал (2.8) и получим

$$\int_a^b (F_y(y(x),y'(x),x)\,\delta y(x) - \\ -\frac{d}{dx}F_{y'}(y(x),y'(x),x)\,\delta y(x))\,dx = 0 \qquad (2.11)$$

Приведем подобные члены в (2.11)

$$\int_a^b (F_y(y(x),y'(x),x) - \frac{d}{dx}F_{y'}(y(x),y'(x),x))\,\delta y(x)\,dx = 0\,. \qquad (2.12)$$

В соответствии с леммой вариационного исчисления: если имеет место

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} H(y(x),y'(x),x)\,h(x)\,dx = 0\,, \qquad (2.13)$$

где $H(y(x),y'(x),x)$ – непрерывная функция, а $h(x)$ – непрерывная функция, на концах интервала обращающаяся в нуль, то

$$H(y(x),y'(x),x) \equiv 0\,. \qquad (2.14)$$

Имеем аналогию $F_y(y(x),y'(x),x) - \frac{d}{dx}F_{y'}(y(x),y'(x),x)$ из (2.12) с $H(y(x),y'(x),x)$ из (2.13) и $\delta y(x)$ из (2.12) с $h(x)$ из (2.13). Следовательно, можно записать

$$F_y(y(x),y'(x),x) - \frac{d}{dx}F_{y'}(y(x),y'(x),x) = 0\,. \qquad (2.15)$$

Полученное уравнение называется уравнением Эйлера для простейшего функционала. Уравнение Эйлера является лишь необходимым условием экстремума функционала. Решение уравнения Эйлера носит название экстремали. Т.е. в общем случае экстремаль может не доставлять экстремум функционалу. Однако, если она доставляет функционалу экстремум, то можно определить, какому значению функционала (минимальному или максимальному) соответствует экстремум. С этой целью используют условия Лежандра:

Если $J \to \max\limits_{y(x)}$, то

$$F_{y'y'}(y(x),y'(x),x) \le 0. \qquad (2.16)$$

Если $J \to \min\limits_{y(x)}$, то

$$F_{y'y'}(y(x), y'(x), x) \geq 0. \tag{2.17}$$

Уравнения Эйлера для простейшего функционала есть дифференциальное уравнение второго порядка. Покажем это, записав уравнение (2.15) в развернутом виде:

$$\begin{aligned} &F_y(y(x), y'(x), x) - \frac{\partial F_{y'}(y(x), y'(x), x)}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} - \\ &\frac{\partial F_{y'}(y(x), y'(x), x)}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_{y'}(y(x), y'(x), x)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

С учетом принятых обозначений уравнение (2.18) принимает вид

$$\begin{aligned} &F_y(y(x), y'(x), x) - F_{y'y'}y''(x) - F_{y'y}(y(x), y'(x), x)y'(x) + \\ &+ F_{y'x}(y(x), y'(x), x) = 0 \end{aligned}. \tag{2.19}$$

При решении дифференциального уравнения (2.19) используют граничные условия (2.2). Общий вид решения дифференциального уравнения

$$y = y(x, C_1, C_2) \tag{2.20}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находят из условий

$$\begin{aligned} &y(a, C_1, C_2) = A, \\ &y(b, C_1, C_2) = B \end{aligned} \tag{2.21}$$

Пример. Найти экстремаль функционала:

$$J[y(x), y'(x), x)] = \int\limits_0^1 [(y'(x))^2 + 12xy]dx,$$

$$y(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y(y(x), y'(x), x) - \frac{d}{dx}F_{y'}(y(x), y'(x), x) = 0,$$

$$F_y = 12x, \qquad F_{y'} = 2y'(x), \qquad \frac{d(F_{y'})}{dx} = 2y''.$$

Далее $12x-2y''(x)=0$, $y''(x)=6x$

$$y'(x)=\int 6x\,dx+C_1=3x^2+C_1,$$

$$y(x)=\int (3x^2+C_1)\,dx=x^3+C_1x+C_2.$$

Найдем постоянные интегрирования, используя граничные условия:

$$y(0)=0+C_1\cdot 0+C_2=0, \qquad C_2=0,$$

$$y(1)=12++C_1\cdot 1+0=1, \qquad C_1=0.$$

Экстремаль: $y=x^3$.

Условия Лежандра: $F_{y'y'}=\dfrac{d}{dy'}F_{y'}=\dfrac{d}{dy'}(2y')=2>0.$

Следовательно, на функции $y=x^3$ функционал имеет минимум.

2.1.2. Необходимое условие экстремума функционала, зависящего от *n*-функций и от их первых производных

Рассматривается функционал вида:

$$\int_a^b F(y_1(x),...,y_n(x),y_1'(x),...,y_n'(x),x)dx \to \max_{y(x)}(\min) \qquad (2.22)$$

с граничными условиями:

$$y_i(a)=A_i,$$
$$y_i(b)=B_i,\ i=1,...,n$$

Необходимые условия экстремума функционала в этом случае представляют собой систему уравнений Эйлера:

$$F_{y_i}(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),x)-\frac{d}{dx}F_{y_i'}(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),x)=0, \quad i=1,...,n, \qquad (2.23)$$

где

$$\mathbf{y}(x)=(y_1(x),...,y_n(x)),$$
$$\mathbf{y}'(x)=(y_1'(x),...,y_n'(x)),$$

и условия Лежандра:

если $J\to\max\limits_{y(x)}$, то $F_{y_1'y_1'}(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),x)\le 0$,

$$\begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{vmatrix}\le 0,...,\begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'}\cdots F_{y_1'y_n'} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{y_n'y_1'}\cdots F_{y_n'y_n'} \end{vmatrix}\le 0; \qquad (2.24)$$

если $J \to \min\limits_{y(x)}$, то $F_{y_1' y_1'}(\mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), x) \ge 0$,

$$\begin{vmatrix} F_{y_1' y_1'}, F_{y_1' y_2'} \\ F_{y_2' y_1'}, F_{y_2' y_2'} \end{vmatrix} \ge 0, \ldots, \begin{vmatrix} F_{y_1' y_1'} \cdots F_{y_1' y'_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{y_n' y_1'} \ldots F_{y_n' y_n'} \end{vmatrix} \ge 0\,. \tag{2.25}$$

2.1.3. Необходимое условие экстремума функционала, зависящего от функции и от ее *n* производных

Рассматривается функционал

$$J = \int_a^b F(y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x), x)dx \to \max_{y(x)}(\min) \tag{2.26}$$

с граничными условиями:

$$\begin{array}{ll} y(a) = A_1, & y(b) = B_1; \\ y'(a) = A_2, & y'(b) = B_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ y^{(n-1)}(a) = A_n, & y^{(n-1)}(b) = B_n \end{array}.$$

В этом случае необходимое условие экстремума функционала представляется в виде уравнения Эйлера-Пуассона:

$$\begin{gathered} F_y(y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x), x) + \\ + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F_{y^k}(y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x), x) = 0 \end{gathered}. \tag{2.27}$$

и условий Лежандра:

если $J \to \max\limits_{y(x)}$, то

$$F_{y^{(n)} y^{(n)}} \le 0\,, \tag{2.28}$$

если $J \to \min\limits_{y(x)}$, то

$$F_{y^{(n)} y^{(n)}} \ge 0\,. \tag{2.29}$$

2.1.4. Необходимое условие экстремума функционала, зависящего от *n* функций и от ее *m* производных для каждой из *n* функций

Рассматривается функционал

$$J=\int_a^b F(y_1(x),...,y_n(x),y_1'(x),...,y_n'(x),...,y_1^{(m)}(x),...,y_n^{(m)}(x),x)dx \qquad (2.30)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned}
&y_1(a)=A_{1,0},\quad y_1(b)=B_{1,0},...,\quad y_n(a)=A_{n,0},\quad y_n(b)=B_{n,0},\\
&y_1'(a)=A_{1,1},\quad y_1'(b)=B_{1,1},...,\quad y_n'(a)=A_{n,1},\quad y_n'(b)=B_{n,1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2.31)\\
&y_1^{(k)}(a)=A_{1,k},\quad y_1^{(k)}(b)=B_{1,k},...,\quad y_n^{(k)}(a)=A_{n,k},\quad y_n^{(k)}(b)=B_{n,k},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_1^{(m-1)}(a)=A_{1,m-1},\ y_1^{(m-1)}(b)=B_{1,m-1},...,y_n^{(m-1)}(a)=A_{n,m-1},\ y_n^{(m-1)}(b)=B_{n,m-1}.
\end{aligned}$$

В этом случае необходимое условие экстремума функционала представляет собой систему уравнений Эйлера-Пуассона с соответствующими условиями Лежандра.

Система уравнений Эйлера-Пуассона имеет вид:

$$\begin{aligned}
&F_{y_i}(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),...,\mathbf{y}^{(m)}(x),x)+ \qquad\qquad i=1,...,n,\\
&+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}F_{y_i^k}(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),...,\mathbf{y}^{(m)}(x),x)=0,
\end{aligned} \qquad (2.32)$$

где $\mathbf{y}(x)=(y_1(x),...,y_n(x))$.

2.1.5. Решение вариационных задач при наличии интегральных (изопериметрических), голономных и неголономных связей

Рассматривается функционал

$$J=\int_a^b F(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),x)dx \to \max_{\mathbf{y}(x)}(\min) \qquad (2.33)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
&y_i(a)=A_i,\\
&y_i(b)=B_i,\quad i=1,...,n
\end{aligned}, \qquad (2.34)$$

при наличии одного из видов связи:

интегральная связь

$$\int_a^b G_j(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),x))dx = l_j,\ j=1,...,m\ ; \tag{2.35}$$

голономная связь

$$\varphi_j(\mathbf{y}(x),x)=0, \quad j=1,...,m\ ; \tag{2.36}$$

неголономная связь

$$\varphi_j(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),x)=0, \quad j=1,...,m\ . \tag{2.37}$$

Заметим, что голономная связь не содержит производных, а в неголономной связи наряду с функциями входят также производные этих функций.

2.1.5.1. Решение вариационных задач при наличии интегральных связей

При наличии интегральных связей составляется новое подынтегральное выражение вида:

$$\begin{aligned}&\overline{F}(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),\boldsymbol{\lambda},x)=F(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),x)+\\&+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j G_j(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),x),\end{aligned} \tag{2.38}$$

где λ_j, $j=1,...,m$, есть числа.

Необходимое условие экстремума функционала

$$\overline{F}_{y_i}(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),\boldsymbol{\lambda},x)-\frac{d}{dx}\overline{F}_{y_i'}(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),x)=0,\ i=1,...,n\ . \tag{2.39}$$

Эти уравнения решаются совместно с уравнениями интегральных связей (2.35) при использовании граничных условий (2.34).

2.1.5.2. Решение вариационных задач при наличии голономных и неголономных связей

При наличии голономных и неголономных связей составляется новое подынтегральное выражение вида

$$\begin{aligned}&\overline{F}(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),\boldsymbol{\lambda}(x),x)=F(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),x)+\\&+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(x)\varphi_j(\mathbf{y}(x),x)\end{aligned}\ , \tag{2.40}$$

или

$$\overline{F}(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),\boldsymbol{\lambda}(x),x)=F(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),x)+ \\ +\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(x)\varphi_j(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),x), \tag{2.41}$$

где λ_j, $j=1,...,m$, есть функции.

Необходимое условие экстремума функционала в этом случае представляет собой систему уравнений вида

$$\overline{F}_{y_i}(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),\boldsymbol{\lambda},x)-d\overline{F}_{y_i'}(\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),x)/dx=0,\ i=1,...,n. \tag{2.42}$$

Эти уравнения решаются совместно с уравнениями соответственно голономных (2.36) и неголономных (2.37) связей при использовании граничных условий (2.34).

Пример. Найти экстремали для функционала:

$$J(y'(x),z'(x))=\int_0^1(1+(y'(x))^2+(z'(x))^2)dx,$$

$$y(0)=0,\quad z(0)=0;\quad y(1)=3,\quad z(1)=1;\quad y=z(x)+2x^3.$$

Запишем уравнение связи в виде

$$\varphi(y(x),z(x),x)=y(x)-z(x)-2x^3=0.$$

Сформируем новое подынтегральное выражение

$$\overline{F}(y(x),y'(x),z(x),z'(x),x)=1+(y'(x))^2+ \\ +(z'(x))^2+\lambda(x)(y(x)-z(x)-2x^3)$$

Уравнения Эйлера в этом случае имеют вид:

$$\overline{F}_y-d(\overline{F}_{y'})/dx=0,\qquad \overline{F}_z-d(\overline{F}_{z'})/dx=0.$$

В развернутом виде имеем:

$$\begin{aligned}\lambda(x)-d(2y'(x))/dx=0,\\ -\lambda(x)-d(2z'(x))/dx=0\end{aligned}.$$

Решим эти уравнения совместно с условием связи

$$y(x)-z(x)-2x^3=0$$

$$2y''(x)=\lambda(x),$$

$$2z''(x)=-\lambda(x)$$

или

$$y''(x) = \lambda(x)/2\,,$$
$$z''(x) = -\lambda(x)/2$$

Возьмем вторую производную от условия связи

$$y''(x) - z''(x) - 12x = 0$$

и подставим в полученное выражение $y''(x)$ и $z''(x)$:

$$\lambda(x)/2 + \lambda(x)/2 - 12x = 0, \qquad \lambda(x) = 12x\,.$$

Теперь:

$$y''(x) = 6x; \quad y'(x) = \int 6x dx + C_1 = 3x^2 + C_1,$$
$$y(x) = \int (3x^2 + C_1) dx + C_2 = x^3 + C_1 x + C_2;$$
$$z''(x) = -6x; \quad z'(x) = -\int 6x dx + C_3 = -3x^2 + C_3,$$
$$z(x) = \int (-3x^2 + C_3) dx + C_4 = -x^3 + C_3 x + C_4$$

Найдем $C_1 - C_4$, используя граничные условия:

$$y(0) = 0 = 0 + C_1 \cdot 0 + C_2,\ C_2 = 0;$$
$$y(1) = 3 = 1^3 + C_1 \cdot 1 + C_2,\ C_1 = 2;$$
$$z(0) = 0 = 0 + C_3 \cdot 0 + C_4,\ C_4 = 0;$$
$$z(1) = 1 = -1^3 + C_3 \cdot 1 + C_4,\ C_3 = 2$$

Окончательно имеем

$$y(x) = x^3 + 2x, \quad z(x) = -x^3 + 2x\,.$$

2.1.6. Решение задачи оптимального управления классическим вариационным исчислением

Решается задача:

$$J = \int_0^t F(\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(t), t) dt \to \max_{\mathbf{u}(t)}(\min)\,, \tag{2.43}$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^0, \quad \mathbf{y}(t_k) = \mathbf{y}^k\,, \tag{2.44}$$

$$dy_i / dt = f_i(\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(t), t), \quad i = 1,...,n\,, \tag{2.45}$$

где $\mathbf{y}(t) = (y_1(t),..., y_n(t)), \quad \mathbf{u}(t) = (u_1(t),..., u_r(t))$.

Эта задача является вариационной задачей с неголономными связями.

Сформируем новое подынтегральное выражение, соответствующее неголономной связи (2.45)

$$\begin{gathered}\overline{F}(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(t))=F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t)+\\+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)(dy_i/dt-f_i(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t))\end{gathered}. \tag{2.46}$$

Для функционала с подынтегральным выражением (2.46) необходимые условия экстремума по функциям y_k, $k=1,...,n$ имеют вид:

$$\overline{F}_{y_k}(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(t))-d\overline{F}_{y_k}(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(t))/dt=0,\ k=1,...,n. \tag{2.47}$$

Для функционала с подынтегральным выражением (2.46) по функциям u_j, $j=1,...,r$ необходимые условия экстремума имеют вид:

$$\overline{F}_{u_j}(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(t))-d\overline{F}_{u_j}(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(t))/dt=0,\ j=1,...,r. \tag{2.48}$$

Запишем необходимые условия экстремума функционала с подынтегральным выражением (2.46) в развернутом виде:

$$\begin{gathered}\partial F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t)/\partial y_k-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\partial f_i(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t)/\partial y_k-\\-d(\lambda_k(t))/dt=0,\quad k=1,...,n\end{gathered} \tag{2.49}$$

$$\partial F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t)/\partial u_j-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\partial f_i(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t)/\partial u_j=0,\ j=1,...,r. \tag{2.50}$$

Обозначим $-1=\Psi_0$, $\lambda_i(t)=\Psi_i(t)$.

Теперь необходимые условия экстремума в развернутом виде есть:

$$\begin{gathered}d(\psi_k(t))/dt=-\psi_0\partial(F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t))/\partial y_k-\\-\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)(\partial f_i(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t))/\partial y_k\end{gathered} \tag{2.51}$$

$$\begin{gathered}\psi_0\partial(F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t))/\partial u_j+\\+\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)(\partial f_i(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t))/\partial u_j=0\end{gathered} \tag{2.52}$$

Контрольные вопросы

1. С каким классом функций оперирует вариационное исчисление?

2. Какое условие реализует уравнение Эйлера для простейшего функционала?

3. Привести уравнение Эйлера для простейшего функционала.

4. Показать, что уравнение Эйлера для простейшего функционала является дифференциальным уравнением второго порядка.

5. С какой целью используют условия Лежандра? Каково их содержание для простейшего функционала?

6. Что представляет собой необходимое условие экстремума функционала, зависящего от n функций и их первых производных?

7. Какова форма условий Лежандра для функционала, зависящего от n функций и их первых производных?

8. Что представляет собой необходимое условие экстремума функционала, зависящего от функции и от ее m производных?

9. Какова форма условий Лежандра для функционала, зависящего от функции и ее m производных?

10. Что представляет собой необходимое условие экстремума функционала, зависящего от n функций и m производных от каждой из этих функций?

11. Как решается вариационная задача при наличии интегральных связей?

12. Как решается вариационная задача при наличии голономных и неголономных связей?

13. Как классифицируется задача оптимального управления при применении вариационного исчисления?

14. Записать уравнение Эйлера по переменным состояния $y_i(t)$ в задаче оптимального управления.

15. Записать уравнение Эйлера по функциям управления $u_i(t)$ в задаче оптимального управления.

2.2. Принцип максимума

Решается задача

$$J = \int_0^t F(\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(t), t)dt \to \min_{\mathbf{u}(t)} . \qquad (2.53)$$

Математическое описание процесса

$$dy_i / dt = f_i(\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(t), t), \quad i = 1, ..., n . \qquad (2.54)$$

Граничные условия

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^0, \qquad \mathbf{y}(t_k) = \mathbf{y}^k . \qquad (2.55)$$

Ограничения на управления

$$u_j^{\min} \le u_j \le u_j^{\max}, \quad j = 1,\dots,r. \tag{2.56}$$

При применении принципа максимума решение может достигаться как в классе непрерывных функций, так и в классе разрывных функций с конечными разрывами. Это отличает принцип максимума от классического вариационного исчисления.

При доказательстве необходимых условий минимума функционала в принципе максимума используется игольчатая вариация функции управления, представленная на рис. 2.2.

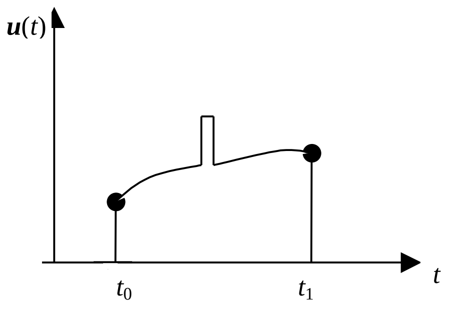


Рис 2.2. Игольчатая функция

2.2.1. Содержание принципа максимума

Формируется функция Гамильтона

$$\begin{aligned} H(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\psi}(t)) &= \psi_0 F_0(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) f_i(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t), \end{aligned} \tag{2.57}$$

где ψ_i, $i = 0,1,\dots,n$ подчиняются условиям:

$$d\psi_i / dt = -\partial H(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\psi}(t)) / \partial y_i, \quad i = 0,\dots,n. \tag{2.58}$$

Математическое описание процесса можно выразить через функцию $H(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\psi}(t))$ в виде

$$dy_i / dt = \partial H(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\psi}(t)) / \partial \psi_i, \quad i = 0,\dots,n. \tag{2.59}$$

Система дифференциальных уравнений (2.58) и (2.59) носит название системы сопряженных уравнений.

Представим критерий оптимальности в виде

$$y_0(t) = \int_0^t F(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t)dt. \qquad (2.60)$$

Заметим, что $y_0(0) = 0$, а $dy_0(t)/dt = F(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t)$.

Формулировка принципа максимума: Пусть найдены оптимальные уравнения, минимизирующие функционал (2.53). В этом случае система сопряженных уравнений (2.58) и (2.59) имеет ненулевое решение, при этом выполняются следующие условия:

1. Функция $H(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t))$ принимает максимальное значение, т.е.

$$H^* = \max_{\mathbf{u}(t)} H(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t)). \qquad (2.61)$$

$$2.\ \ \mathrm{H}^*(t) = \mathrm{const}. \qquad (2.62)$$

$$3.\ \ \psi_0 = \mathrm{const} \le 0. \qquad (2.63)$$

2.2.2. Общий алгоритм решения задачи оптимального управления с использованием принципа максимума

1. Максимизируется функция $H(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t))$ по управлениям $\mathbf{u}(t)$. При этом получают функции управления в виде

$$u_j^* = u_j^*(\mathbf{y}(t), \boldsymbol{\psi}(t)), \quad j = 1, ..., r. \qquad (2.64)$$

2. Функции (2.64) подставляют в систему сопряженных уравнений (2.58) и (2.59).

Заметим, что для получения их решения нужно иметь $2n+2$ постоянных интегрирования, определяемых при использовании $2n+2$ граничных условий. Из постановки задачи оптимального управления следуют $2n$ граничных условий и одно граничное условие для функции y_0. Нужно иметь еще одно граничное условие.

При максимизации функции $H(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t))$ по $\mathbf{u}(t)$ в силу линейности функции H относительно $\psi_i, i = 0,1,...,n$ одна из функций $\psi_i(\mathrm{t})$ может быть представлена с точностью до постоянной интегрирования. Учитывая второе условие принципа максимума, можно принять само значение функции ψ_0 неположительной константой (принимается $\psi_0 = -1$).

3. Теперь решение системы сопряженных уравнений может быть найдено:

$$y_i = y_i(t)\,, \tag{2.65}$$

$$\psi_i = \psi_i(\mathrm{t}),\ i = 0,1,\ldots,n\,. \tag{2.66}$$

4. Подставляются функции (2.65) и (2.66) в (2.64), и получаются оптимальные функции управления в виде $u_j^* = u_j^*(t)$.

Эти функции управления можно получать в виде функций от переменных состояния $y_i(t),\ i = 0,1,\ldots,n$, т.е. как $u_j^* = u_j^*(y_1(t),\ldots,y_n(t))$.

В этом случае задача оптимального управления называется задачей синтеза оптимального управления.

Запишем в развернутом виде систему уравнений (2.58) и необходимое условие максимума $\partial H(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\psi}(t))/\partial u_j = 0,\ j = 1,\ldots,r$, функции $H(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\psi}(t))$:

$$\begin{aligned} &d\psi_i / dt = -\psi_0 \partial(F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t))/\partial y_i - \\ &-\sum_{k=1}^{n} \psi_k(t)\partial(f_k(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t))/\partial y_i, \quad i = 1,\ldots,n \end{aligned}, \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned} &\partial(H(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t))/\partial u_j = \psi_0\partial(F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t))/\partial u_j + \\ &+\sum_{k=1}^{n}\psi_k(t)\partial(f_k(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t))/\partial u_j = 0, \quad j = 1,\ldots,r \end{aligned}. \tag{2.68}$$

Заметим, что выражение для производных (2.67) соответствует уравнениям Эйлера (2.51), записанным для функций $y_k(t),\ k = 1,\ldots,n$, а условие (2.68) соответствует уравнениям Эйлера (2.52), записанным для функций $u_j(t),\ j = 1,\ldots,r$, в классическом вариационном исчислении при решении задачи оптимального управления.

2.2.3. Пример решения задачи оптимального управления с использованием принципа максимума

Пример. Найти управление $u(t)$, при котором функционал

$$J(y(t),u(t) = 1/2\int_0^t (y(t))^2 + (u(t))^2)dt\,,$$

$$y(0) = 1\,, \qquad y(t_k) = 2\,,$$

принимает минимальное значение.

Уравнение динамики объекта $dy(t)/dt = ay(t) + u(t)$.

Пусть на управление не наложено ограничений.

Введем $dy_0/dt = (y^2(t) + u^2(t))/2, \quad y_0(0) = 0$.

Составим функцию Гамильтона

$$H(y(t), u(t), \psi(t)) = \psi_0 f_0(y(t), u(t)) + \psi(t) f(y(t), u(t)).$$

В развернутом виде

$$H(y(t), u(t), \psi(t)) = \psi_0 (y^2(t) + u^2(t))/2 + \psi(t)(-ay_1(t) + u(t)).$$

Примем $\psi_0 = -1$. Сопряженное уравнение

$$d\psi/dt = -\partial H(y(t), u(t), \psi(t))/\partial y(t) = -y(t) + a\psi(t).$$

Максимизируем функцию $H(y(t), u(t), \psi(t))$. Необходимым условием ее экстремума является $\partial H(y(t), u(t), \psi(t))/\partial u(\mathrm{t}) = 0$, откуда $u(t) - \psi(t) = 0$, т. е. $u(t) = \psi(t)$.

Подставим $u(t)$ в систему сопряженных уравнений:

$$dy(t)/dt = ay(t) + \psi(t),$$

$$d\psi(t)/dt = -y(t) + a\psi(t).$$

Решение этих двух уравнений с использованием граничных условий дает $y = y(t)$, $\psi = \psi(t)$.

2.2.4. Численное решение задачи оптимального управления с использованием принципа максимума

В тех случаях, когда система сопряженных уравнений не может быть решена аналитически или аналитическое решение получить трудно, она решается численно. Принимается, что

$$dy_i(t)/dt\big|_{t=k\Delta t} \approx (y_i((k+1)\Delta t) - y_i(k\Delta t))/\Delta t, \tag{2.69}$$

$$d\psi_i(t)/dt\big|_{t=k\Delta t} \approx (\psi_i((k+1)\Delta t) - \psi_i(k\Delta t))/\Delta t. \tag{2.70}$$

Тогда для системы уравнений:

$$dy_i(t)/dt\big|_{t=k\Delta t} = \partial H(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(\mathbf{t}))/\partial\psi_i\big|_{t=k\Delta t}, \; i,k = 0,1,\ldots,n$$

в соответствии с (2.69) имеем:

$$\begin{gathered}\frac{y_i((k+1)\Delta t) - y_i(k\Delta t)}{\Delta t} = \\ = \partial H(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t))/\partial\psi_i\big|_{t=k\Delta t}, \; i,k = 0,1,\ldots,n\end{gathered} \tag{2.71}$$

Откуда

$$\begin{aligned} &y_i((k+1)\Delta t) = y_i(k\Delta t) + \\ &+ \Delta t \cdot \partial H(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t)) / \partial \psi_i \big|_{t=k\Delta t}, \ i, k = 0,1,\dots,n \end{aligned} . \qquad (2.72)$$

Для системы уравнений

$$d\psi_i(t)/dt\big|_{t=k\Delta t} = -\partial H(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t)/\partial y_i, \ i, k = 1,\dots,\mathrm{n}$$

в соответствии с (2.70) имеем

$$\begin{aligned} &\frac{(\psi_i((k+1)\Delta t) - \psi_i(k\Delta t))}{\Delta t} = - \\ &- \partial H(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t)/\partial y_i\big|_{t=k\Delta t}, \ \ i, k = 0,1,\dots,n \end{aligned} \qquad (2.73)$$

Откуда

$$\begin{aligned} &\psi_i((k+1)\Delta t) = \psi_i(k\Delta t) - \\ &- \Delta t \cdot \partial H(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t)) / \partial y_i \big|_{t=k\Delta t}, \ i, k = 0,1,\dots,n \end{aligned} \qquad (2.74)$$

Алгоритм решения задачи оптимального управления численным методом с использованием принципа максимума

1. Произвольно задаются $\psi_i(0), i = 0,1,\dots,n$ и полагается $\psi_0 = -1$.

2. Из граничных условий выбираются $y_i(0), i = 0,1,\dots,n$.

3. Подставляются выбранные $\psi_0, \psi_i(0), y_i(0), i = 0,1,\dots,n$ в функцию (2.57), т.е. $H(\mathbf{y}(0), \boldsymbol{\psi}(0), \mathbf{u}(t))$, и (2.57) максимизируется. При этом получают $\mathbf{u}(0) = (u_1(0),\dots,u_r(0))$.

4. Вычисляют $y_i(\Delta t), \psi_i(\Delta t), i = 1,\dots,n$, т.е. $y_i(\Delta t)$ и $\psi_i(\Delta t)$ при $k = 1$ по уравнениям (2.72) и (2.73).

5. Найденные значения $y_i(k\Delta t)$ и $\psi_i(k\Delta t)$, $i = 1,\dots,n$ подставляют в функцию (2.57) и ее максимизируют.

При этом получают $\mathbf{u}(k\Delta t) = (u_1(k\Delta t),\dots,u_r(k\Delta t))$ при $k = 1$. Пункты 4 и 5 выполняются до $k = N$, где N соответствует условию $N\Delta t = tk$.

6. Проверяют выполнение условий:

$$\left| y_i(t_k) - y_i^p(N\Delta t) \right| \le \delta_i, \ i = 1,\dots,n, \qquad (2.75)$$

или

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i(t_k) - y_i^p(N\Delta t))^2 \le \Delta, \qquad (2.76)$$

где y_i^p – рассчитанное значение y_i, а δ_i и Δ – требуемая точность вычислений. Если условия пункта 6 не выполняются, то задаются новые значения $\mathbf{\Psi}(0) = (\psi_1(0),...,\psi_n(0))$ и происходит переход к пункту 2 для последовательного выполнения всех пунктов алгоритма.

2.2.5. Особенности решения задач на максимальное быстродействие

В задаче на максимальное быстродействие функционал имеет вид:

$$J = \int_0^t dt, \qquad (2.77)$$

т.е. подынтегральное выражение $F(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t) = 1$.

При этом функция Гамильтона (2.57) принимает вид

$$H(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \psi(t)) = \psi_0 + \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) f_k(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t), \qquad (2.78)$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \psi(t)) &= H(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \psi(t)) - \psi_0 = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) f_k(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{aligned} \qquad (2.79)$$

Функция (2.79) называется укороченной функцией Гамильтона. Решение задачи выполняется по вышеприведенному алгоритму для укороченной функции Гамильтона (2.79).

Пример решения задачи на максимальное быстродействие. **Решается задача перевода системы из состояния $y_1(0) = y_1^0$ и $y_2(0) = y_2^0$ в состояние $y_1(t_k) = y_1^k$ и $y_2(t_k) = y_2^k$ за минимальное время.**

Математическое описание процесса:

$$\begin{aligned} &dy_1(t)/dt = y_2(t), \quad f_1(y_1(t), y_2(t), u(t)) = y_1'(t) = y_2(t), \\ &dy_2(t)/dt = u(t), \quad f_2(y_1(t), y_2(t), u(t)) = y_2'(t) = u(t), \\ &-1 \le u(t) \le 1 \end{aligned}$$

Составим укороченную функцию Гамильтона

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \psi_1(t) f_1(y_1(t), y_2(t), u(t)) + \psi_2(t) f_2(y_1(t), y_2(t), u(t)) = \\ &= \psi_1(t) y_2(t) + +\psi_2(t) u(t) \end{aligned}$$

Максимизируем функцию Гамильтона. Учитывая линейность функции H относительно $u(t)$, при ограничении $-1 \le u(t) \le 1$, имеем $u^*(t) = \mathrm{Sign}(\psi_2(t))$.

Сопряженные уравнения

$$d\psi_1(t)/dt = -\partial\widetilde{H}(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\psi}(t))/\partial y_1(t) = 0,$$
$$d\psi_2(t)/dt = -\partial\widetilde{H}(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\psi}(t))/\partial y_2(t) = \psi_1(t).$$

Решение этих уравнений дает $\psi_1 = \text{const} = C_1$,

$$\psi_2(t) = \int \psi_1(t)\,dt + C_2 = C_1 t + C_2 \,.$$

Учитывая линейность функции $\psi_2(t)$, при оптимальном управлении возможно лишь одно переключение $u(t)$ либо с -1 на 1, либо с 1 на -1 (рис. 2.2).

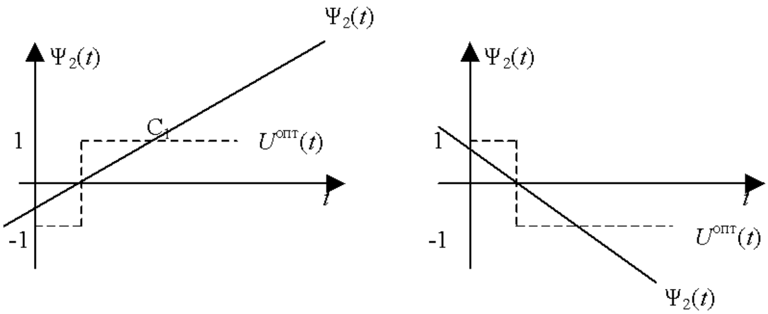


Рис. 2.3. Графики функций $\psi_2(t)$ и $U^{\text{опт}}(t)$

В соответствии с $u^*(t) = \text{Sign}(\psi_2(t))$ оптимальное управление тоже только один раз меняет знак и может переключаться со значения (-1) на (+1) или со значения (+1) на (-1).

Решение системы уравнений математического описания рассмотрим при $u = 1$ и при $u = -1$.

Пусть $u = 1$, тогда $dy_1(t)/dt = y_2(t)$, $dy_2(t)/dt = 1$.

Поделим первое уравнение на второе: $dy_1(t)/dy_2(t) = y_2(t)$, или $dy_1(t) = y_2(t)\cdot dy_2(t)$, тогда

$$y_1(t) = \int y_2(t)dy_2 + C_3 = y_2^2(t)/2 + C_3 \,.$$

Пусть $u = -1$, тогда $y_1(t) = -y_2^2(t)/2 + C_4$.

Пусть конечное состояние системы определено условиями $y_1(t_k) = 0$ и $y_2(t_k) = 0$. Тогда для $t = t_k$ и $u = 1$ имеем

$y_1(t_k) = y_2^2(t)/2 + C_3$, $C_3 = 0$, а для $u = -1$ имеем $y_1(t_k) = y_2^2(t)/2 + C_4$, $C_4 = 0$.

Траектории движения системы при различных начальных условиях приведены на рис 2.4.

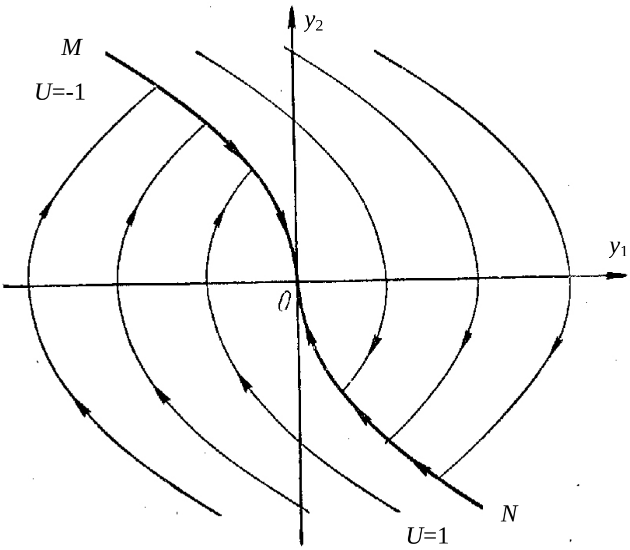


Рис. 2.4. Траектории движения системы

Следовательно, через конечную точку проходят траектории движения: при $u = 1$ будет $y_1(t_k) = y_2^2(t)/2$,

а при $u = -1$ имеем $y_1(t_k) = -y_2^2(t)/2$.

Чтобы из произвольной точки $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ попасть в конечную точку по оптимальной траектории, нужно из этой точки пойти по траектории, выводящей систему на линию переключения $y_1(t) = \mathrm{Sign}(-y_2(t)) \cdot y_2^2(t)/2$.

При достижении этой линии знак управляющего воздействия нужно сменить на противоположный.

Оптимальное управление соответствует условию

$$u^*(t) = \mathrm{Sign}(\, y_1(t) - \mathrm{Sign}(\, y_2(t)) \cdot y_2^2(t)/2).$$

2.2.6. Применение принципа максимума для решения задачи максимизации интеграла от функции полезности с использованием модели макроэкономики Солоу

Рассмотрим модель функционирования экономической системы, предложенную Солоу. Формирование фонда непроизводственного потребления показано на рис. 2.5.

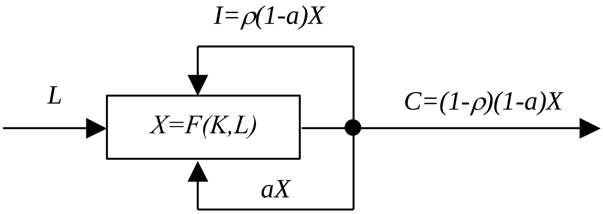


Рис. 2.5. Формирование фонда непроизводственного потребления

Здесь L – число занятых, X – валовой общественный продукт (ВОП), I – инвестиции, K – фонды, C – фонд непроизводственного потребления, ν – годовой темп прироста числа занятых, μ – доля выбывших за год основных производственных фондов, a – коэффициент прямых затрат (доля промежуточного продукта в ВОП), ρ – норма накопления (доля валовых инвестиций в ВОП).

$$-1 < \nu < 1,\ 0 < \mu < 1,\ 0 < a < 1,\ 0 < \rho < 1.$$

В каждый момент времени годовой выпуск определяется функцией $X = F(K, L)$. Эта функция является функцией Кобба-Дугласа

$$F(K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1.$$

Введем относительные показатели (на одного работника)

$$k = K / L,\ x = X / L,\ i = I / L,\ c = C / L,$$

тогда

$$x = F(K, L) / L = f(k),\ i = \rho(1 - a)x,\ c = (1 - \rho)(1 - a)x.$$

Модель Солоу имеет вид

$$dk / dt = -\lambda k + \rho(1 - a) f(k), \qquad (2.80)$$

где $\lambda = \mu + \nu$, $\rho \neq const$, $\rho = 1 - c / ((1 - a) f(k))$.

Теперь с учётом выражения ρ получаем модель Солоу в виде

$$dk/dt = -\lambda k - c + (1-a)\,f(k)\,. \tag{2.81}$$

Эта модель является моделью динамики системы.

***Постановка задачи оптимального управления*:** Максимизировать дисконтированную полезность от потребления за длительный интервал времени

$$I = \int_0^t e^{-\delta t} u(c(t))\,dt \to \max_{c(t)\in\Omega} \tag{2.82}$$

с ограничениями

$$0 < c_{\min} < c(t) \le f(k)\,, \tag{2.83}$$

где δ – параметр дисконтирования, $u(t)$ – функция полезности, удовлетворяющая условиям:

$$u > 0\,,\ du/dc > 0\,,\ d^2u/dc^2 < 0\,,$$

$$\lim_{c\to 0} du/dc = \infty\,,\ \lim_{c\to\infty} du/dc = 0\,.$$

Типовая функция полезности представлена на рис. 2.6.

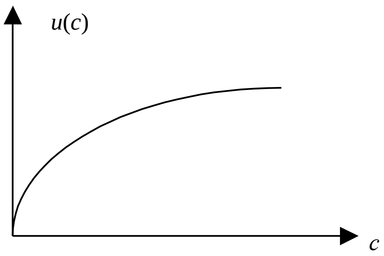


Рис. 2.6. Функция полезности

Модель динамики системы $dk/dt = -\lambda k - c(t) + (1-a)\,f(k)$.

Рассматривается решение этой задачи с использованием принципа максимума.

Алгоритм максимизации интеграла функции полезности

От задачи максимизации исходного функционала перейдём к задаче минимизации:

$$-J = -\int_0^t e^{-\delta t} u(c(t))dt \to \min_{c(t)\in\Omega}\,, \tag{2.84}$$

$$0 < c_{\min} < c(t) \leq f(k)\,, \qquad (2.85)$$

$$dk / dt = -\lambda k - c(t) + (1-a) f(k)\,. \qquad (2.86)$$

Формируется функция Гамильтона

$$H = -\psi_0 (e^{-\delta t} u(c(t)) + \psi_1(t)(-\lambda k - c(t) + (1-a) f(k)) e^{-\delta t}\,. \qquad (2.87)$$

Принимая $\psi_0 = -1$, получим

$$H = e^{-\delta t}(u(c(t))) + \psi_1(t)(-\lambda k - c + (1-a) f(k))\,. \qquad (2.88)$$

Введём обозначение $q(t) = \psi_1(t) \cdot e^{-\delta t}$.

Запишем сопряженное уравнение

$$dq / dt = -\partial H / \partial k = -(e^{-\delta t}(-\psi_1(t)\lambda + \psi_1(t)(1-a) df(k)/dk))\,. \qquad (2.89)$$

Развернем левую часть уравнения (2.89) с учётом обозначения $q(t)$

$$e^{-\delta t} d\psi_1(t)/dt + (-\delta) e^{-\delta t}\psi_1(t) = e^{-\delta t}(\psi_1(t)(\lambda - (1-a) f'(k)). \qquad (2.90)$$

Уравнение (2.90) приведем к виду

$$d\psi_1(t)/dt = (\delta + \lambda)\psi_1(t) - (1-a) f'(k)\psi_1(t)\,. \qquad (2.91)$$

Дополним уравнение (2.91) математическим описанием системы (2.86).

Далее нужно максимизировать функцию (2.88) по функции управления $c(t)$ и решить совместно уравнения (2.86) и (2.91). Учитывая нелинейность вышеприведённых уравнений, решение целесообразно выполнять численно, используя выражения:

$$\begin{aligned} &\psi_1(i\Delta t) = \psi_1((i-1)\Delta t) - \\ &- \{\psi_1(t)\big|_{t=(i-1)\Delta t}[(1-a) f'(k)\big|_{t=(i-1)\Delta t} - (\lambda + \delta)]\} \cdot \Delta t\,, \end{aligned} \qquad (2.92)$$

$$\begin{aligned} &k(i\Delta t) = k((i-1)\Delta t) + [(1-a) f(k)\big|_{t=(i-1)\Delta t} - \\ &- \lambda k\big|_{t=(i-1)\Delta t} - c\big|_{t=(i-1)\Delta t}]\Delta t \end{aligned} \qquad (2.93)$$

в приведённой ниже последовательности:

1. Задаются исходные значения функций $k(0)$ и $\psi(0)$ при $i = 1$.

2. Они подставляются в функцию Гамильтона и она максимизируется по c. При этом будет получено значение $c(0)$.

3. При $k(0)$, $c(0)$ и $\psi(0)$ по вышеприведённым формулам (2.92) и (2.93) вычисляются значения $\psi(1)$ и $k(1)$ при $i = 2$.

4. Процедуры, выполненные в пунктах 2 и 3, повторяются далее для значений $i = 3,4,5,...$

Расчёт $k(i)$ и $\psi(i)$ прекращается при достижении условия $i\Delta t = t_k$ или при достижении установившегося состояния системы по признаку $\left|(k_i - k_{i-1}) / k_i\right| \le \delta_1$, если верхний предел интеграла не задан.

5. Выполнение граничного условия $\left|k(i\Delta t) - k^{зад}(t_k)\right| \le \delta_2$ проверяется.

Если оно не выполняется, то задают новое значение $\psi(0)$, исходное (начальное) значение $k(0)$ и осуществляется переход к пункту 2.

2.2.7. Некоторые варианты постановки и решения задач оптимального управления

Ниже представлены правила использования математического аппарата принципа максимума для решения задач оптимального управления при некоторых условиях, отличных от условий рассмотренных выше.

Рассматривается управляемый процесс, описываемый системой дифференциальных уравнений

$$dy_i(t) / dt = f_i(\mathbf{Y}(t), \mathbf{u}(t)), \quad i = 1,...,n. \tag{2.94}$$

Задача 1. Требуется найти оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t)$, переводящее процесс из начального состояния, заданного неполным набором значений переменных $y_i(t^0)$

$$y_i(t^0) = y_i^0, \quad i = 1,...,n_1^0, n_1^0 < n, \tag{2.95}$$

в конечное состояние, которое также задано неполным набором значений переменных $y_i(t_k)$ за минимальное время

$$y_i(t_k) = y_i^k, \quad i = 1,...,n_1^k, n_1^k < n. \tag{2.96}$$

Схема решения. Составляется функция H

$$H[\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{Y}(t), \mathbf{u}(t)] = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) f_k(\mathbf{Y}(t), \mathbf{u}(t)) \tag{2.97}$$

и записывается система уравнений для функций $\psi_i(t)$:

$$\begin{aligned} d\psi_i / dt &= \partial H / \partial y_i = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) \partial f_k(\mathbf{Y}(t), \mathbf{u}(t)) / \partial y_i, \; i = 1,...,n \end{aligned} \tag{2.98}$$

Оптимальное управление при интегрировании систем уравнений (2.94) и (2.98) выбирается из условия

$$H[\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{Y}(t), \mathbf{u}^*(t)] = \max_{\mathbf{u}\in\Omega} H[\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{Y}(t), \mathbf{u}]. \qquad (2.99)$$

Для оптимальной траектории при этом выполняется соотношение

$$H[\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{Y}(t), \mathbf{u}^*(t)] = \text{const} \geq 0. \qquad (2.100)$$

При совместном интегрировании систем уравнений (2.94) и (2.98), в процессе которого из соотношения (2.99) находится оптимальное управление $\mathbf{u}^*$, недостающие граничные условия получаются заданием граничных значений по следующему правилу.

Если для функции $y_i(t)$, у которой условиями (2.95) и (2.96) начальное или конечное значение или оба вместе не фиксируются, то для функции $\psi_i(t)$ начальное или конечное значение или оба вместе полагаются равными нулю. При этом к системе $n_1^0 + n_1^k$ граничных условий (2.95) и (2.96) для $y_i(t)$ добавляется система $2n - n_1^0 - n_1^k$ граничных условий для функции $\psi_i(t)$:

$$\psi_i(t_0) = 0, \quad i = n_1^0 + 1, ..., n, \qquad (2.101)$$

$$\psi_i(t_k) = 0, \quad i = n_1^k + 1, ..., n. \qquad (2.102)$$

В дальнейшем при интегрировании систем уравнений (2.94) и (2.98) подбираются начальные значения для функций $y_i(t)$:

$$y_i^0, \quad i = n_1^0 + 1, ..., n, \qquad (2.103)$$

$$y_i^k, \quad i = n_1^k + 1, ..., n, \qquad (2.104)$$

чтобы обеспечить выполнение условий (2.96) и (2.102) для конечного состояния процесса.

Задача 2. Требуется найти оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t)$, переводящее процесс из заданного некоторым образом начального состояния в конечное состояние так, чтобы функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_k} F(\mathbf{Y}(t), \mathbf{u}(t))\, dt \qquad (2.105)$$

принимал минимальное значение.

Выбор начальных условий для интегрирования систем сопряженных уравнений осуществляется так же, как и в задаче 1, причем, если конечное значение независимой переменной t фиксировано, то на оптимальной траектории соблюдается условие

$$H[\psi_0, \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{Y}(t), \mathbf{u}^*(t)] = \text{const} \geq 0\,. \qquad (2.106)$$

Если же значение t_k не задано, то вместо неравенства (2.106) выполняется условие

$$H[\psi_0, \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{Y}(t), \mathbf{u}^*(t)] \equiv 0\,. \qquad (2.107)$$

Контрольные вопросы

1. Для какого класса функций применим принцип максимума?
2. Сформулировать принцип максимума.
3. Записать математическое описание объекта управления с использованием функции Гамильтона.
4. Перечислить этапы общего алгоритма решения задачи оптимального управления с использованием принципа максимума.
5. В чем сущность численного алгоритма решения задачи оптимального управления с использованием принцип максимума?
6. В чем заключается особенность задачи на максимальное быстродействие?
7. Чем отличается алгоритм решения задачи с использованием принципа максимума, если начальные и конечные условия заданы не на все переменные состояния?
8. Каково содержание модели макроэкономики Солоу и как формулируется задача оптимального управления с использованием этой модели?
9. Каким образом осуществляется переход к вспомогательной функции Гамильтона для учета дисконтирования?
10. Каким условиям должна отвечать функция полезности, используемая в задаче оптимального управления экономической системой?

2.3. Динамическое программирование в непрерывной форме. Уравнение Беллмана

Решается задача оптимального управления

$$J = \int_0^t F(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t)dt \to \min_{\mathbf{u}(t)}(\max)\,, \qquad (2.108)$$

Математическое описание процесса:

$$dy_i/dt = f_i(\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(t), t), \quad i = 1,\ldots,n\,. \qquad (2.109)$$

Граничные условия

$$\mathbf{y}(0)=\mathbf{y}^0, \qquad \mathbf{y}(t_k)=\mathbf{y}^k. \qquad (2.110)$$

Ограничения на управления

$$U_j^{\min} \le U_j(t) \le U_j^{\max}, \quad j=1,...,r. \qquad (2.111)$$

В основе динамического программирования лежит принцип оптимальности: оптимальная стратегия обладает таким свойством, что независимо от того, каким образом система пришла в это состояние, последующее решение должно быть оптимальным по отношению к этому состоянию, в которое система пришла в результате предыдущего решения. Иллюстрация к принципу оптимальности приведена на рис. 2.7. В соответствии с принципом оптимальности нужно оптимальным образом перевести систему из состояния $\mathbf{y}(\tau)$ в конечное состояние $\mathbf{y}(t^k)$ не зависимо от того, каким образом система пришла из исходного состояния $\mathbf{y}(0)$ в состояние $\mathbf{y}(\tau)$.

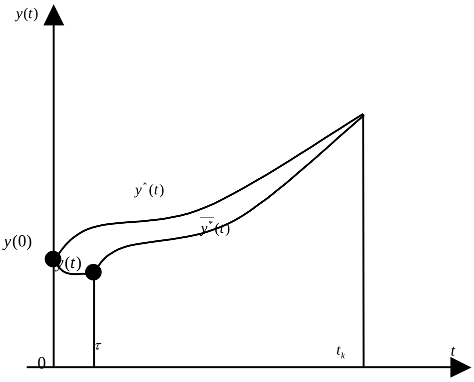


Рис. 2.7. Иллюстрация к принципу оптимальности

Математически принцип оптимальности реализуется через выражение

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{u}(t)} J = \min_{\mathbf{u}(t)}[\int_0^{\tau} F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t)dt + \\ + \min_{\mathbf{u}(t)} \int_{\tau}^{t} F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t)dt]\end{aligned}. \qquad (2.112)$$

Пусть τ – малая величина. Обозначим

$$\xi(\tau, \mathbf{y}^*(\tau)) = \min_{\mathbf{u}(t)} \int_{\tau}^{t} F(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t)dt\,, \tag{2.113}$$

$$\xi(0, \mathbf{y}^*(0)) = \min_{\mathbf{u}(t)} \int_{0}^{t} F(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t)dt\,. \tag{2.114}$$

Тогда

$$\xi(0, \mathbf{y}^*(0)) = \min_{\mathbf{u}(t)} [\int_{0}^{\tau} F(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t)dt + \xi(\tau, \mathbf{y}(\tau))]\,. \tag{2.115}$$

Разложим функцию (2.113) в ряд Тейлора относительно состояния $t = 0$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^0$ по степеням $\mathbf{y}(t)$ и t

$$\begin{aligned}\xi(\tau, \mathbf{y}(\tau)) = \xi(0, \mathbf{y}(0)) + \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i \cdot \left.\frac{\partial \xi(t, \mathbf{y}(t))}{\partial y_i}\right|_{\substack{t=0 \\ \mathbf{y}=\mathbf{y}(0)}} + \\ + \Delta t \cdot \left.\frac{\partial \xi(t, \mathbf{y}(t))}{\partial t}\right|_{\substack{t=0 \\ \mathbf{y}=\mathbf{y}(0)}}\end{aligned}\,. \tag{2.116}$$

Примем, что $\Delta t = \tau$. Заметим, что $\Delta y_i(t) = dy_i(t)dt \cdot \Delta t$, или $\Delta y_i(t) = f_i(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t) \cdot \Delta t$.

С учетом малости τ можно записать

$$\int_{0}^{\tau} F(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t)dt \approx F(\mathbf{y}(0), \mathbf{u}(t), t) \cdot \Delta t = F(\mathbf{y}(0), \mathbf{u}(t), t)\tau\,. \tag{2.117}$$

Теперь, с учетом выражений (2.115), (2.116) и (2.117), можно записать:

$$\begin{aligned}\xi(0, \mathbf{y}^*(0)) = \min_{\mathbf{u}(t)} [F(\mathbf{y}(0), \mathbf{u}(t), t)\tau + \xi(0, \mathbf{y}^*(0)) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \tau \cdot ((\partial \xi(t, \mathbf{y}(t)) / \partial y_i) \cdot f_i(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t))\Big|_{\substack{t=0 \\ \mathbf{y}=\mathbf{y}(0)}} + \\ + \tau \cdot (\partial \xi(t, \mathbf{y}(t)) / \partial t\Big|_{\substack{t=0 \\ \mathbf{y}=\mathbf{y}(0)}}\;]\end{aligned} \tag{2.118}$$

Так как $\xi(0,\mathbf{y}(0))$ не зависит от $\mathbf{u}(t)$, а τ содержится во всех составляющих правой части записанного выше уравнения, то уравнение (2.118) приводится к виду

$$\begin{aligned} &-(\partial\xi(t,\mathbf{y}(t))/\partial t\Big|_{\substack{t=0\\ \mathbf{y}=\mathbf{y}(0)}} = \min_{\mathbf{u}(t)}[F(\mathbf{y}(0),\mathbf{u}(t),t)\Big|_{\substack{t=0\\ \mathbf{y}=\mathbf{y}(0)}} + \\ &+\sum_{i=1}^{n}((\partial\xi(t,\mathbf{y}(t))/\partial y_i)\cdot f_i(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t))\Big|_{\substack{t=0\\ \mathbf{y}=\mathbf{y}(0)}}] \end{aligned}. \quad (2.119)$$

Учтем тот факт, что разложение условно оптимальной величины функционала, записанной для условного состояния в какой-то момент времени t (в приведенном случае $\mathbf{y}(\tau)$), можно разложить в ряд Тейлора относительно оптимального состояния системы в момент времени $t-\tau$ при $\mathbf{y}*(t)$, т.е.

$$\begin{aligned} &-(\partial\xi(t,\mathbf{y}(t))/\partial t = \min_{\mathbf{u}(t)}[F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t) + \\ &+\sum_{i=1}^{n}((\partial\xi(t,\mathbf{y}(t))/\partial y_i)\cdot f_i(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t))] \end{aligned} \quad (2.120)$$

Полученное уравнение называется уравнением Беллмана. Оно является уравнением в частных производных.

Решением этого уравнения являются функции $\mathbf{u}^*(t)$, доставляющие экстремум функционалу, и функции состояния системы $\mathbf{y}^*(t)$, описывающие оптимальную траекторию движения системы из исходного состояния $\mathbf{y}^0$ в конечное состояние $\mathbf{y}^k$.

2.3.1. Алгоритм решения задачи оптимального управления методом динамического программирования в непрерывной форме

Для решения уравнения Беллмана, кроме условий $\mathbf{y}(0)=\mathbf{y}^0$ и $\mathbf{y}(t_k)=\mathbf{y}^k$, нужно иметь значение функции $\xi(t,\mathbf{y}(t))$ и значения ее производных $\partial\xi(t,\mathbf{y}(t))/\partial y_i$, $i=1,...,n$, и $\partial\xi(t,\mathbf{y}(t))/\partial t$ в один из граничных моментов времени $t=t_n$ или $t=t_k$.

Заметим, что $\xi(t_k,\mathbf{y}(t_k))=0$ по определению.

В силу этого имеет место тождество

$$\partial\xi(t,\mathbf{y}(t))/\partial y_i\Big|_{\substack{t=t_k\\ \mathbf{y}=\mathbf{y}(t_k)}} \equiv 0, \quad i=1,...,n\,. \tag{2.121}$$

Теперь из самого уравнения Беллмана следует

$$-\partial\xi(t,\mathbf{y}(t))/\partial t\Big|_{\substack{t=t_k\\ \mathbf{y}=\mathbf{y}(t_k)}} = \max_{\mathbf{u}}(F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t)\Big|_{\substack{t=t_k\\ \mathbf{y}=\mathbf{y}(t_k)}}\,. \tag{2.122}$$

Получены все условия для решения уравнения Беллмана.

Решение уравнение Беллмана выполняется известными методами решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Покажем, что уравнение Беллмана при некоторых допущениях может быть приведено к уравнениям Эйлера.

Запишем уравнение Беллмана в виде двух видов уравнений

Первый вид

$$\begin{gathered}-\partial\xi(t,\mathbf{y}(t))/\partial t = F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}^*(t),t)+\\ +\sum_{i=1}^{n}(\partial\xi(t,\mathbf{y}(t))/\partial y_i)\cdot f_i(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}^*(t),t)\end{gathered} \tag{2.123}$$

Второй вид:

$$\begin{gathered}\partial F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t)/\partial u_j+\\ +\sum_{i=1}^{n}\partial\xi(t,\mathbf{y}(t))/\partial y_i\cdot\frac{\partial f_i(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t)}{\partial u_j}/=0,\ j=1,...,r\end{gathered}\,. \tag{2.124}$$

Управления, удовлетворяющие уравнениям (2.124), обозначим $\mathbf{u}^*(t)$. В уравнении (2.123) управления $\mathbf{u}^*(t)$ удовлетворяют условиям правой части уравнения Беллмана, выраженным уравнениями (2.123).

Теперь продифференцируем уравнение (2.123) по переменным состояния y_k и, введя обозначения

$$\psi_k = -\partial\xi(t,y(t))/\partial y_k,\ k=1,...,n,$$
$$\psi_0=-1,$$

получим:

$$\begin{gathered}\partial\Big(-\frac{\partial\xi(t,\mathbf{y}(t))}{\partial t}\Big)/\partial y_k = \partial F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}^*(t),t)/\partial y_k+\\ +\sum_{i=1}^{n}\partial(\partial\xi(t,\mathbf{y}(t))/\partial y_i)/\partial y_k\cdot f_i(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}^*(t),t)+\\ +\sum_{i=1}^{n}(\partial\xi(t,\mathbf{y}(t))/\partial y_i)\cdot(\partial f_i(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}^*(t),t)/\partial y_k),\\ k=1,...,n\end{gathered} \tag{2.125}$$

Выражение (2.125) перепишем в виде

$$\partial(-\frac{\partial\xi(t,\mathbf{Y}(t))}{\partial t})/\partial y_k -$$
$$-\sum_{i=1}^{n}(\partial\xi(t,\mathbf{Y}(t))/\partial y_i)\cdot(\partial f_i(\mathbf{Y}(t),\mathbf{u}^*(t),t)/\partial y_k)=$$
$$=\partial F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}^*(t),t)/\partial y_k + \qquad (2.126)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\partial(\partial\xi(t,\mathbf{Y}(t))/\partial y_i)/\partial y_k \cdot f_i(\mathbf{Y}(t),\mathbf{u}^*(t),t)$$

Заметим, что левая часть выражения (2.126) при изменении порядка дифференцирования есть полная производная

$$\frac{d}{dt}(-\frac{\partial\xi(t,\mathbf{Y}(t))}{\partial y_k})=-\sum_{i=1}^{n}\partial(\partial\xi(t,\mathbf{Y}(t))/\partial y_k)/\partial y_i\cdot\frac{dy_i}{dt}- \qquad (2.127)$$
$$-\partial(\partial\xi(t,\mathbf{Y}(t))/\partial y_k)/\partial t$$

С учетом выражения $dy_i(t)/dt=f_i(\mathbf{Y}(t),\mathbf{u}(t),t)$ при $\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}^*(t)$ в полной производной (2.127) уравнение (2.126) принимает вид

$$\partial(-\frac{\partial\xi(t,\mathbf{Y}(t))}{\partial t})/\partial y_k=\partial F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}^*(t),t)/\partial y_k- \qquad (2.128)$$
$$-\sum_{i=1}^{n}(\partial\xi(t,\mathbf{Y}(t))/\partial y_i)\cdot(\partial f_i(\mathbf{Y}(t),\mathbf{u}^*(t),t)/\partial y_k)$$

Используя в (2.128) и (2.124) приведенные выше обозначения, получим

$$d\psi_k(t)/dt=-\psi_0(\partial F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}^*(t),t)/\partial y_k-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)(\partial f_i(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}^*(t),t)/\partial y_k, \qquad (2.129)$$
$$k=1,\dots,n,$$

$$\psi_0(\partial F(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t)/\partial u_j+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\psi_i(\partial f_i(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}^*(t),t)/\partial u_j)=0, \qquad (2.130)$$
$$j=1,\dots,r.$$

Полученные уравнения идентичны уравнениям Эйлера в задаче оптимального управления, т.е. уравнения (2.129) есть уравнения Эйлера (2.51), и уравнения (2.130) есть уравнения Эйлера (2.52).

Таким образом, показано, что классическое вариационное исчисление, принцип максимума и уравнение Беллмана позволяют выразить условия экстремума функционала в задаче оптимального управления идентичными уравнениями.

Контрольные вопросы

1. В чем сущность принципа оптимальности?
2. Каким математическим выражением реализуется принцип оптимальности?
3. Записать уравнение Беллмана. К какому виду дифференциальных уравнений оно относится?
4. Какие граничные условия нужно иметь для решения уравнения Беллмана?
5. Почему уравнение Беллмана, полученное при $t = 0$ и $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}(0)$, справедливо для произвольного значения t и вектора $\mathbf{Y}(t)$?
6. Какова последовательность решения задачи оптимального управления с использованием уравнения Беллмана?
7. Какими действиями показывают связь уравнений Беллмана с принципом максимума и с классическим вариационным исчислением?

Тема 3. СТАТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Статическая оптимизация имеет место как при решении задач динамической оптимизации с использованием численных методов, а также имеет самостоятельное назначение при решении задач оптимизации объектов и систем, находящихся в статическом состоянии.

3.1. Виды функций

По количеству экстремумов различают унимодальные и полимодальные функции.

Унимодальные функции – это функции, имеющие один экстремум.

Полимодальные функции – это функции, имеющие более одного экстремума.

3.2. Виды экстремумов и наилучших значений функции

Локальный минимум полимодальной функции в точке $\mathbf{u}^{i*} = (u_1^{i*},...,u_r^{i*})$ имеет место, если $Q(\mathbf{u}^{i*} - \Delta u_j) > Q(\mathbf{u}^{i*}) < Q(\mathbf{u}^{i*} + \Delta u_j)$,

или $dQ(\mathbf{u}^i)/du_j\Big|_{\mathbf{u}^{i*}+\Delta u_j} > 0$ и $dQ(\mathbf{u}^i)/du_j\Big|_{\mathbf{u}^{i*}-\Delta u_j} < 0$.

Локальный максимум полимодальной функции в точке $\mathbf{u}^{i*}$ имеет место, если $Q(\mathbf{u}^{i*} - \Delta u_j) < Q(\mathbf{u}^{i*}) > Q(\mathbf{u}^{i*} + \Delta u_j)$, или

$dQ(\mathbf{u}^i)/du_j\Big|_{\mathbf{u}^{i*}+\Delta u_j} < 0$ и $dQ(\mathbf{u}^i)/du_j\Big|_{\mathbf{u}^{i*}-\Delta u_j} > 0$, $j = 1,...,r$,

где $i = 1,...,k$ – число локальных экстремумов.

Если $Q(\mathbf{u}^{\min}) = \max\limits_{i,\min,\max}(Q(\mathbf{u}^i), Q(\mathbf{u}^{\min}), Q(\mathbf{u}^{\max}))$, то при $\mathbf{u}^{min}$ имеет место супремум ($\sup Q(\mathbf{u})$).

Супремум ($\sup Q(\mathbf{u})$) при $\mathbf{u}^{min}$ имеет место, если $Q(\mathbf{u}^{\min}) = \max\limits_{i,\min,\max}(Q(\mathbf{u}^i), Q(\mathbf{u}^{\min}), Q(\mathbf{u}^{\max}))$.

Супремум ($\sup Q(\mathbf{u})$) при $\mathbf{u}^{max}$ имеет место, если $Q(\mathbf{u}^{max}) = \max\limits_{i,min,max}(Q(\mathbf{u}^i), Q(\mathbf{u}^{min}), Q(\mathbf{u}^{max}))$.

Инфимум ($\inf Q(\mathbf{u})$) при $\mathbf{u}^{min}$ имеет место, если $Q(\mathbf{u}^{min}) = \min\limits_{i,min,max} (Q(\mathbf{u}^{i}), Q(\mathbf{u}^{min}), Q(\mathbf{u}^{max}))$.

Инфимум ($\inf Q(\mathbf{u})$) при $\mathbf{u}^{max}$ имеет место, если $Q(\mathbf{u}^{max}) = \min\limits_{i,min,max} (Q(\mathbf{u}^{i}), Q(\mathbf{u}^{min}), Q(\mathbf{u}^{max}))$.

Глобальный минимум в точке $\mathbf{u}^{g}$ имеет место, если $Q(\mathbf{u}^{g}) = \min\limits_{min,max,\, i, i=1,2,...,k,} (Q(\mathbf{u}^{i*}), Q(\mathbf{u}^{min}), Q(\mathbf{u}^{max}))$ ·

Глобальный максимум в точке $\mathbf{u}^{g}$ имеет место, если $Q(\mathbf{u}^{g}) = \max\limits_{min,max,\, i, i=1,2,\ldots,k,} (Q(\mathbf{u}^{i*}), Q(\mathbf{u}^{min}), Q(\mathbf{u}^{max}))$ ·

3.3. Постановка задачи статической оптимизации

В математической форме постановка задачи статической оптимизации представляется следующими выражениями:

$$Q(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \to \min_{\mathbf{U}\in\Omega} (\max) \tag{3.1}$$

$$y_i = \varphi_i(\mathbf{X}, \mathbf{U}), \quad i = 1,..., n, \tag{3.2}$$

$$y_i \geq y_i^{зад}, \quad i = 1,..., k,\ y_i \leq y_i^{зад}, \quad i = k+1,..., p,\ p \leq n, \tag{3.3}$$

$$U_j^{min} \leq U_j \leq U_j^{max}, \quad j = 1,..., r, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{X} = (x_1,..., x_m)$ – вектор внешних возмущающих воздействий, $\mathbf{U} = (u_1,..., u_r)$ – вектор управляющих воздействий, $\mathbf{Y} = (y_1,..., y_p)$ – вектор выходных переменных, $y_i^{зад}$ – заданные значения выходных переменных, Ω – область допустимых управлений.

Она формулируется следующим образом: требуется найти такие значения управляющих воздействий $\mathbf{U}^* = (u_1^*,..., u_r^*)$, при которых выполняются приведенные выше условия, а критерий оптимальности Q принимает минимальное (максимальное) значение.

3.4. Методы статической оптимизации

К методам статической оптимизации относятся:

1. Классический метод исследования функции на экстремум.

2. Методы нелинейного программирования:

– численные методы решения одномерной задачи статической оптимизации;

– численные методы решения многомерной задачи статической оптимизации.

3. Линейное программирование.
4. Динамическое программирование в дискретной форме.

3.4.1. Классический метод исследования функций на экстремум

3.4.1.1. Классический метод исследования функций одной переменной на экстремум

Необходимые и достаточные условия экстремума функции одной переменной

Необходимое условие: $Q = Q(u)$. (3.5)

Достаточное условие: $dQ(u)/du\big|_{u*} = 0$. (3.6)

Если при $u = u*$ впервые в порядке возрастания k имеет место $d^kQ(u)/du^k\big|_{u*} \neq 0$, где k – четное, то (3.5) имеет экстремум. Причем, если $dQ(u)/du\big|_{u*} > 0$, то $Q(u) \to \min$, а если $dQ(u)/du\big|_{u*} < 0$, то $Q(u) \to \max$.

Если при $u = u^*$ впервые в порядке возрастания k имеет место $d^kQ(u)/du^k\big|_{u*} \neq 0$, где k – нечетное, то (3.5) не имеет экстремума.

Примеры исследования функции одной переменной на экстремум.

Пример 1. $Q = (1-u)^3$.

Необходимое условие экстремума $dQ(u)/du\big|_{u^*} = 0$ дает

$$3(1-u^*)^2(-1) = 0, \text{ и } u^* = 1.$$

Достаточное условие экстремума $d^kQ(u)/du^k\big|_{u^*} \neq 0$ дает $d^2Q(u)/du^2\big|_{u^*} = 6(1-u^*) = 6(1-1) = 0$, $d^3Q(u)/du^3\big|_{u^*} = -6 \neq 0$, где $k = 3$ – нечетное.

Ответ: при $u^* = 1$ исследуемая функция не имеет экстремума.

Пример 2. $Q = (1-u)^4$.

Необходимое условие экстремума $dQ(u)/du\big|_{u^*} = 0$ дает $dQ(u)/du\big|_{u^*} = 4(1-u^*)^3(-1) = 0$, и $u^* = 1$.

Достаточное условие экстремума $d^kQ(u)/du^k\big|_{u^*} \neq 0$ дает $d^2Q(u)/du^2\big|_{u^*} = 12(1-u^*)^2(-1)^2 = 12(1-1)^2 = 0$,

$d^3Q(u)/du^3\big|_{u^*} = -24(1-u^*) = 24(1-1) = 0$, $d^4Q(u)/du^4\big|_{u^*} = +24 > 0$, где $k = 4$ – четное.

Ответ: при $u^* = 1$ исследуемая функция имеет минимум.

3.4.1.2. Определение оптимальной долговечности изделия аналитическим методом

Постановка задачи

Решается задача определения оптимальной долговечности (срока службы) изделия, участвующего в технологическом процессе, при котором затраты на планируемом временном отрезке T при использовании изделия с долговечностью T_∂ будут минимальны.

Суммарные затраты:

$$C_\Sigma(T, T_\partial) = C_{но}(T_\partial) + C_{1П}(T_\partial)\frac{T \cdot m}{T_\partial} + C_{1ГЭ}(T_\partial) \cdot T \cdot m, \quad (3.7)$$

где $C_{но}(T_\partial) = S_1(T_{\partial 0}) + K_{но}(T_\partial - T_{\partial 0})$ – (3.8)
стоимость НИОКР;

$$C_{1П}(T_\partial) = S_2(T_{\partial 0}) + K_{1П}(T_\partial - T_{\partial 0}) + K_{2П}(T_\partial - T_{\partial 0})^2 \quad (3.9)$$

стоимость серийного производства одного изделия с долговечностью T_∂;

$$C_{1ГЭ}(T_\partial) = S_3(T_{\partial 0}) - K_{1ГЭ}(T_\partial - T_{\partial 0}) \; – \quad (310)$$

стоимость годовой эксплуатации одного изделия с долговечностью T_∂;

$T_{\partial 0}$ – выбранное базовое значение долговечности;

S_1, S_2, S_3 – стоимости соответственно НИОКР, серийного производства одного изделия, стоимости годовой эксплуатации одного изделия при долговечности $T_\partial = T_{\partial 0}$.

Задаются:

$$S_1, S_2, S_3, K_{но}, K_{1П}, K_{2П},, K_{1ГЭ}, T_{\partial 0}, T, m.$$

После подстановки выражений (3.8–3.10) в (3.7) с заданными коэффициентами и значениями T и m выражение (3.7) примет вид:

$$\begin{aligned} C_\Sigma &= \Big(S_1(T_{\partial 0}) + K_{но}(T_\partial - T_{\partial 0})\Big) + \\ &+ \Big(S_2(T_{\partial 0}) + K_{1П}(T_\partial - T_{\partial 0}) + K_{2П}(T_\partial - T_{\partial 0})^2\Big) \cdot \frac{T \cdot m}{T_\partial} + \\ &+ \Big(S_3(T_{\partial 0}) - K_{1ГЭ}(T_\partial - T_{\partial 0})\Big) \cdot T \cdot m = \\ &= S_1(T_{\partial 0}) + K_{но}(T_\partial) - K_{но}(T_{\partial 0}) + \frac{S_2(T_{\partial 0}) \cdot T \cdot m}{T_\partial} + \\ &+ \frac{K_{1П} T_d{}^2 T \cdot m}{T_\partial} - \frac{K_{1П} T_{\partial 0} T \cdot m}{T_\partial} + \frac{K_{2П} T_\partial^2 T \cdot m}{T_\partial} - \\ &- \frac{2K_{2П} T_\partial T_{\partial 0} T \cdot m}{T_\partial} + \frac{K_{2П} T_{\partial 0}^2 T \cdot m}{T_\partial} + \\ &+ S_3(T_{\partial 0}) T \cdot m - K_{1ГЭ} T_\partial T \cdot m + K_{1ГЭ} T_{\partial 0} T \cdot m \end{aligned}$$

После его преобразования получим

$$\begin{aligned} C_\Sigma &= S_1(T_{\partial 0}) + K_{1П} T \cdot m + S_3(T_{\partial 0}) T \cdot m + \\ &+ T_{\partial 0} \cdot (-K_{но} - 2K_{2П} T \cdot m + K_{1ГЭ} T \cdot m) + \\ &+ T_\partial \cdot (K_{но} + K_{2П} T \cdot m - K_{1ГЭ} T \cdot m) + \\ &+ (S_2(T_{\partial 0}) T \cdot m - K_{1П} T_{\partial 0} T \cdot m + K_{2П} T_{\partial 0}^2 T \cdot m) / T_\partial \end{aligned} \tag{3.11}$$

Необходимые условия экстремума:

$$dC_\Sigma / dT_\partial = 0, \tag{3.12}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dC_\Sigma}{dT_\partial} &= K_{но} + K_{2П} T \cdot m - K_{1ГЭ} T \cdot m - \\ &- 1 / T_\partial^2 \cdot (S_2(T_{\partial 0}) T \cdot m - \\ &- K_{1П} T_{\partial 0} T \cdot m + K_{2П} T_{\partial 0}^2 T \cdot m) = 0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

т.е.

$$\begin{aligned} &1 / T_\partial^2 \cdot (S_2(T_{\partial 0}) T \cdot m - K_{1П} T_{\partial 0} T \cdot m + \\ &+ K_{2П} T_{\partial 0}^2 T \cdot m) = K_{но} + K_{2П} T \cdot m - K_{1ГЭ} T \cdot m \end{aligned}. \tag{3.14}$$

Из (3.14) имеем

$$T_{\partial}^{*} = \sqrt{\frac{T \cdot m \cdot (S_2(T_{\partial 0}) - K_{1П} T_{\partial 0} + K_{2П} T_{\partial 0}^2)}{K_{но} + K_{2П} T \cdot m - K_{1ГЭ} T \cdot m}} \,. \qquad (3.15)$$

Пусть заданы:

$$\begin{aligned}
&S_1 = 20 \cdot 10^3 \cdot 1.01 = 20200,\\
&K_{но} = 70 \cdot 10^3 \cdot 1.01 = 70700,\\
&S_2 = 3720 \cdot 1.01 = 3757.2,\\
&K_{1П} = 40 \cdot 1.015 = 40.6,\\
&K_{2П} = 200 \cdot 1.015 = 203,\\
&S_3 = 10^3 \cdot 1.015 = 1015,\\
&K_{1ГЭ} = 150 \cdot 1.015 = 152.25,\\
&T_{\partial 0} = 3,\\
&T = 10,\\
&m = 50.
\end{aligned}$$

Подставив заданные значения в выражение (3.11), получим

$$\begin{aligned}
&C_{\Sigma} = T_{\partial}(70700 + 203 \cdot 10 \cdot 50 - 152.25 \cdot 10 \cdot 50) +\\
&+ (3757.2 \cdot 10 \cdot 50 - 40.6 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 50 + 203 \cdot 10 \cdot 50 \cdot 9) / T_{\partial} +\\
&+ 3(-70700 - 2 \cdot 203 \cdot 10 \cdot 50 + 152.25 \cdot 10 \cdot 50) +\\
&+ 20200 + 40.6 \cdot 10 \cdot 50 + 1015 \cdot 10 \cdot 50 =\\
&= 96075 \cdot T_{\partial} + 2731200 / T_{\partial} + 3(-197575) + 548000,\\
&C_{\Sigma} = 96075 \cdot T_{\partial} + 2731200 / T_{\partial} - 44725.
\end{aligned} \qquad (3.16)$$

Из (3.15) оптимальное значение долговечности будет равно

$$T_{\partial}^{*} = \sqrt{\frac{10 \cdot 50(3757.2 + 203 \cdot 9 - 40.6 \cdot 3}{70700 - (152.25 - 203) \cdot 10 \cdot 50}} = \sqrt{\frac{500 \cdot 5462.4}{70700 + 25375}} = \sqrt{\frac{2731200}{96075}} = \sqrt{28.427} = 5.33 \,.$$

Подставим полученное значение в выражение затрат (3.16)

$$C_{\Sigma} = 96075 \cdot 5.33 + 2731200 / 5.33 - 44725 = 979775 \,.$$

3.4.1.3. Классический метод исследования функций многих переменных на экстремум

Необходимые и достаточные условия экстремума функции нескольких переменных

$$Q = Q(\mathbf{U}) = Q(u_1,...,u_r)\,. \tag{3.17}$$

Необходимое условие:

$$\partial Q(\mathbf{U})/\partial u_j\Big|_{\mathbf{U}^*} = 0,\ j = 1,...,r,\ \mathbf{U}^* = (u_1^*,...,u_r^*)\,. \tag{3.18}$$

Достаточное условие:

Если при $\mathbf{U} = \mathbf{U}^*$ все диагональные миноры матрицы Гессе (Г)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Q(\mathbf{U})}{\partial u_1 \partial u_1} \cdots \dfrac{\partial^2 Q(\mathbf{U})}{\partial u_1 \partial u_r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 Q(\mathbf{U})}{\partial u_r \partial u_1} \cdots \dfrac{\partial^2 Q(\mathbf{U})}{\partial u_r \partial u_r} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

являются строго положительными, то функция (3.7) имеет минимум. Если при $\mathbf{U} = \mathbf{U}^*$ нечетные диагональные миноры матрицы (3.9) строго отрицательные, а четные строго положительные, то функция (3.7) имеет максимум. Положительность или отрицательность матрицы Гессе соответствует положительности или отрицательности квадратичной формы, получаемой разложением функции $Q(\mathbf{U})$ в ряд Тейлора, содержащий члены не выше второго порядка. Разложение проводится относительно точки, в которой выполняется необходимое условие экстремума (3.8).

Примеры исследования функции нескольких переменных на экстремум классическим методом

Пример 1. $Q = u_1 + 2u_1^2 + u_2 + 4u_2^2 + 3u_1u_2$.

Необходимое условие экстремума:

$$\partial Q(\mathbf{U})/\partial u_1\Big|_{u_1^*,u_2^*} = 0 \text{ дает } \partial Q(\mathbf{U})/\partial u_1\Big|_{u_1^*,u_2^*} = 1 + 4u_1^* + 3u_2^* = 0 \text{ и}$$

$$\partial Q(\mathbf{U})/\partial u_2\Big|_{u_1^*,u_2^*} = 1 + 8u_2^* + 3u_1^* = 0\,,$$

Для решения системы полученных уравнений, приведенных к виду

$$4u_1^* + 3u_2^* = -1$$
$$3u_1^* + 8u_2^* = -1,$$

воспользуемся формулой Крамера

$$u_1^* = \Delta_1/\Delta,\ u_2^* = \Delta_2/\Delta,$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 9 = 23$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -8 + 3 = -5$,

$u_1^* = \Delta_1/\Delta = -5/23$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1$, $u_2^* = \Delta_2/\Delta = -1/23$

Достаточное условие экстремума:

$$\partial^2 Q(\mathbf{U})/\partial u_1 \partial u_1 \Big|_{u_1^*, u_2^*} = 4,\ \partial^2 Q(\mathbf{U})/\partial u_1 \partial u_2 \Big|_{u_1^*, u_2^*} = 3,$$

$$\partial^2 Q(\mathbf{U})/\partial u_2 \partial u_1 \Big|_{u_1^*, u_2^*} = 3,\ \partial^2 Q(\mathbf{U})/\partial u_2 \partial u_2 \Big|_{u_1^*, u_2^*} = 8.$$

Матрица (Г):

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Q(\mathbf{U})}{\partial u_1 \partial u_1} & \dfrac{\partial^2 Q(\mathbf{U})}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2 Q(\mathbf{U})}{\partial u_2 \partial u_1} & \dfrac{\partial^2 Q(\mathbf{U})}{\partial u_2 \partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Первый диагональный минор равен $4 > 0$, второй диагональный минор равен $4 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = 32 - 9 = 23 > 0$

Ответ: при $u_1^* = -5/23$, $u_2^* = -1/23$ исследуемая функция имеет минимум.

Пример 2. $Q = u_1 - 2u_1^2 + u_2 + 4u_2^2 + 3u_1 u_2$.

Необходимое условие экстремума:

$\partial Q(\mathbf{U})/\partial u_1 \Big|_{u_1^*, u_2^*} = 0$ дает $\partial Q(\mathbf{U})/\partial u_1 \Big|_{u_1^*, u_2^*} = 1 - 4u_1^* + 3u_2^* = 0$ и

$$\partial Q(\mathbf{U})/\partial u_2 \Big|_{u_1^*, u_2^*} = 1 + 8u_2^* + 3u_1^* = 0,$$

Для решения системы полученных уравнений, приведенных к виду

$$\begin{matrix} -4u_1^* + 3u_2^* = -1 \\ 3u_1^* + 8u_2^* = -1 \end{matrix},$$

воспользуемся формулой Крамера: $u_1^* = \Delta_1/\Delta$, $u_2^* = \Delta_2/\Delta$, где $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -32-9=-41$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -8+3=-5$,

$u_1^* = \Delta_1/\Delta = 5/41$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4+3=7$, $u_2^* = \Delta_2/\Delta = --7/41$.

Достаточное условие экстремума:

$$\partial^2 Q(\mathbf{U})/\partial u_1 \partial u_1 \Big|_{u_1^*, u_2^*} = -4,\ \partial^2 Q(\mathbf{U})/\partial u_1 \partial u_2 \Big|_{u_1^*, u_2^*} = 3,$$

$$\partial^2 Q(\mathbf{U})/\partial u_2 \partial u_1 \Big|_{u_1^*, u_2^*} = 3,\ \partial^2 Q(\mathbf{U})/\partial u_2 \partial u_2 \Big|_{u_1^*, u_2^*} = 8.$$

Матрица (Г):

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Q(\mathbf{U})}{\partial u_1 \partial u_1} & \dfrac{\partial^2 Q(\mathbf{U})}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2 Q(\mathbf{U})}{\partial u_2 \partial u_1} & \dfrac{\partial^2 Q(\mathbf{U})}{\partial u_2 \partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Первый диагональный минор равен $-4 < 0$, второй диагональный минор равен $-4 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = -32 - 9 = -41 < 0$

Ответ: при $u_1^* = 5/41$, $u_2^* = -7/41$ исследуемая функция не имеет экстремума.

3.4.2. Аналитическое решение задачи на условный экстремум

В задачах статической оптимизации условия могут быть двух видов: в форме равенств и в форме неравенств.

3.4.2.1. Аналитическое решение задачи на условный экстремум при условии в форме равенств

В этом случае задача решается методом множителей Лагранжа.

Метод множителей Лагранжа

Решается задача на условный экстремум

$$Q = Q(\mathbf{U}) \to \min_{\mathbf{U} \in \Omega}) \tag{3.20}$$

при условиях:

$$\varphi_j(\mathbf{U}) = 0,\ j = 1,\dots,m, \quad \mathbf{U} = (u_1,\dots,u_r),\ m < r. \tag{3.21}$$

В этом случае составляется функция Лагранжа

$$L(\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda}) = Q(\mathbf{U}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(\mathbf{U}), \qquad (3.22)$$

где λ_j, $j = 1,...,m$ – множители Лагранжа.

Затем совместно решается система уравнений

$$\partial L(\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda}) / \partial u_i = 0, \; i = 1,...,r, \qquad (3.23)$$

$$\varphi_j(\mathbf{U}) = 0, \; j = 1,...,m. \qquad (3.24)$$

Пример решения задачи методом множителей Лагранжа

$$Q = u_1^2 + u_2^2,$$

$$u_1 + u_2 - 1 = 0.$$

Функция Лагранжа

$$L = Q(u_1,u_2) + \lambda\varphi(u_1,u_2) = u_1^2 + u_2^2 + \lambda(u_1 + u_2 - 1),$$

$$\begin{aligned} \partial L / \partial u_1 &= 2u_1^* + \lambda = 0, \\ \partial L / \partial u_2 &= 2u_2^* + \lambda = 0 \end{aligned}.$$

Пусть $\lambda \neq 0$, тогда $u_1 = \lambda / 2$, $u_2 = \lambda / 2$,

$$u_1 = u_2, \; -u_1 - u_2 + 1 = 0, \; u_1^* = u_2^* = 0.5.$$

Пример использования метода множителей Лагранжа для определения оптимального набора благ, обеспечивающего максимизацию предельной полезности.

В основу теории предельной полезности положено введение функции полезности в виде зависимости ее от количества благ

$$u = u(x_1, x_2,..., x_i,..., x_m). \qquad (3.25)$$

Количество блага измеряется в физических единицах (килограммах, литрах и т.п.).

Полезность блага измеряется в специально введенных единицах – ютилях. Эта единица условная. Она различна для различных людей, Предполагается, что любой человек в состоянии признать полезность какого-либо количества блага за единицу (ютиль) и в этих единицах измерять полезность всех других благ.

Введем понятие предельной полезности.

Пусть дано некоторое количество блага x_i и его полезность u_i.

Предельная полезность блага определяется как

$$M\,u_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} (\Delta u_i / \Delta x_i) = \partial u_i / \partial x_i\,, \qquad (3.26)$$

т.е. $M\,u_i$ есть частная производная от функции полезности блага по его количеству.

Функция полезности от каждого блага

$$u_i = u_i(x_i) \qquad (3.27)$$

обладает следующими свойствами: непрерывна, дифференцируема, $u_i(0) = 0$, $\partial u_i / \partial x_i > 0$, $\partial^2 u_i / \partial x_i^2 < 0$.

Перед потребителем возникает задача – определить набор благ, обеспечивающих наибольшую полезность при ограничении по бюджету

$$u = u(x_1, ..., x_i, ..., x_m) \to \max\,. \qquad (3.28)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{m} P_i x_i = B\,, \qquad (3.29)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, ..., m\,, \qquad (3.30)$$

где P_i – цена i-го блага, B – бюджет потребителя. Смысл первого ограничения состоит в расходовании денег по объему, строго равному бюджету. Смысл второго ограничения состоит в том, что x_i благо либо покупается, либо не покупается, но не продается.

Сформулированная задача является задачей на условный экстремум при условии типа равенство.

Составим функцию Лагранжа

$$L = u(x_1, ..., x_m) + \lambda(B - \sum_{i=1}^{m} P_i x_i)\,. \qquad (3.31)$$

Величина множителя Лагранжа имеет экономический смысл как предельная полезность оставшихся денег суммой $(B - \sum_{i=1}^{m} P_i x_i)$.

Из необходимого условия экстремума функции L по x_i и λ имеем

$$\begin{cases} \partial L/\partial x_1 = \partial u/\partial x_1 - \lambda P_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \partial L/\partial x_i = \partial u/\partial x_i - \lambda P_i = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \partial L/\partial x_m = \partial u/\partial x_m - \lambda P_m = 0 \\ \partial L/\partial\lambda = B - \sum\limits_{i=1}^{m} P_i x_i = 0 \end{cases}. \qquad (3.32)$$

Решив систему этих ($m+1$) уравнений, найдем все искомые переменные $x_1^*,...,x_m^*$.

Приведенную выше систему уравнений (3.32) перепишем с учетом выражений предельной полезности:

$$\begin{cases} M\,u_1/P_1 = \lambda \\ \dots\dots\dots\dots \\ M\,u_i/P_i = \lambda \\ \dots\dots\dots\dots \\ M\,u_m/P_m = \lambda \\ \sum\limits_{i=1}^{m} P_i x_i = B \end{cases}. \qquad (3.33)$$

Рассматривая $\mu u_i/P_i$ как предельную эффективность в смысле предельной полезности, полученной от единицы вложенных денег на покупку блага x_i, приходим к выводу, что предельная эффективность от покупки любого блага x_i есть величина постоянная и равная предельной полезности оставшихся денег.

Пусть функция полезности имеет вид $u = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, условие $P_1 x_1 + P_2 x_2 = B$, где $a_0 = 1{,}12$; $a_1 = 0{,}65$; $a_2 = 0{,}47$; $B = 200$; $P_1 = 50$; $P_2 = 22$.

Требуется найти оптимальный набор благ и его полезность.

Решим задачу в общем виде, а затем подставим численные значения коэффициентов.

$$L = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} + \lambda(B - P_1 x_1 - P_2 x_2).$$

Запишем необходимые условия экстремума функции L:

$$\partial L / \partial x_1 = a_0 a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2} - \lambda P_1 = 0,$$

$$\partial L / \partial x_2 = a_0 a_2 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1} - \lambda P_2 = 0,$$

$$B - P_1 x_1 - P_2 x_2 = 0.$$

Преобразуем эту систему

$$\begin{cases} a_0 a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2} = \lambda P_1 \\ a_0 a_2 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1} = \lambda P_2 \\ P_1 x_1 + P_2 x_2 = B \end{cases}.$$

Разделим первое уравнение на второе

$$(a_1 / a_2)(x_2 / x_1) = P_1 / P_2.$$

Отсюда

$$x_2 = (P_1 / P_2)(a_2 / a_1) x_1.$$

Дополним его уравнением

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 = B$$

и решим совместную систему этих двух уравнений:

$$x_1^* = a_1 /(a_1 + a_2) B / P_1, \quad x_2^* = a_2 /(a_1 + a_2) B / P_2.$$

Подставив численные значения коэффициентов, получим оптимальный набор благ:

$$x_1^* = 2{,}32; \qquad x_2^* = 3{,}82.$$

Полезность оптимального набора при этом составит:

$$u^* = 1{,}12 \cdot 2{,}32^{0{,}65} \cdot 3{,}82^{0{,}47} = 3{,}63.$$

3.4.2.2. Аналитическое решение задачи на условный экстремум при условиях типа неравенств

В этом случае задача решается с использованием условий Куна-Таккера.

Условия Куна-Таккера

Решается задача выпуклого программирования на условный экстремум

$$Q = Q(\mathbf{U}) \to \min_{\mathbf{U}\in\Omega}) \qquad (3.34)$$

при условиях:

$$\varphi_j(\mathbf{U}) \le 0,\ j = 1,...,m, \quad \mathbf{U} = (u_1,...,u_m)\ . \qquad (3.35)$$

где $Q(\mathbf{U})$ и $\varphi_j(\mathbf{U})$ – выпуклые дифференцируемые функции.

В этом случае составляется функция Лагранжа:

$$L(\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda}) = Q(\mathbf{U}) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j(\mathbf{U})\ , \qquad (3.36)$$

где λ_j, $j = 1,...,m$, – множители Лагранжа.

Затем совместно решается система уравнений и неравенств:

$$\partial L(\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda}) / \partial u_i = 0, i = 1,...,r\ , \qquad (3.37)$$

$$\lambda_j\varphi_j(\mathbf{U}) = 0,\ j = 1,...,m\ , \qquad (3.38)$$

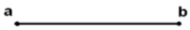
$$\lambda_j \ge 0,\ j = 1,...,m\ , \qquad (3.39)$$

$$\varphi_j(\mathbf{U}) \le 0,\ j = 1,...,m\ . \qquad (3.40)$$

К определению выпуклости функции

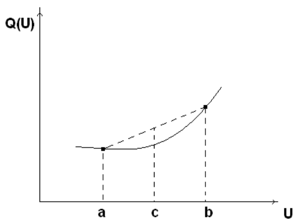
Пусть $0 \le \alpha \le 1$.

Произвольную точку на линии **ab** можно описать как $a + (b - a)(1 - \alpha) = \alpha a + (1 - \alpha)b$, т.е. при $\alpha = 0$ это точка b, а при $\alpha = 1$



это точка a.

В случае нелинейной функции ее значение в точке $c = \alpha a + (1 - \alpha b)$ есть $Q[\alpha a + (1 - \alpha)b]$.



Значение линейной функции, проходящей через точки a и b, в точке a равно

$$Q(c) = Q(a) + (Q(b) - Q(a))(c - a)/(b - a). \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} &Q(a) + (Q(b) - Q(a))[\alpha a + (1-\alpha)b - a]/(b - a) = \\ &= Q(a) + (Q(b) - Q(a))(1-\alpha) = \alpha Q(a) + (1-\alpha)Q(b) \end{aligned}. \quad (3.42)$$

Сравнивая значения исходной функции с линейной функцией в точке c, можно записать условие выпуклости функции вниз:

если имеет место

$$Q(\alpha a + (1-\alpha)b) < \alpha Q(a) + (1-\alpha)Q(b), \quad (3.43)$$

то исходная функция выпукла вниз (лежит ниже линейной функции на отрезке $[a,b]$).

Примеры решения задачи с использованием условия Куна-Таккера

Пример 1. $Q = u_1^2 + u_2^2 \to \min\limits_{u_1, u_2}$,

$$u_1 + u_2 \le 1, \text{ или } \varphi(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 \le 0,$$

$$L = Q(u_1, u_2) + \lambda\varphi(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 + \lambda(u_1 + u_2 - 1).$$

Условия Куна-Таккера:

$$\lambda^* \ge 0, \ \partial L(\mathbf{U}, \lambda)/\partial u_i = 0, \ \lambda^*\varphi(u_1^*, u_2^*) = 0, \ \varphi(u_1, u_2) \le 0, \ j = 1,2.$$

Решение: $\partial L/\partial u_1 = 2u_1^* + \lambda = 0$, $\partial L/\partial u_2 = 2u_2^* + \lambda = 0$,

$$\lambda(u_1 + u_2 - 1) = 0, \ u_1 + u_2 - 1 \le 0.$$

Пусть $\lambda = 0$, тогда $u_1^* = 0, u_2^* = 0$.

Ограничение $u_1 + u_2 - 1 \le 0$ в точке $\mathbf{U} = (u_1, u_2) = (0,0)$ выполняется, причем имеет место $u_1 + u_2 - 1 < 0$, а точка $\mathbf{U} = (u_1, u_2) = (0,0)$ лежит внутри допустимой области, т.е. ограничение пассивно.

Пусть $\lambda \ne 0$, тогда $u_1 + u_2 - 1 = 0$,

$$2u_1 = -\lambda; \text{ так как } \lambda > 0, \text{ то } u_1 < 0;$$

$$2u_2 = -\lambda; \text{ так как } \lambda > 0, \text{ то } u_2 < 0.$$

В этом случае не выполняется условие $u_1 + u_2 - 1 = 0$.

Пример 2. $Q = u_1^2 + u_2^2 \to \min\limits_{u_1, u_2}$

$$u_1 + u_2 \geq 1, \text{ или } \varphi(u_1, u_2) = -u_1 - u_2 + 1 \leq 0,$$

$$L = Q(u_1, u_2) + \lambda\varphi(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 + \lambda(-u_1 - u_2 + 1).$$

Условия Куна-Таккера:

$$\lambda^* \geq 0, \ \partial L(\mathbf{U}, \lambda)/\partial u_i = 0, \ \lambda^* \varphi(u_1^*, u_2^*) = 0, \ \varphi(u_1, u_2) \leq 0, \ j = 1,2.$$

Решение: $\partial L/\partial u_1 = 2u_1^* - \lambda = 0$, $\partial L/\partial u_2 = 2u_2^* - \lambda = 0$,

$$\lambda(-u_1 - u_2 + 1) = 0, \ -u_1 - u_2 + 1 \leq 0.$$

Пусть $\lambda = 0$, тогда $u_1 + u_2 - 1 = 0$.

Ограничение $-u_1 - u_2 + 1 \leq 0$ в точке $u_1 = 0, u_2 = 0$ не выполняется.

Пусть $\lambda \neq 0$, тогда $u_1 = \lambda/2$, $u_2 = \lambda/2$,

т.е. $u_1 = u_2$, $-u_1 - u_2 + 1 = 0$, $u_1^* = 0.5$, $u_2^* = 0.5$.

Ограничение $-u_1 - u_2 + 1 \leq 0$ в точке $\mathbf{U} = (u_1, u_2) = (0.5, 0.5)$ активно, так как эта точка лежит на границе.

Контрольные вопросы

1. Какова классификация функций по количеству экстремумов?
2. Какова классификация наилучших значений функции?
3. Сформулировать постановку задачи статической оптимизации.
4. Какими условиями формируется область допустимых управлений?
5. Перечислить основные методы статической оптимизации.
6. Сформулировать необходимое и достаточное условия минимума функции одной переменной.
7. Сформулировать необходимое и достаточное условия максимума функции одной переменной.
8. Сформулировать необходимое и достаточное условия минимума функции нескольких переменных.
9. Сформулировать необходимое и достаточное условия максимума функции нескольких переменных.
10. Какое математическое выражение имеет квадратичная форма?
11. Как формулируется условие положительности квадратичной формы?
12. Как формулируется условие отрицательности квадратичной формы?
13. В чем сущность метода множителей Лагранжа? Какова область его применения?
14. В чем сущность условий Куна-Таккера? Какова область их применения?

15. Как математически описать положение точки, принадлежащей отрезку **ab** ?

16. Записать условия выпуклости функции кверху и книзу.

3.4.3. Методы нелинейного программирования

К нелинейному программированию относятся задачи статической оптимизации, в которых целевая функция или условия связи или целевая функция и условия связи являются нелинейными. Из методов нелинейного программирования ниже будут рассмотрены:

1) численные методы решения одномерных задач статической оптимизации;

2) численные методы решения многомерных задач статической оптимизации

3.4.3.1. Численные методы решения одномерных задач статической оптимизации

В этом разделе будут рассмотрены методы:

1) сканирования (с постоянным и переменным шагом);

2) половинного деления исходного интервала, содержащего экстремум;

3) «золотого» сечения;

4) с использованием чисел Фибоначчи.

Во всех методах поиск экстремума функции продолжается до приближения к экстремуму с заданной точностью ε по варьируемой переменной. Эффективность метода оценивается числом обращений к целевой функции (ее вычислений) в процессе поиска экстремума до заданной степени точности ε.

Решается задача

$$Q(u) \to \max_{u} (\min), \quad a \le u \le b. \tag{3.44}$$

Метод сканирования с постоянным шагом

Алгоритм поиска

1. Задается точность ε вычисления оптимального значения $u \approx u^*$.

2. Интервал $(b-a)$ делится на N отрезков, $N \ge (b-a)/\varepsilon$.

3. В каждой точке $u_i = a + i(b-a)/N, i = 0,1,...N$ вычисляется функция $Q(u_i)$ и выбирается $Q(u^*)$ из условия:

$$Q(u^*) = \max_{u_i} Q(u_i) \qquad \text{или} \qquad Q(u^*) = \min_{u_i} Q(u_i)$$

Метод применим для поиска экстремума как унимодальных, так и полимодальных функций.

Число обращений к функции в этом методе равно

$$M = (b-a)/\varepsilon + 1. \quad (3.45)$$

Метод сканирования с переменным шагом

Алгоритм поиска

1. Задается точность ε вычисления оптимального значения $u \approx u^*$.

2. Интервал $(b-a)$ делится на S отрезков, $S >> (b-a)/\varepsilon$.

3. В каждой точке $u_i^1 = a + i(b-a)/S, i = 0,1,...,S$ вычисляется функция $Q(u_i^1)$ и выбирается $Q(u^{1*})$ из условия:

$$Q(u^{1*}) = \max_{u_i} Q(u_i^1) \qquad \text{или} \qquad Q(u^{1*}) = \min_{u_i} Q(u_i^1).$$

4. Назначают границы нового интервала поиска a_1 и b_1 из условия: $a_1 = u_{k-1}^1$, $b_1 = u_{k+1}^1$, где u_{k-1}^1 и u_{k+1}^1 есть значения, соседние с $u^{1*} = u_k^1$.

При максимизации функции $Q = Q(u) \to \max\limits_u$ и

$$Q(u_{k-1}^1) < Q(u_k^1) = Q(u^{1*}) > Q(u_{k+1}^1).$$

При минимизации функции $Q = Q(u) \to \min\limits_u$ и

$$Q(u_{k-1}^1) > Q(u_k^1) = Q(u^{1*}) < Q(u_{k+1}^1).$$

5. Пункты 2–4 повторяются для интервалов $(b_1 - a_1)$, $(b_2 - a_2), \ldots, (b_i - a_i)$.

6. Расчет заканчивается при условии $(b_i - a_i) \le \varepsilon$.

Заметим, что при сканировании исходного интервала $(b-a)$ величина шага составляет $\Delta_1 = (b-a)/S$. При сканировании суженых интервалов например, $(b_i - a_i)$, величина шага составляет

$$\Delta_{i+1} = (b-a) \cdot 2^i / S^{i+1}, \; i = 1,2,..., j,$$

а величина самого интервала

$$b_i - a_i = 2(b_{i-1} - a_{i-1})/S$$

или

$$b_i - a_i = (b-a)\cdot 2^i / S^i \, .$$

Число обращений M к функции при достижении экстремума с заданной точностью составит при четном S

$$M = (S+1) + (S-2)\cdot j \, , \qquad (3.46)$$

А при нечетном S

$$M = (S+1) + (S-1)\cdot j \, . \qquad (3.47)$$

Метод применим для поиска экстремума унимодальных функций, а также для поиска экстремума полимодальных функций с соответствующим выбором исходного числа интервалов S .

Метод половинного деления

Метод применим для поиска экстремума унимодальных функций.

Иллюстрация метода половинного деления представлена на рис. 3.1.

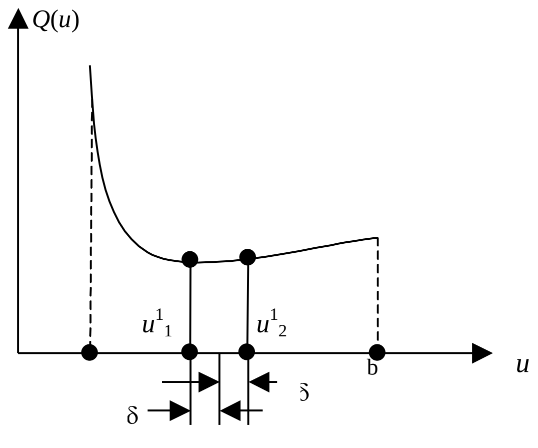


Рис. 3.1. Поиск методом половинного деления

Деление отрезка пополам носит название дихотомии. В основе метода лежит условие, что для унимодальных функций наличие двух точек с известными значениями в них функции в исследуемом интервале определения функции дает возможность сузить интервал поиска. При этом одна из этих точек, в которой функция имеет худшее значение, будет одной из границ суженного интервала. Другая граница соответствует той граничной точке предыдущего интервала, которая вместе с выбранной границей суженного интервала составляет отрезок, заключающий в себе вторую точку с лучшим значением функции. Таким образом, одна из двух выбранных точек внутри исходного интервала, значение функции в которой лучше, должна оставаться внутри суженного интервала. В методе половинного деления эти точки выбираются на малом расстоянии от середины исследуемого интервала и соответственно на малом расстоянии одна от другой.

Алгоритм поиска

1. Делится интервал $(b-a)$ пополам, $u^1 = a + (b-a)/2$.

2. Внутри интервала выбираются две точки $u_1^1 = u^1 - \delta$ и $u_2^1 = u^1 + \delta$, где $\delta = (0.01 - 0.25)\,\varepsilon$.

3. Рассчитываются $Q(u_1^1)$ и $Q(u_2^1)$.

4. Определяются границы нового интервала a_1 и b_1.

Если $Q = Q(u) \to \max$, то при $Q(u_1^1) > Q(u_2^1)$ выбираем $a_1 = a$, $b_1 = u_2^1$; при $Q(u_1^1) \le Q(u_2^1)$ выбираем $a_1 = u_1^1$, $b_1 = b$.

Если $Q = Q(u) \to \min$, то $Q(u_1^1) > Q(u_2^1)$ выбираем $a_1 = u_1^1$, $b_1 = b$; при $Q(u_1^1) \le Q(u_2^1)$ выбираем $a_1 = u_1^1$, $b_1 = u_2^1$.

5. Проверяется условие окончания поиска $(b_1 - a_1) \le \varepsilon$.

6. Для каждого нового интервала $(b_i - a_i)$ повторяются пункты 1-4 до выполнения условия $(b_i - a_i) \le \varepsilon$.

Количество обращений к функции для достижения экстремума с заданной точностью определяется из условия

$$(b-a)\cdot 0.5^j \le \varepsilon \tag{3.48}$$

как

$$M = 2j, \tag{3.49}$$

где j – число процедур половинного деления.

Метод «золотого» сечения

Метод применим для поиска экстремума унимодальных функций. К «золотому» сечению приводит деление исходного отрезка ab на две неравные части ac и cb такие, что отношение длины всего отрезка к длине его большой части равно отношению длины его большой части к длине меньшей части, т.е.

$$ab/ac = ac/cb. \tag{3.50}$$

В этом случае имеем

$$ac = (3-\sqrt{5})(b-a)/2 \approx 0.62, \tag{3.51}$$

$$cb = (-1+\sqrt{5})(b-a)/2 \approx 0.38. \tag{3.52}$$

При делении большей части, ac, по стратегии «золотого» сечения на больший отрезок ad и меньший отрезок dc имеет место равенство $ad = cb$. Это следует из соотношений

$$ab/ac = ac/cb = ac/ad = ad/cd. \tag{3.53}$$

В основе метода лежит тот же принцип выбора двух точек внутри исследуемого интервала для его сужения, что и в методе половинного деления. В отличие от метода половинного деления для выбора точек здесь используется стратегия «золотого» сечения при делении всего исследуемого отрезка и при делении его большей части. При этом от левой a и правой b границ интервала ab откладывают внутрь интервала отрезки величиной $(-1+\sqrt{5})(b-a)/2$.

Иллюстрация метода «золотого» сечения представлена на рис. 3.2.

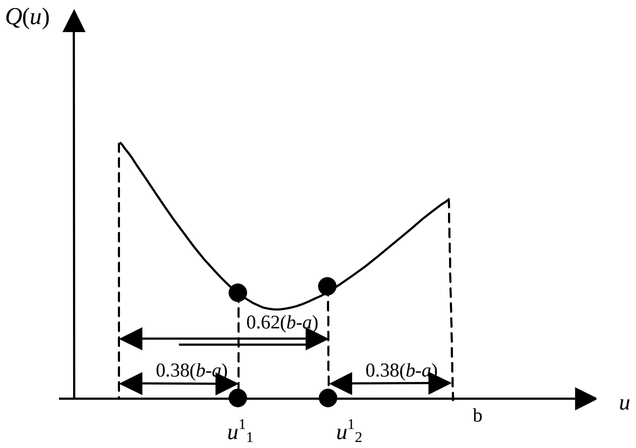


Рис. 3.2. Поиск методом «золотого» сечения

Алгоритм поиска

1. Внутри интервала $(b-a)$ выбираются две точки $u_1^1 = a + (3-\sqrt{5})(b-a)/2$ и $u_2^1 = b-(3-\sqrt{5})(b-a)/2$.

2. Вычисляются $Q(u_1^1)$ и $Q(u_2^1)$.

3. Определяются границы a_1 и b_1 нового интервала.

Если $Q = Q(u) \to \max$, то при $Q(u_1^1) > Q(u_2^1)$ выбираем $a_1 = a$, $b_1 = u_2^1$; при $Q(u_1^1) \le Q(u_2^1)$ выбираем $a_1 = u_1^1$, $b_1 = b$.

Если $Q = Q(u) \to \min$, то при $Q(u_1^1) > Q(u_2^1)$ выбираем $a_1 = u_1^1$, $b_1 = b$; при $Q(u_1^1) \le Q(u_2^1)$ выбираем $a_1 = a$, $b_1 = u_2^1$.

4. Проверяется условие окончания поиска $(b_1 - a_1) \le \varepsilon$.

5. Если условие окончания поиска в пункте 4 не выполняется, на интервале $(b_1 - a_1)$ со стороны, не смежной с меньшим отрезком, от граничной точки откладывается длина меньшего отрезка.

6. Проводится перенумерация точек:

– ближайшая к левой границе точка обозначается u_1^2;

– ближайшая к правой границе точка обозначается u_2^2.

7. Для каждого нового интервала $(b_i - a_i)$ повторяются пункты 2–6 до выполнения условия $(b_i - a_i) \le \varepsilon$.

Количество обращений к функции для достижения экстремума с заданной точностью определяется из условия

$$(b-a)\cdot((3-\sqrt{5})/2)^j \le \varepsilon \tag{3.54}$$

как

$$M = j+1, \tag{3.55}$$

где j – число процедур сужения интервала методом «золотого» сечения.

Метод с использованием чисел Фибоначчи

Метод применим для поиска экстремума унимодальных функций.

В основе метода лежит формирование шагов пропорционально числам Фибоначчи.

Ряд чисел Фибоначчи представляет собой последовательность чисел

$$F_0 = 1,\ F_1 = 1,\ F_i = F_{i-1} + F_{i-2},\ i = 2,3,... \tag{3.56}$$

Иллюстрация метода с использованием чисел Фибоначчи представлена на рис. 3.3.

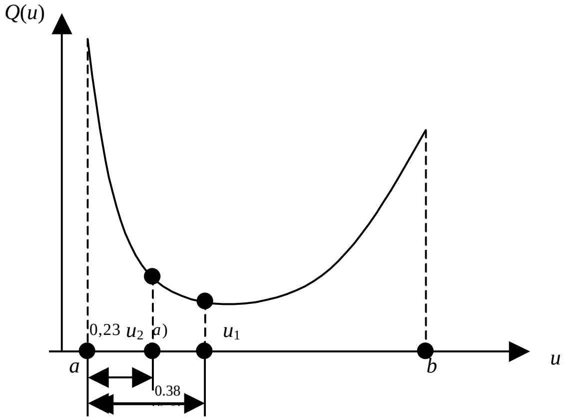


Рис. 3.3. Поиск с использованием чисел Фибоначчи

Алгоритм поиска

1. Определяется число N, $N = (b-a)/\varepsilon$.

2. В ряду чисел Фибоначчи находят $F_{s-1} < N \le F_s$, где $F_0 = F_1 = 1$, $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$, $i = 2,3,\ldots$

3. Вычисляется

$$\Delta = (b-a)/F_s. \qquad (3.57)$$

4. Выполняется 1-й шаг:

$$u_1 = a + \Delta F_{s-1} \qquad (3.58)$$

и вычисляется $Q = Q(u_1)$.

5. Выполняется 2-й шаг:

$$u_2 = a + \Delta F_{s-1-1} \qquad (3.59)$$

и вычисляется $Q = Q(u_2)$.

6. Дальнейшие шаги:

$$u_{i+1} = u_l \pm \operatorname{sign}(u_i - u_{i-1}) \cdot \operatorname{sign}(Q(u_i) - Q(u_{i-1}))\Delta F_{s-2-i}, \qquad (3.60)$$

где u_l – значение u, при котором достигнуто наилучшее значение функции.

Знак плюс (+) ставится в задаче $Q = Q(u) \to \max$, знак минус (-) ставится в задаче $Q = Q(u) \to \min$.

На каждом шаге вычисляется функция $Q(u)$. Поиск заканчивается после использования числа Фибоначчи F_0, т.е. когда будут исчерпаны все числа Фибоначчи от F_{s-2} до F_0.

Количество обращений к функции для достижения экстремума с заданной точностью определяется из условия

$$M = s - 1, \tag{3.61}$$

где s – индекс ближайшего числа Фибоначчи, удовлетворяющего условию

$$(b - a)/\varepsilon \le F_s. \tag{3.62}$$

Из методов половинного деления, «золотого» сечения и с использованием чисел Фибоначчи последний является наиболее эффективным. Метод «золотого» сечения уступает ему по эффективности незначительно.

Контрольные вопросы

1. В чем сущность метода сканирования с постоянным шагом?
2. В чем сущность метода сканирования с переменным шагом? Область его применения. Оценка эффективности.
3. В чем сущность метода половинного деления? Область его применения. Оценка эффективности.
4. В чем сущность метода «золотого» сечения? Область его применения. Оценка эффективности.
5. Что общего в методах половинного деления и «золотого» сечения? В чем их различие?
6. В чем сущность метода с использованием чисел Фибоначчи? Область его применения. Оценка эффективности.
7. Что общего в методах «золотого» сечения и с использованием чисел Фибоначчи? В чем их различие?

3.4.3.2. Численные методы решения многомерных задач статической оптимизации

Решается задача

$$Q(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_r) = Q(\mathbf{u}) \to \max_{\mathbf{u}} (\min) \tag{3.63}$$

$$\mathrm{u}_1^{\min} \le \mathrm{u}_i \le \mathrm{u}_i^{\max}, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{3.64}$$

Функция двух переменных $Q(u_1, u_2)$ представлена на рис. 3.4.

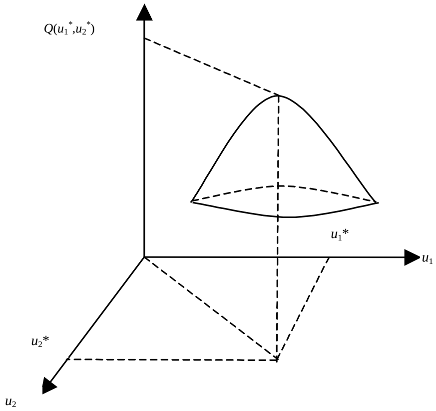


Рис. 3.4. Двумерная функция

Для иллюстрации методов поиска рассматривают функцию двух переменных $Q = Q(u_1, u_2)$ в виде проекции сечения её поверхности плоскостями, параллельными основанию. В этом случае функция $Q = Q(u_1, u_2)$ представляется в виде линий уровня. Во всех точках, находящихся на одной линии уровня, функция $Q = Q(u_1, u_2)$ имеет одно и то же значение.

Формирование линий уровня представлено на рис. 3.5.

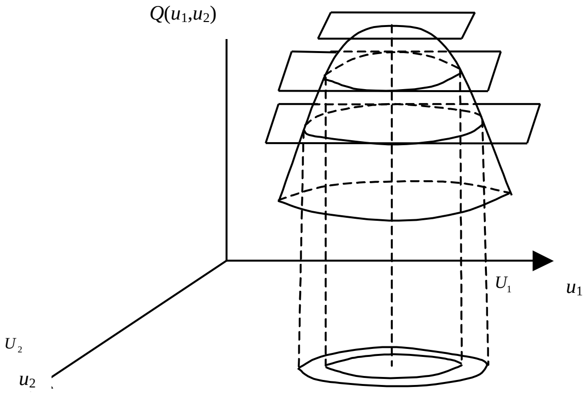


Рис. 3.5. Формирование линий уровня многомерной функции

Из численных методов решения многомерных задач статической оптимизации ниже рассматриваются методы: Гаусса-Зейделя, градиента, наискорейшего спуска (подъема), случайного поиска.

Метод Гаусса-Зейделя

Сущность метода заключается в следующем.

Из выбранной точки поиска движение осуществляется в направлении выбранной координатной оси (рис.3.6.) до значения варьируемой переменной, при которой скорость изменения функции обращается в ноль (или достигает очень малого наперёд заданного значения). Затем движение осуществляется по другой переменной до достижения указанного выше условия. Выбор переменной, по которой нужно осуществлять движение, выполняется в ранее установленной последовательности или по той переменной, скорость изменения функции по которой максимальная (в этом случае модификация метода Гаусса-Зейделя носит название метода релаксаций).

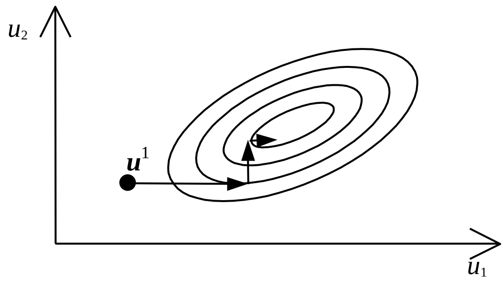


Рис. 3.6. Поиск методом Гаусса-Зейделя

Алгоритм поиска (заданы значения δ_i, Δ):

1. Выбирается исходная точка поиска $\mathbf{u}^1 = (u_1^1,...,u_r^1)$ и вычисляется $\mathrm{Q} = Q(\mathbf{u}^1)$.

2. Из точки $\mathbf{u}^1$ осуществляется движение по переменной u_1^1 с шагом h_1.

$$u_1^2 = u_1^1 \pm h_1(\mathrm{sign}(\Delta Q)/(\Delta u_1)\Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^1}) \qquad (3.65)$$

до выполнения условия $\left|\Delta Q / \Delta u_1\right| \le \delta_1$.

Знак плюс (+) принимается в задаче максимизации, а знак минус (-) принимается в задаче минимизации функции $Q(\mathbf{u})$.

3. Пункт 2 повторяется из полученной точки для переменной u_2. Аналогично осуществляется движение по всем оставшимся переменным $u_3, u_4, ..., u_r$.

4. Проверяется выполнение условия окончания поиска

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{r}(\Delta Q/\Delta u_i)^2} \le \Delta. \qquad (3.66)$$

5. В случае невыполнения пункта 4 повторяются пункты 1-4, принимая за исходную точку поиска ту, в которую пришли в пункте 4.

Недостатком метода является возможность остановиться вдали от экстремума в случае вытянутых линий уровня не в направлении координатных осей.

Метод применим для поиска экстремума унимодальных функций.

Метод градиента

Градиент функции $Q(\mathbf{u})$

$$Grad\, Q(\mathbf{u})\big|_{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{r} K_i \frac{\partial Q(\mathbf{u})}{\partial u_i}\Big|_{\mathbf{u}}, \qquad (3.67)$$

где K_i – вектор, определяющий направление по i-й координатной оси.

Модуль градиента

$$\left|Grad\, Q(\mathbf{u})\big|_{\mathbf{u}}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial Q(\mathbf{u})}{\partial u_i}\Big|_{\mathbf{u}}\right)^2}\,. \qquad (3.68)$$

Направление градиента

$$\cos\alpha_j = \frac{\partial Q(\mathbf{u})/\partial u_j}{\left|Grad\, Q(\mathbf{u})\right|}\Big|_{\mathbf{u}}, \quad j = 1, ..., r. \qquad (3.69)$$

Градиент обладает тем свойством, что в его направлении функция $\mathrm{Q} = Q(\mathrm{u}_1, ..., \mathrm{u}_r)$ изменяется с наибольшей скоростью. Графически этому соответствует направление перпендикуляра, проведённого к касательной для линии уровня в выбранной точке. Сущность метода заключается в том, что из выбранной точки определяется направление градиента и в этом направлении выполняется рабочий шаг. Сравниваются значения функции, вычисленные в предыдущей и последующей точках.

Если значение функции улучшилось, то из полученной точки определяется направление градиента и поиск продолжается. Если значение функции не улучшилось, то возвращаются в предыдущую точку и из неё повторяют в направлении градиента шаг с уменьшенной величиной. Шаг в направлении градиента может формироваться различными способами. Наиболее распространенным способом является формирование шага пропорционально модулю градиента. В этом случае выбирается базовое значение шага h_0. Рабочий шаг, пропорциональный в выбранной точке $\mathbf{u}^k$ модулю градиента $\left|Grad\,Q(\mathbf{u})\big|_{\mathbf{u}^k}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial\,Q(\mathbf{u})}{\partial\,u_i}\bigg|_{\mathbf{u}^k}\right)^2}$,

равен $\mathrm{h}_{\mathbf{u}} = \mathrm{h}_0 \left|Grad\,Q(\mathbf{u})_{\mathbf{u}^k}\right|$. Проекция этого шага на координатную ось определяется выражением

$$\begin{aligned} \Delta u_j &= h_{\mathbf{u}} \cos\alpha_j = h_0 \left|Grad\,Q(\mathbf{u})\Big|_{\mathbf{u}^k}\right| \cdot \frac{\partial Q(\mathbf{u})/\partial u_j}{\left|Grad\,Q(\mathbf{u})\right|}\Bigg|_{\mathbf{u}^k} = \\ &= h_0 \cdot \partial Q(\mathbf{u})/\partial u_j \Big|_{\mathbf{u}^k} \end{aligned}. \quad (3.70)$$

Признаком окончания поиска является достижение модулем градиента наперёд заданной малой величины. Иллюстрация поиска методом градиента изображена на рис. 3.7.

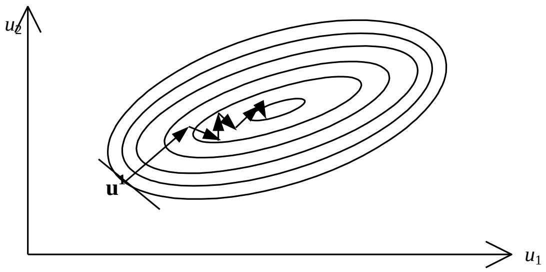


Рис. 3.7. Поиск методом градиента

Алгоритм поиска (задано Δ)

1. Выбирается исходная точка поиска $\mathbf{u}^1 = (u_1^1, ..., u_r^1)$.

2. Вычисляется

$$\left|Grad\,Q(\mathbf{u})\Big|_{\mathbf{u}^1}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial Q(\mathbf{u})}{\partial u_i}\bigg|_{\mathbf{u}^1}\right)^2}. \quad (3.71)$$

3. Проверяется выполнение условия окончания поиска

$$\left|GradQ(\mathbf{u}^k)\right| \le \Delta. \quad (3.72)$$

4. Если условие окончания поиска выполнено, то поиск окончен.

5. Если условие окончания поиска не выполнено, то выполняется шаг $u_i^{k+1} = u_i^k \pm h_k \cdot \cos\alpha_j$ в направлении градиента, где знак плюс (+) для задачи $Q(\mathbf{u}) \to \max\limits_{\mathbf{u}}$, знак минус (-) для задачи $Q(\mathbf{u}) \to \min\limits_{\mathbf{u}}$,

$$\cos\alpha_i\Big|_{\mathbf{u}^k} = \Delta Q(\mathbf{u})/\Delta u_i \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{r}(\Delta Q(\mathbf{u})/\Delta u_i)^2}\,\Bigg|_{\mathbf{u}^k},\ i = 1,\dots,r. \qquad (3.73)$$

Если $h^k = h_0\left|GradQ(\mathbf{u}^k)\right|$, то $u_i^{k+1} = u_i^k \pm h_0\,(\Delta Q(\mathbf{u})/\Delta u_i)\Big|_{\mathbf{u}^k}$,

где h_0 – базовое значение шага.

Сравниваются значения функций $Q(\mathbf{u}^k)$ и $Q(\mathbf{u}^{k+1})$.

Если для $Q(\mathbf{u}) \to \max\limits_{\mathbf{u}}$ выполняется $Q(\mathbf{u}^{k+1}) > Q(\mathbf{u}^k)$ или для $Q(\mathbf{u}) \to \min\limits_{\mathbf{u}}$ выполняется $Q(\mathbf{u}^{k+1}) < Q(\mathbf{u}^k)$, то пункты 2–6 повторяются до выполнения условия окончания поиска в пункте 3.

Если для $Q(\mathbf{u}) \to \max\limits_{\mathbf{u}}$ имеет место неравенство $Q(\mathbf{u}^{k+1}) \le Q(\mathbf{u}^k)$ или для $Q(\mathbf{u}) \to \min\limits_{\mathbf{u}}$ имеет место неравенство $Q(\mathbf{u}^{k+1}) \ge Q(\mathbf{u}^k)$, то возвращаются в точку $\mathbf{u} = \mathbf{u}^k$, уменьшают шаг h_0 и переходят к пункту 5.

Метод применим для поиска экстремума унимодальных функций.

Метод наискорейшего спуска (подъема)

Иллюстрация поиска методом наискорейшего спуска изображена на рис. 3.8.

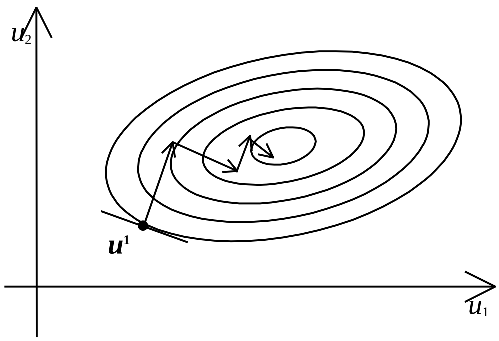


Рис. 3.8. Поиск методом наискорейшего спуска

Поиск методом наискорейшего спуска отличается от метода градиента тем, что движение из выбранной точки $\mathbf{u}^k$ в направлении n градиента производится до выполнения условия

$$\left|\left.\frac{\Delta Q(\mathbf{u})}{\Delta u_i}\right|_{\mathbf{u}^k}\right| \approx \left|\left.\frac{\partial Q(\mathbf{u})}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{u}^k}\right| \le \delta_i\,,\ i = 1,\ldots,r\,. \qquad (3.74)$$

Заметим, что остановка движения в выбранном направлении до достижения указанного условия осуществляется так же, как в методе Гаусса-Зейделя.

Метод применим для поиска экстремума унимодальных функций.

Метод движения по дну оврага

Иллюстрация поиска методом движения по дну оврага изображена на рис. 3.9.

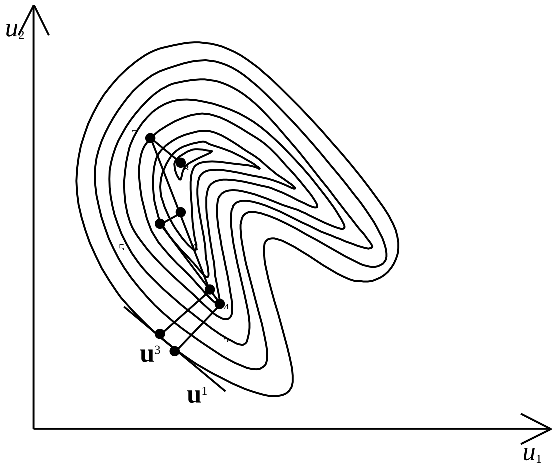


Рис. 3.9. Поиск методом движения по дну оврага

Овраги (при минимизации функций) или хребты (при максимизации функции) имеют место в тех случаях, когда скорости изменения функции по различным переменным сильно отличаются, т.е. отличие чувствительности функции к различным переменным велико. Сущность метода заключается в том, что спускаются на дно оврага и через две ближайшие точки, лежащие на дне оврага, проводят направление, по которому выполняется рабочий шаг. Из полученной точки спускаются на дно оврага. Сравнивают значение функции из предыдущей точки, лежащей на дне оврага, со значением функции в последней точке, лежащей на дне оврага. Если значение функции улучшилось, то описанную выше процедуру повторяют, вводя в рассмотрение последнюю точку на дне оврага. Если значение функции не улучшилось, то повторяют шаг с уменьшенной величиной. Признаком окончания поиска является достижение величины рабочего шага наперёд заданного малого значения.

Алгоритм поиска

1. Задание $h^{\min}$.

2. Выбор исходной точки поиска $\mathbf{u}^1 = (u_1^1, ..., u_r^1)$ и спуск из нее в направлении $GradQ(\mathbf{u}^1)$ на дно оврага в точку $\mathbf{u}^2$.

3. Смещение из точки $\mathbf{u}^1$ в точку $\mathbf{u}^3$ на небольшое расстояние ортогонально направлению $GradQ(\mathbf{u}^1)$ и спуск из нее в направлении $GradQ(\mathbf{u}^3)$ на дно оврага в точку $\mathbf{u}^4$.

4. Сравнение значений функций $Q(\mathbf{u}^2)$ и $Q(\mathbf{u}^4)$ в точках $\mathbf{u}^2$ и $\mathbf{u}^4$, лежащих на дне оврага.

5. Если для $Q(\mathbf{u}) \to \max\limits_{\mathbf{u}}$ имеет место $Q(\mathbf{u}^4) \geq Q(\mathbf{u}^2)$ или для $Q(\mathbf{u}) \to \min\limits_{\mathbf{u}}$ имеет место $Q(\mathbf{u}^4) < Q(\mathbf{u}^2)$, то в направлении от точки $\mathbf{u}^2$ к точке $\mathbf{u}^4$ из точки $\mathbf{u}^4$ выполняется рабочий шаг h и переход в точку $\mathbf{u}^5$, лежащую на склоне оврага (хребта).

6. Спуск на дно оврага из точки $\mathbf{u}^5$ в точку $\mathbf{u}^6$.

Все точки, лежащие на дне оврага, имеют четные индексы и обозначаются $\mathbf{u}^{2+2i}$, $i = 0,1,2,...$ Все точки, лежащие на склоне оврага (хребта), имеют нечетные индексы и обозначаются $\mathbf{u}^{3+2i}$, $i = 0,1,2,...$

7. Сравнение значений функций в соседних точках $\mathbf{u}^{2+2i}$ и $\mathbf{u}^{2+2i}$, лежащих на дне оврага.

8. Если для $Q(\mathbf{u}) \to \max\limits_{\mathbf{u}}$ имеет место $Q(\mathbf{u}^{2+2(i+1)}) > Q(\mathbf{u}^{2+2i})$ или для $Q(\mathbf{u}) \to \min\limits_{\mathbf{u}}$ имеет место $Q(\mathbf{u}^{2+2(i+1)}) < Q(\mathbf{u}^{2+2i})$, то в направлении от $\mathbf{u}^{2+2i}$ к $\mathbf{u}^{2+2(i+1)}$ из точки $\mathbf{u}^{2+2(i+1)}$ выполняется рабочий шаг h и переход в точку $\mathbf{u}^{3+2(i+1)}$, лежащую на склоне оврага (хребта).

9. Если для $Q(\mathbf{u}) \to \max_{\mathbf{u}}$ (или $Q(\mathbf{u}) \to \min_{\mathbf{u}}$) имеет место $Q(\mathbf{u}^{2+2(i+1)}) \le Q(\mathbf{u}^{2+2i})$ (соответственно $Q(\mathbf{u}^{2+2(i+1)}) \ge Q(\mathbf{u}^{2+2i})$), то выполняется возврат в точку $\mathbf{u}^{3+2i}$ и уменьшение рабочего шага h, например, вдвое.

10. Проверяется выполнение условия $h \le h^{\min}$.

11. Если условие окончания поиска выполнено, то за оптимальное значение $\mathbf{u}^*$ принимается $\mathbf{u}^{2+2i}$.

12. Если условие окончания поиска не выполнено, то осуществляется движение из точки $\mathbf{u}^{2+2i}$ с полученным шагом по направлению от $\mathbf{u}^{2+2(i-1)}$ к $\mathbf{u}^{2+2i}$ и переход в точку $\mathbf{u}^{3+2i}$, а из нее спуск на дно оврага в точку $\mathbf{u}^{2+2(i+1)}$.

13. Переход к пункту 7.

Решение задач оптимизации на условный экстремум методом штрафных функций

Как и в аналитическом методе, здесь будут рассмотрены условия типа равенства и условия типа неравенства.

Решение задач оптимизации при условии типа равенства

Решается задача

$$Q(\mathbf{u}) = (u_1,...,u_r) \to \max_{\mathbf{u}}(\min), \tag{3.75}$$

$$\varphi_j(u_1,...,u_r) = 0,\ j = 1,...,m. \tag{3.76}$$

Формируется штрафная функция

$$\Omega(\mathbf{u}) = Q(\mathbf{u}) \pm \alpha H(\mathbf{u}), \tag{3.77}$$

где

$$H(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^2(\mathbf{u}), \tag{3.78}$$

$\alpha > 0$ – большое число, при котором, за исключением малой ε-окрестности около границ $\varphi_j(\mathbf{u}) = 0,\ j = 1,...,m$, должно выполняться условие

$$\left|\partial Q(\mathbf{u}) / \partial u_i\right| << \left|\alpha \cdot \partial H(\mathbf{u}) / \partial u_i,\ i = 1,...,r\right|. \tag{3.79}$$

Знак плюс (+) принимается для задачи $Q(\mathbf{u}) \to \min\limits_{\mathbf{u}}$, знак минус (-) принимается для задачи $Q(\mathbf{u}) \to \max\limits_{\mathbf{u}}$.

Линии уровня функции $Q(\mathbf{u})$ трансформируются в линии уровня функции $\Omega(\mathbf{u})$ за счет штрафной составляющей $\alpha H(\mathbf{u})$, уплотняясь вдоль границы. Чем больше величина α и чем больше нарушаются ограничения, тем линии уровня ближе к границе.

Трансформирование линии уровня изображено на рис. 3.10.

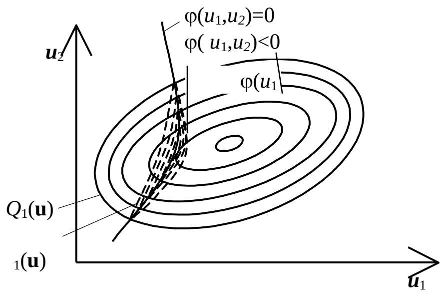


Рис. 3.10. Трансформирование линии уровня при условиях типа равенства

Решение задач оптимизации при условии типа неравенства

Решается задача

$$Q(\mathbf{u}) = (u_1,\ldots,u_r) \to \max_{\mathbf{u}}(\min)\,, \tag{3.80}$$

$$\varphi_j(u_1,\ldots,u_r) \le 0,\ j = 1,\ldots,m\,. \tag{3.81}$$

Формируется штрафная функция

$$\Omega(\mathbf{u}) = Q(\mathbf{u}) \pm \alpha \sum_{j=1}^{r} (1 + \operatorname{sign} \varphi_j(\mathbf{u}))\, \varphi_j(\mathbf{u})\,, \tag{3.82}$$

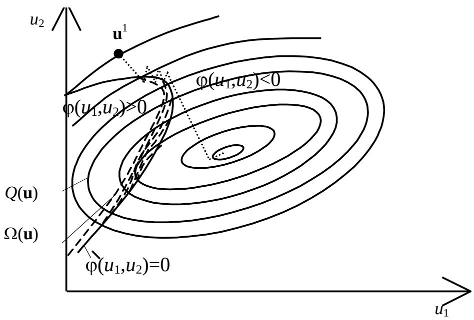
где $\operatorname{sign} \varphi_j(\mathbf{u}) = -1$, если $\varphi_j(\mathbf{u}) \le 0$; $\operatorname{sign} \varphi_j(\mathbf{u}) = 1$, если $\varphi_j(\mathbf{u}) > 0$; α – большое положительное число.

Знак плюс (+) принимается для задачи $Q(\mathbf{u}) \to \min\limits_{\mathbf{u}}$, знак минус (-) принимается для задачи $Q(\mathbf{u}) \to \max\limits_{\mathbf{u}}$.

Линии уровня функции $Q(\mathbf{u})$ за счет штрафной составляющей $\alpha\sum_{j=1}^{m}(1+\operatorname{sign}\varphi_j(\mathbf{u}))\varphi_j(\mathbf{u})$ трансформируются в линии уровня функции $\Omega(\mathbf{u})$, уплотняясь со стороны запретной области вдоль границ $\varphi_j(u_1,...,u_r)=0,\ j=1,...,m$.

Чем больше коэффициент α и чем сильнее нарушаются ограничения, тем плотнее линии уровня функции $\Omega(\mathbf{u})$ приближаются к границе со стороны запретной области.

Трансформирование линии уровня изображено на рис. 3.11.



3.11. Трансформирование линии уровня при условиях типа неравенства

Методы случайного поиска

Решается задача, сформулированная в виде

$$Q(u_1,...,u_r)=Q(\mathbf{u})\to\max_{\mathbf{u}}(\min) \qquad (3.83)$$

$$u_i^{\min}\le u_i\le u_i^{\max},\quad i=1,...,r. \qquad (3.84)$$

Рассмотрим два метода случайного поиска:

1) метод слепого поиска;

2) метод случайных направлений.

Метод слепого поиска

Заданы: объем области $v=\Delta^r$, определяющей точность вычисления вектора оптимальных управлений $\mathbf{u}^*=(u_1,...,u_r)$ в допустимой области V изменения переменных $u_i, i=1,...,r$, объемом $V=1$; вероятность β, с которой требуется попасть в область v расположения вектора $\mathbf{u}^*$.

Сущность метода слепого поиска заключается в том, что задаётся вероятность β, с которой требуется попасть в заданную область расположения экстремума. Требуется определить такое число точек, выбранных случайным образом в области допустимых управлений, при котором обеспечивается попадание хотя бы одной из этих точек в заданную область расположения экстремума v. В выбранных точках вычисляется целевая функция и выбирается точка с наилучшим значением функции.

Алгоритм поиска

1. Вычисляется число точек s в области допустимых значений $u_i, i=1,...,r$, при котором гарантируется попадание хотя бы одной из них в область v. Из выражения

$$\beta = 1-(1-v)^s \tag{3.85}$$

имеем

$$s = \ln(1-\beta)/\ln(1-v) . \tag{3.86}$$

2. Выбираются s совокупностей случайных чисел $u_i, i=1,...,r$, определяющих $\mathbf{u}^k, k=1,...,s$.

3. Вычисляются значения функции $Q=Q(\mathbf{u}^k), k=1,...,s$, и выбирается наилучшее из них.

Метод применим для поиска экстремума полимодальных функций.

Метод случайных направлений

Сущность метода состоит в том, что рабочий шаг выполняется в случайном направлении. Затем сравниваются значения функции в предыдущей и последующей точках. Если значение функции в последующей точке улучшилось, то из этой точки формируется случайное направление и выполняется рабочий шаг. Если значение функции в последующей точке не улучшилось, то возвращаются в точку с лучшим значением функции и из этой точки выполняют в ранее сформированном случайном направлении рабочий шаг с уменьшенной величиной. При достижении наперёд заданной малой величины шага из точки с лучшим значением функции формируется новое случайное направление и описанная выше процедура повторяется. Признаком окончания поиска является равенство заданному значению числа неудачных направлений из одной точки при достижении рабочим шагом наперёд заданной малой величины.

Вектор случайных направлений $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_r)$ формируется его составляющими $\alpha_i = \beta_i / \sqrt{\sum_{j=1}^{r} \beta_j^2}$. Здесь β_i, β_j – случайные вещественные числа, они могут быть положительными или отрицательными, дробными или целыми. Поиск методом случайных направлений иллюстрируется на рис. 3.12.

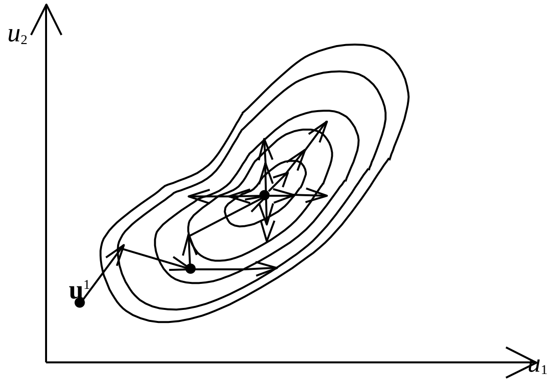


Рис. 3.12. Поиск методом случайных направлений

Алгоритм поиска

1. Задаются $h^{\min}$ и S неудачных направлений из одной точки.

2. Выбирается исходная точка поиска $\mathbf{u}^1$ и вычисляется $Q = Q(\mathbf{u}^1)$.

3. Из выбранной точки выполняется шаг h^k в случайном направлении $u_i^{k+1} = u_i^k + h^k \cdot \alpha_i,\ i = 1,...,r$, и вычисляется $Q = Q(\mathbf{u}^{k+1})$ (для первого шага $k = 1$).

4. Сравниваются значения функций $Q(\mathbf{u}^k)$ и $Q(\mathbf{u}^{k+1})$.

5. Если для $Q(\mathbf{u}) \to \max\limits_{\mathbf{u}}$ имеет место $Q(\mathbf{u}^{k+1}) > Q(\mathbf{u}^k)$ или для $Q(\mathbf{u}) \to \min\limits_{\mathbf{u}}$ имеет место $Q(\mathbf{u}^{k+1}) < Q(\mathbf{u}^k)$, то для точки $\mathbf{u}^{k+1}$ выполняются пункты 3–4.

6. Если для $Q(\mathbf{u}) \to \max\limits_{\mathbf{u}}$ имеет место $Q(\mathbf{u}^{k+1}) \le Q(\mathbf{u}^k)$ или для $Q(\mathbf{u}) \to \min\limits_{\mathbf{u}}$ имеет место $Q(\mathbf{u}^{k+1}) \ge Q(\mathbf{u}^k)$, то возвращение в точку $\mathbf{u}^k$.

7. Проверяется выполнение условия окончания поиска $s \ge S$ при $h \le h^{\min}$, где s – число неудачных направлений из точки $\mathbf{u}^k$.

8. Если условие пункта 7 выполняется, то оптимальное $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^k$.

9. Если условие пункта 7 не выполняется, то длина последнего шага уменьшается, например, вдвое, и для точки $\mathbf{u} = \mathbf{u}^k$ выполняются пункты 3–9.

Метод применим для поиска экстремума унимодальных функций.

Контрольные вопросы

1. Что отображают линии уровня?
2. Показать в плоскости двух переменных качественную картину отображения унимодальной и полимодальной функций.
3. Какой точке в плоскости представления функции соответствует наилучшее значение этой функции?
4. В чем сущность метода Гаусса-Зейделя? Область его применения.
5. В чем сущность метода релаксаций? Область применения метода.
6. В чем сущность метода градиента? Область применения метода.
7. В чем сущность метода наискорейшего спуска? Область применения метода.
8. Что общего в методах Гаусса-Зейделя и наискорейшего спуска? В чем отличие между ними?
9. Что общего в методах градиента и наискорейшего спуска? В чем отличие между ними?
10. В чем сущность метода движения по дну оврага? Область применения метода.
11. В чем сущность метода штрафных функций при оптимизации с условиями в виде равенств?
12. В чем сущность метода штрафных функций при оптимизации с условиями в виде неравенств?
13. В чем сущность метода слепого поиска? Область применения метода.
14. В чем сущность метода случайных направлений? Область применения метода.
15. Каким образом формируется случайное направление? Область применения метода.

3.4.4. Динамическое программирование в дискретной форме

В дискретной форме динамическое программирование является декомпозиционным методом решения задач статической оптимизации. Особенность динамического программирования в дискретной форме позволяет свести задачу большой размерности к ряду подзадач меньшей размерности.

В динамическом программировании критерий оптимальности $Q(\mathbf{u}) = Q(\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_r)$ должен быть функцией Марковского типа, т.е. он может быть представлен в виде функции от состояния $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_{r-1})$, в которое приходит последний объект в результате воздействия $(r-1)$ управлений, и от оставшегося управления $\mathbf{u}_r$, т.е. $Q = Q(\mathbf{S}, \mathbf{u}_r)$.

Предполагается, что процесс, протекающий в исследуемом объекте, можно рассматривать как многостадийный (на рис. 3.13. показан N - стадийный процесс).

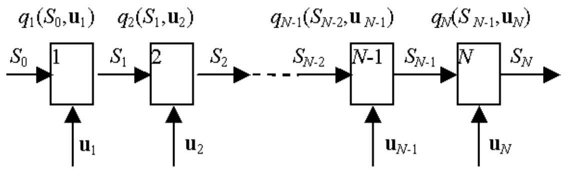


Рис. 3.13. Многостадийный процесс

Здесь: $\mathbf{S}_{i-1}$ – состояние перед i -й стадией; $\mathbf{u}_i$ – управление на i -й стадии; $q_i(\mathbf{S}_{i-1}, \mathbf{u}_i)$ – составляющая критерия оптимальности, полученная на i -й стадии.

Состояния соседних стадий связаны выражением

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i(\mathbf{S}_{i-1}, \mathbf{u}_i),\ i = 1,...N\ . \qquad (3.87)$$

Рассматривается аддитивный критерий оптимальности в виде

$$Q = \sum_{i=1}^{N} q_i(\mathbf{S}_{i-1}, \mathbf{u}_i)\ . \qquad (3.88)$$

В основе динамического программирования лежит принцип оптимальности: оптимальная стратегия обладает таким свойством, что для любых значений управлений $\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_k$, при которых система пришла в состояние $\mathbf{S}_k = \mathbf{S}_k(\mathbf{S}_0, \mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_k)$, оставшиеся управления $\mathbf{u}_{k+1},...,\mathbf{u}_r$ должны принимать такие значения, при которых критерий оптимальности является наилучшим относительно состояния $\mathbf{S}_k$.

Алгоритм решения задачи оптимизации методом динамического программирования

Принцип оптимальности реализуется по шагам следующим образом:

1. Задаются условно значения $\mathbf{S}_i = (S_i^1,...,S_i^n),\ i = 1,..., N-1$ вектора состояний. Составляющие $S_i^k,\ i = 1,..., N-1;\ k = 1,...,n$ есть значения пе-

ременных состояния, выбранные в допустимом диапазоне изменения $S_i^{\min} \le S_i^k \le S_i^{\max}$.

2. На первом шаге оптимизируется N-ая составляющая критерия оптимальности как решение задачи.

$$Q(\mathbf{S}_{N-1}, \mathbf{u}_N) \to \max_{\mathbf{u}_N} . \tag{3.89}$$

При этом получают

$$F_{N-1,N}(\mathbf{S}_{n-1}) = \max_{\mathbf{u}_N}[q_N(\mathbf{S}_{N-1}, \mathbf{u}_N)] , \tag{3.90}$$

$$\mathbf{u}_N^* = \boldsymbol{\psi}_N(\mathbf{S}_{N-1}) . \tag{3.91}$$

На втором шаге оптимизируется совместное функционирование ($N-1$)-й и N-й стадий процесса с учетом результата оптимизации, полученного на первом шаге, в виде

$$F_{N-2,N}(\mathbf{S}_{N-2}) = \max_{\mathbf{u}_{N-1}}[q_{N-1}(\mathbf{S}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-1}) + F_{N-1,N}(\mathbf{S}_{N-1})] , \tag{3.92}$$

При этом получают

$$\mathbf{u}_{N-1}^* = \boldsymbol{\psi}_{N-1}(\mathbf{S}_{N-2}) . \tag{3.93}$$

Заметим, что в состояние $\mathbf{S}_{N-1}$ приходят в соответствии с

$$\mathbf{S}_{N-1} = \mathbf{S}_{N-1}(\mathbf{S}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-1}) . \tag{3.94}$$

3. На последующих шагах оптимизируется совместное функционирование вновь вводимой стадии процесса со стадиями процесса, рассмотренными на предыдущем шаге по функциональному уравнению динамического программирования

$$F_{N-k-1,N}(\mathbf{S}_{N-k-1}) =$$
$$\max_{\mathbf{u}_{N-k}}[q_{N-k}(\mathbf{S}_{N-k-1}, \mathbf{u}_{N-k}) + F_{N-k,N}(\mathbf{S}_{N-k})], \tag{3.95}$$
$$k = 2,3,4,..., N.$$

При этом получают

$$\mathbf{u}_{N-k}^* = \boldsymbol{\psi}_{N-k}(\mathbf{S}_{N-k-1}) , \tag{3.96}$$

а в состояние $\mathbf{S}_{N-k}$ приходят в соответствии с

$$\mathbf{S}_{N-k} = \mathbf{S}_{N-k}(\mathbf{S}_{N-k-1}, \mathbf{u}_{N-k}) . \tag{3.97}$$

4. На последнем (N-ом) шаге имеем

$$F_{0,N}(\mathbf{S}_0) = \max_{\mathbf{u}_1}[q_1(\mathbf{S}_0, \mathbf{u}_1) + F_{1,N}(\mathbf{S}_1)], \tag{3.98}$$

$$\mathbf{u}_1^* = \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{S}_0) . \tag{3.99}$$

5. Выделяются оптимальные значения управлений $\mathbf{u}_i^*, i = 1,...,N$ следующим образом.

Для заданного состояния $\mathbf{S}_0$ после выполнения N-го шага оптимизации при $\mathbf{u}_1^* = \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{S}_0)$ переходят в оптимальное состояние $\mathbf{S}_1^* = \mathbf{S}_1(\mathbf{S}_0, \mathbf{u}_1^*)$. Далее используется выражение $\mathbf{u}_2^* = \boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{S}_1^*)$.

Оптимальные значения остальных управлений $\mathbf{u}_i^*, i = 3,4,...,N$, выделяются поочередным использованием выражений $\mathbf{S}_k^* = \mathbf{S}_k(\mathbf{S}_{k-1}, \mathbf{u}_k^*)$ и $\mathbf{u}_{k+1}^* = \boldsymbol{\psi}_{k+1}(\mathbf{S}_k^*), k = 2,3,...,N$.

3.4.4.1. Решение задач оптимального вложения инвестиций методом динамического программирования

Постановка задачи.

Задан объем инвестиций ***A***. Требуется распределить этот объем на N мероприятий. Эффективность каждого мероприятия от вложенных инвестиций оценивается величиной прибыли $q_i(u_i), i = 1,...,N$ (рис. 3.14).

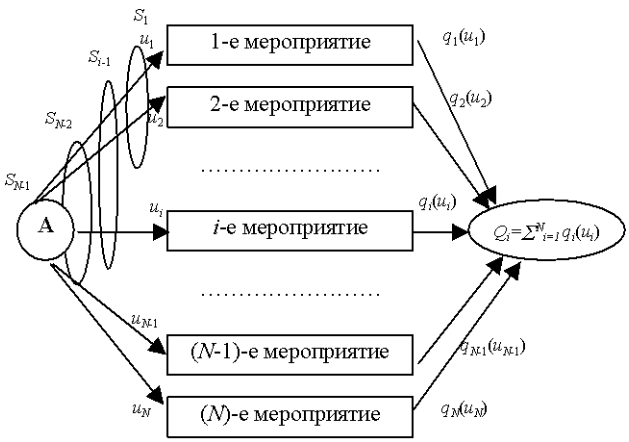


Рис. 3.14. Распределение инвестиций

Решается задача

$$Q = \sum_{i=1}^{N} q_i(u_i) \to \max_{\mathbf{u} \in \Omega} \qquad (3.100)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{N} u_i = A, \tag{3.101}$$

причем в каждое из мероприятий может быть вложен весь объем инвестиций $\boldsymbol{A}$.

Число степеней свободы в данной задаче равно $N-1$.

Общую задачу оптимизации с размерностью равной $N-1$ разбиваем на $N-1$ подзадач с размерностью равной 1.

На каждом шаге оптимизации задается условно общий объем инвестиций, вкладываемых в рассматриваемое число мероприятий:

$$S_1^k = u_1^k + u_2^k;\ S_2^k = u_1^k + u_2^k + u_3^k; \ldots; S_{N-2}^k = u_1^k + u_2^k + \ldots + u_{N-1}^k;$$

$$S_{N-1}^k = u_1^k + u_2^k + \ldots + u_N^k = A;\ S_j^0 = 0;\ j = 1,2,\ldots,N-1;\ k = 0,1,2,\ldots,\mathrm{n}.$$

Величины объема инвестиций изменяют с приращением $\Delta = \mathrm{A/n}$ как

$$S_j^k = k\Delta,\ u_i^P = P\Delta,\ P = 0,1,2,\ldots,n. \tag{3.102}$$

Задача решается пошагово. На первом шаге решается задача распределения инвестиций на два мероприятия:

$$F_{1+2}(S_1^k) = \max_{u_2^k}[q_2(u_2^k) + q_1(S_1^k - u_2^k)],\ k = 0,1,2,\ldots,n, \tag{3.103}$$

$$S_1^k = u_1^k + u_2^k. \tag{3.104}$$

В результате получают

$$u_2^{k*} = \xi_2(S_1^k), \tag{3.105}$$

$$u_1^{k*} = S_1^k - u_2^{k*}. \tag{3.106}$$

На втором шаге решается задача распределения инвестиций на три мероприятия:

$$F_{1+2+3}(S_2^k) = \max_{u_3^k}[q_3(u_3^k) + F_{1+2}(S_1^k)],\ k = 0,1,2,\ldots,n, \tag{3.107}$$

$$S_2^k = u_3^k + S_1^k. \tag{3.108}$$

В результате получают

$$u_3^{k*} = \xi_3(S_2^k). \tag{3.109}$$

Последующие шаги выполняются в соответствии с функциональным уравнением:

$$F_{1+2+\ldots m}(S_{m-1}^{k}) = \max_{u_{m}^{k}}[q_m(u_{m}^{k}) + F_{1+2+\ldots m-1}(S_{m-2}^{k})], \tag{3.110}$$

$$k = 0,1,2,\ldots, n; \quad m = 3,4,\ldots, N,$$

$$S_{m-1}^{k} = u_{m}^{k} + S_{m-2}^{k}. \tag{3.111}$$

В результате получают

$$u_m^{k\,*} = \xi_m(S_{m-1}^{k}). \tag{3.112}$$

На последнем шаге получают оптимальную величину прибыли $F_{1+2+\ldots N}(S_{N-1}) = F_{1+2+\ldots N}(A)$ и

$$u_N^{*} = \xi_N(S_{N-1}) = \xi_N(A). \tag{3.113}$$

Далее выделяют истинно оптимальные объемы инвестиций, вкладываемые в каждое из мероприятий, используя соотношения:

$$S_{j-2}^{k^*} = u_j^{k^*}(S_{j-1}^{k^*}), \tag{3.114}$$

$$u_{j-1}^{k^*} = \xi_{j-1}(S_{j-2}^{k}),\ j = N, N-1,\ldots,3, \tag{3.115}$$

$$u_1^{k\,*} = S_1^{k\,*} - u_2^{k\,*}. \tag{3.116}$$

3.4.4.2. Выбор оптимального пути на сетевой модели

Задачу выбора оптимального пути на сетевой модели сведем к задаче выбора оптимальной траектории перехода из исходного события (состояния) в конечное событие (состояние). Для этого нужно определить число этапов перехода, состояние, предшествующее очередному этапу перехода, и пути (управления), по которым осуществляется переход из выбранного состояния в соседнее состояние по направлению переходов.

Исходная сетевая модель трансформируется к виду, позволяющему представить ее как описание (представление) N стадийного процесса перехода с указанием состояний, из которых осуществляется переход, и состояний, в которые осуществляется переход.

Перед построением трансформированной модели целесообразно составить полную таблицу состояний для каждого этапа, в которой выделяются состояния рассматриваемой сетевой модели.

Число этапов N принимается равным максимальному числу переходов из исходного состояния в конечное состояние. Для каждого этапа K, $K = 1,\ldots,N$ выделяют состояния $S_{k\text{-}1}^{\mu}$. Индекс μ принимает целочисленные значения $\mu = 1,\ldots,m$ в пределах m размерности вектора наибольшего числа состояний из всех рассматриваемых этапов.

Таблица состояний

		Номера состояний						
		1	2	…	μ	…	m-1	m
Номера этапов	1	S_1^1	S_1^2	…	S_1^{μ}	…	S_1^{m-1}	S_1^m
	2	S_2^1	S_2^2	…	S_2^{μ}	…	S_2^{m-1}	S_2^m
	…	…	…	…	…	…	…	…
	K	S_k^1	S_k^2	…	S_k^{μ}	…	S_k^{m-1}	S_k^m
	…	…	…	…	…	…	…	…
	N-1	S_{N-1}^1	S_{N-1}^2	…	S_{N-1}^{μ}	…	S_{N-1}^{m-1}	S_{N-1}^m
	N	S_N^1	S_N^2	…	S_N^{μ}	…	S_N^{m-1}	S_N^m

В качестве управлений принимается перевод из одного состояния в другое соседнее состояние.

Например, управлению $u_{k,j}^{\mu,\nu}$ соответствует однонаправленный перевод из состояния S_k^{μ} в S_j^{ν} ($k=1,...,N$; $j=1,...,N$; $\mu=1,...,m$; $\nu=1,...,m$).

Критерий оптимальности, отражающий затраты на переход из исходного состояния S_0^1 в конечное состояние S_N^1, можно записать в виде

$$Q(S_0^1,\mathbf{u})=\sum_{j=1}^{N} q_j(S_{j-1},u_j), \tag{3.117}$$

$$S_{j+i}=S_{j+i}(S_{j-1},u_j),\ j=1,...,N;\ i=0,1,...,N-j, \tag{3.118}$$

где $S_j=(S_j^1,...,S_j^m)$ – вектор состояний для j+1 стадии.

$$\mathbf{u}_j=(u_{j-1,j}^{1,1},...,u_{j-1,j}^{1,m};\ u_{j-1,j+1}^{1,1},...,u_{j-1,j+1}^{1,m};\ u_{j-1,j+1}^{2,1},...,u_{j-1,j+1}^{2,m};\ ...$$
$$...;\ u_{j-1,j+1}^{m,1},...,u_{j-1,j+1}^{m,m};\ ...;\ u_{j-1,N-1}^{1,1},...,u_{j-1,N-1}^{m,m})$$ –

вектор управлений. Вектор управлений $\mathbf{u}_j$ сформирован в общем случае составляющими, каждая из которых осуществляет переход из любого состояния S_{j-1}^{μ} ($j=2,...,N$; $\mu=1,...,m$) в любое состояние S_k^{ν} ($k=j,\ j+1,...,N$; $\nu=1,...,m$) каждой из последующих стадий (этапов).

Заметим, что в формировании критерия оптимальности (3.117) реально принимают участие только те составляющие, которые формируют траекторию перехода из выбранного состояния S_k^{μ} в конечное состояние S_N^1. Поскольку управление $u_{k,j}^{\mu,\nu}$ перехода из состояния S_k^{μ} в последующее состояние S_j^{ν} отражает затраты на этот переход, то составляющие критерия оптимальности $q_{j-1,\,j+i}^{\mu,\nu}$ ($j = 1,\ldots,N$; $i = 0,1,\ldots,N-j-1$), формирующие соответствующие $q_j(\mathbf{S}_{j-1},\mathbf{u}_j)$, есть ни что иное как $u_{j-1,\,j+i}^{\mu,\nu}$.

С учетом этого функциональные управления динамического программирования пошагово, начиная с вектора состояния $\mathbf{S}_{N-1}$ последней стадии, будут иметь вид:

Для первого шага:

$$F_{N-1,N}(S_{N-1}^{\mu}) = \max_{\mu}(u_{N-1,N}^{\mu,1} + F_{N,N}(S_N^1)), \quad \mu = 1,\ldots,m. \qquad (3.119)$$

Однако, учитывая, что для конечного состояния S_N^1 приращения критерия оптимальности не существуют, имеем

$$F_{N,N}(S_N^1) = 0. \qquad (3.120)$$

Отметем также тот факт, что для выбранного состояния S_{N-1}^{μ} возможен переход в конечное состояние S_N^1 только при одном управлении $u_{N-1,N}^{\mu,1}$ для заданного μ в выбранном состоянии S_{N-1}^{μ}. Следовательно, для первого шага решения задачи функциональное уравнение динамического программирования принимает вид

$$F_{N-1,N}(S_{N-1}^{\mu}) = u_{N-1,N}^{\mu,1}. \qquad (3.121)$$

Управление на первом шаге обозначим

$$u_N^*(S_{N-1}^{\mu}) = \xi_N(S_{N-1}^{\mu}). \qquad (3.122)$$

Для шага 2:

$$\begin{gathered} F_{N-2,N}(S_{N-2}^{\mu}) = \max_{\nu,i}(u_{N-2,N+i-1}^{\mu,\nu} + F_{N-1,N}(S_{N-i}^{\nu})), \\ \mu = 1,\ldots,m; \quad \nu = 1,\ldots,m; \quad i = 0,1 \end{gathered}. \qquad (3.123)$$

В результате оптимизации на втором шаге получим

$$u_{N-1}^*(S_{N-2}^{\mu}) = \xi_{N-1}(S_{N-2}^{\mu}). \qquad (3.124)$$

Для k-го шага (k=3,4,…,N)

$$F_{N-k,N}(S_{N-k}^{\mu}) =$$

$$= \max_{\nu,i}[u_{N-k,N+k+i-1}^{\mu,\nu} + F_{N-k-1+i,N}(S_{N-k-1+i}^{\nu})], \tag{3.125}$$

$$\mu = 1,\ldots,m; \quad \nu = 1,\ldots,m; \quad i = 0,1,\ldots,k; \quad k = 3,4,\ldots,N.$$

В результате оптимизации на k-м шаге получим

$$u_{N-k+1}^{*}(S_{N-k}^{\mu}) = \xi_{N-k+1}(S_{N-k}^{\mu}) \,. \tag{3.126}$$

Последний шаг оптимизации выполняется при $k = N$. На последнем шаге получим

$$u_1^{*}(S_0^1) = \xi_1(S_0^1) \,. \tag{3.127}$$

Выражения (3.122), (3.124), (3.126) описывают условно оптимальные управления для каждой из составляющих вектора состояний соответствующей стадии, начиная со второй.

Полученное оптимальное управление для первой стадии относительно состояния S_0^1 (3.127) дает возможность выделить оптимальную траекторию перехода из состояния S_0^1 в состояние S_N^1 следующим образом. Полученное значение управления (3.127) для первой стадии подставляют в (3.118) и получают оптимальное состояние S_{j+i}^{*}. Затем S_{j+i}^{*} подставляют в соответствующее ему выражение (3.126) при $j+i = N-K$ и получают оптимальное управление u_{j+i+1}^{*}. Таким образом, при поочередном использовании выражений (3.118) и (3.126) будет выделена оптимальная траектория, обеспечивающая максимальное значение критерия оптимальности при переходе из состояния S_0^1 в состояние S_N^1.

Решение задачи по описанному алгоритму возможно программным путем, так как основные этапы ее решения достаточно формализованы для составления программы.

Однако можно решение задачи выполнить табличным способом, реализуя функциональные управления динамического программирования в виде таблиц. Принцип составления таблиц заключается в следующем.

Начиная с первого шага, записывают возможные состояния S_{N-1}^{μ} ($\mu = 1,\ldots,m$), из которых возможен переход в конечное состояние S_N^1, а также записывают управления $u_{N-1,N}^{\mu,1}$, обеспечивающие этот переход и являющиеся одновременно оценкой эффективности перехода.

Для второго шага записывают возможные состояния S_{N-2}^{μ} ($\mu = 1,...,m$), из которых возможен переход или в состояние вектора $\mathbf{S}_{N-1}$, или в конечное состояние S_N^1, а также записывают управления, обеспечивающие соответствующий переход.

Далее записывают оценку эффективности соответствующего перехода и суммарную оценку эффективности перехода из состояния S_{N-2}^{μ} ($\mu = 1,...,m$) в состояние S_{N-1}^{ν} ($\nu = 1,...,m$) и суммарную оценку эффективности перехода из состояния S_{N-2}^{ν} в состояние S_N^1. В том случае, когда из состояния S_{N-2}^{μ} имеет место переход сразу в состояние S_N^1, оценка эффективности определяется управлением $u_{N-2,N}^{\mu,1}$.

Затем выбирается условно оптимальный путь перехода из заданного состояния в конечное состояние, обеспечивающий максимальную эффективность.

Для последующих шагов записывают возможные состояния S_{N-k}^{μ} ($\mu = 1,...,m$), из которых возможен переход в любое последующее состояние $S_{N-k+1+i}^{\nu}$ ($i = 0,1,...,k-1$; $\nu = 1,...,m$), а также записывают управления, обеспечивающие этот переход. Затем записывают оценку эффективности соответствующего перехода, максимальную величину эффективности перехода из последующего состояния $S_{N-k+1+i}^{\nu}$ в конечное состояние S_N^1, записывают суммарное значение указанных эффективностей и выбирают путь условно оптимального перехода из состояния $S_{N-k+1+i}^{\nu}$ в конечное состояние S_N^1 по максимальной величине указанных эффективностей.

Ниже приведем таблицы для первого, второго и последующих шагов решения задачи.

Первый шаг. Функциональное уравнение (3.121). Ему соответствует таблица.

Состояние	Переход	Эффективность перехода	$F_{N-1,N}(S_{N-1}^{\mu})$
S_{N-1}^{1}	$u_{N-1,N}^{1,1}$	$u_{N-1,N}^{1,1}$	$u_{N-1,N}^{1,1}$
……..	……….	………	……….
S_{N-1}^{λ}	$u_{N-1,N}^{\lambda,1}$	$u_{N-1,N}^{\lambda,1}$	$u_{N-1,N}^{\lambda,1}$
…….	……….	……….	……….
S_{N-1}^{m}	$u_{N-1,N}^{m,1}$	$u_{N-1,N}^{m,1}$	$u_{N-1,N}^{m,1}$

Второй шаг. Функциональное уравнение (3.123). Ему соответствует таблица

Состояние	Переход	Эффективность перехода	Переход в состояние S_{N-1}^{ν}	$F_{N-1,N}(S_{N-1}^{\nu})$	$u_{N-1}^{\mu}+F_{N-1,N}(S_{N-1}^{\nu})$	$F_{N-1,N}(S_{N-1}^{\mu})=$ $=\max[u_{N-1}^{\mu}+F_{N-1,N}(S_{N-1}^{\nu})]$
S_{N-2}^{1}	$u_{N-2,N-1}^{1,1}$	$u_{N-2,N-1}^{1,1}$	S_{N-1}^{1}	$F_{N-1,N}(S_{N-1}^{1})$	$u_{N-2,N-1}^{1,1}+F_{N-1,N}(S_{N-1}^{1})$	$u_{N-2,N-1}^{1,m}+F_{N-1,N}(S_{N-1}^{m})$
	……..	…………..	………	…………..	…………………..……	
	$u_{N-2,N-1}^{1,m}$	$u_{N-2,N-1}^{1,m}$	S_{N-1}^{m}	$F_{N-1,N}(S_{N-1}^{m})$	$u_{N-2,N-1}^{1,m}+F_{N-1,N}(S_{N-1}^{m})$	
	$u_{N-2,N}^{1,1}$	$u_{N-2,N}^{1,1}$	S_{N}^{1}	0	$u_{N-2,N}^{1,1}$	
……..	…………..	…………..	………	…………..	…………………………	……………………….
S_{N-2}^{m}	$u_{N-2,N-1}^{m,1}$	$u_{N-2,N-1}^{m,1}$	S_{N-1}^{1}	$F_{N-1,N}(S_{N-1}^{1})$	$u_{N-2,N-1}^{m,1}+F_{N-1,N}(S_{N-1}^{1})$	$u_{N-2,N}^{m,1}$
	…………..	…………..	………	…………..	……………….……..	
	$u_{N-2,N-1}^{m,m}$	$u_{N-2,N-1}^{m,m}$	S_{N-1}^{m}	$F_{N-1,N}(S_{N-1}^{m})$	$u_{N-2,N-1}^{m,m}+F_{N-1,N}(S_{N-1}^{m})$	
	$u_{N-2,N}^{m,1}$	$u_{N-2,N}^{m,1}$	S_{N}^{1}	0	$u_{N-2,N}^{m,1}$	

K-ый шаг. Функциональное уравнение (3.125). Ему соответствует таблица.

Состоя-ние	Переход	Эффективность перехода	Приход в состояние	$F_{N-K+1+i,N}(S^{\mu}_{N-K+1+i})$	$u^{\mu,\nu}_{N-K+i,N-K+1+i}+$ $F_{N-K+1+i,N}(S^{\nu}_{N-K+1+i})$	$F_{N-K,N}(S^{\mu}_{N-K})=$ $=\max[u^{\mu,\nu}_{N-K+i,N-K+1+i}+$ $+F_{N-K+1+i,N}(S^{\nu}_{N-K+1+i})]$
1	2	3	4	5	6	7
	$u^{1,1}_{N-K,N-K+1}$	$u^{1,1}_{N-K,N-K+1}$	S^{1}_{N-K+1}	$F_{N-K+1,N}(S^{1}_{N-K+1})$	$u^{1,1}_{N-K,N-K+1}+$ $F_{N-K+1,N}(S^{1}_{N-K+1})$	
	……………..	…………	…………	……………..	……………..	
	$u^{1,m}_{N-K,N-K+1}$	$u^{1,m}_{N-K,N-K+1}$	S^{m}_{N-K+1}	$F_{N-K+1,N}(S^{m}_{N-K+1})$	$u^{1,m}_{N-K,N-K+1}+$ $F_{N-K+1,N}(S^{m}_{N-K+1})$	$F_{N-K,N}(S^{1}_{N-K})$
S^{1}_{N-K}	$u^{1,1}_{N-K,N-K+2}$	$u^{1,1}_{N-K,N-K+2}$	S^{1}_{N-K+2}	$F_{N-K+2,N}(S^{1}_{N-K+2})$	$u^{1,1}_{N-K,N-K+2}+$ $F_{N-K+2,N}(S^{1}_{N-K+2})$	$\max[u^{1,1}_{N-K,N}+$ $+F_{N-K+2,N}(S^{1}_{N-K+2})]$
	……………..	…………	…………	……………..	……………..	
	$u^{1,1}_{N-K,N}$	$u^{1,1}_{N-K,N}$	S^{1}_{N}	$F_{N,N}(S^{1}_{N})=0$	$u^{1,1}_{N-K,N}+F_{N,N}(S^{1}_{N})$	
	……………..	…………	…………	……………..	……………..	
	$u^{1,m}_{N-K,N}$	$u^{1,m}_{N-K,N}$	S^{m}_{N-1}	$F_{N-1,N}(S^{m}_{N-1})$	$u^{1,m}_{N-K,N}+F_{N,N}(S^{m}_{N})$	

1	2	3	4	5	6	7
…….	……………..	…………	…………	……………..	……………..	………………………
S^{m}_{N-K}	$u^{m,1}_{N-K,N-K+1}$	$u^{m,1}_{N-K,N-K+1}$	S^{1}_{N-K+1}	$F_{N-K+1,N}(S^{1}_{N-K+1})$	$u^{m,1}_{N-K,N-K+1}+$ $+F_{N-K+1,N}(S^{1}_{N-K+1})$	$F_{N-K,N}(S^{m}_{N-K})$ $\max[u^{m,1}_{N-K,N}+$ $+F_{N-1,N}(S^{m}_{N-1})]$ $u^{m,1}_{N-K,N}$
	……………..	…………	…………	……………..	……………..	
	$u^{m,m}_{N-K,N-K+1}$	$u^{m,m}_{N-K,N-K+1}$	S^{m}_{N-K+1}	$F_{N-K+1,N}(S^{m}_{N-K+1})$	$u^{m,m}_{N-K,N-K+1}+$ $+F_{N-K+1,N}(S^{m}_{N-K+1})$	
	$u^{m,1}_{N-K,N-K+2}$	$u^{m,1}_{N-K,N-K+2}$	S^{1}_{N-K+2}	$F_{N-K+2,N}(S^{1}_{N-K+2})$	$u^{m,1}_{N-K,N-K+2}+$ $+$ $F_{N-K+2,N}(S^{1}_{N-K+2})$	
	……………..	…………	…………	……………..	……………..	
	$u^{m}_{N-K,N}$	$u^{m}_{N-K,N}$	S^{1}_{N}	$F_{N,N}(S^{1}_{N})=0$	$u^{m,1}_{N-K,N}+F_{N,N}(S^{1}_{N})$	
	……………..	…………	…………	……………..	……………..	
	$u^{m,m}_{N-K,N-1}$	$u^{m,m}_{N-K,N-1}$	S^{m}_{N-1}	$F_{N-1,N}(S^{m}_{N-1})$	$u^{m,m}_{N-K,N-1}+$ $+F_{N-1,N}(S^{m}_{N-1})$	

N-ый (последний) шаг. Функциональное уравнение (3.125) при $K = N$. Ему соответствует таблица

Состояние	Переход	Эффективность перехода	Приход в состояние	$F_{1+i,N}(S_{1+i}^{\nu})$	$u_{1+i}^{\mu,\nu} + F_{1+i,N}(S_{1+i}^{\nu})$	$F_{0,N}(S_0^1) = \max[u_{1+i}^{\mu,\nu} + F_{1+i,N}(S_{1+i}^{\nu})]$
S_0^1	$u_{0,1}^{1,1}$	$u_{0,1}^{1,1}$	S_1^1	$F_{1,N}(S_1^1)$	$u_{0,1}^{1,1} + F_{1,N}(S_1^1)$	$F_{0,N}(S_0^1) = = \max\limits_{\lambda}[u_{0,2}^{1,\lambda} + F_{2,N}(S_2^{\lambda})]$
	…….	……	…..	………….	……………….	
	$u_{0,1}^{1,m}$	$u_{0,1}^{1,m}$	S_1^m	$F_{1,N}(S_1^m)$	$u_{0,1}^{1,m} + F_{1,N}(S_1^m)$	
	$u_{0,2}^{1,1}$	$u_{0,2}^{1,1}$	S_2^1	$F_{2,N}(S_2^1)$	$u_{0,2}^{1,1} + F_{2,N}(S_2^1)$	
	……..	……	……	………..	………………..	
	$u_{0,2}^{1,\lambda}$	$u_{0,2}^{1,\lambda}$	S_2^{λ}	$F_{2,N}(S_2^{\lambda})$	$u_{0,2}^{1,\lambda} + F_{2,N}(S_2^{\lambda})$	
	……..	……	……	………..	………………..	
	$u_{0,2}^{1,m}$	$u_{0,2}^{1,m}$	S_2^m	$F_{2,N}(S_2^m)$	$u_{0,2}^{1,m} + F_{2,N}(S_2^m)$	
	……..	……	……	…………...	………………..	
	$u_{0,1+N-2}^{1,1}$	$u_{0,1+N-2}^{1,1}$	S_{1+N-2}^1	$F_{1+N-2,N}(S_{1+N-2}^1)$	$u_{0,N-1}^{1,1} + F_{N-1,N}(S_{N-21}^1)$	
	……...	….…….	………	…………………..	…..………………..	
	$u_{0,N-1}^{1,m}$	$u_{0,N-1}^{1,m}$	S_{N-1}^m	$F_{1N-1,N}(S_{N-1}^m)$	$u_{0,N-1}^{1,m} + F_{1+-1,N}(S_{N-1}^m)$	

Для состояния S_{N-2}^{1} условно оптимальный путь в S_{N}^{1} проходит, например, через состояние S_{N-1}^{m} при $u_{N-2,N-1}^{1,m}$, $u_{N-1,N}^{m,1}$ и обеспечивает приращение критерия оптимальности, равное $F_{N-2,N}(S_{N-2}^{1}) = u_{N-2,N-1}^{1,m} + F_{N-1,N}(S_{N-1}^{m})$.

Для состояния S_{N-2}^{m} условно оптимальный путь в S_{N}^{1}, например, проходит сразу при $u_{N-2,N}^{m,1}$ и обеспечивает приращение критерия оптимальности, равное $F_{N-1,N}(S_{N-2}^{m}) = u_{N-2,N}^{m,1}$.

Для состояния, например, S_{N-K}^{1} на K -ом шаге принятия решений условно оптимальный путь в S_{N}^{1} проходит через состояние S_{N-K+2}^{1}, для которого величина $F_{N-K+2,N}(S_{N-K+2}^{1})$ вычислена на предыдущем шаге при условно оптимальном управлении, обеспечивающем переход из состояния S_{N-K+2}^{1} в последующее состояние по условно оптимальной траектории.

Для состояния, например, S_{N-K}^{m} на K -ом шаге принятия решений условно оптимальный путь в состояние S_{N}^{1} проходит сразу в состояние S_{N}^{1}. При этом условно оптимальная величина приращения критерия оптимальности составит $F_{N-K,N}(S_{N-K}^{m}) = u_{N-K,N}^{m,1}$.

Для исходного состояния S_{0}^{1} на N -ом шаге принятия решений условно оптимальный путь в состояние S_{N}^{1} проходит через состояние S_{2}^{λ}, для которого величина $F_{2,N}(S_{2}^{\lambda})$ вычислена на предыдущем шаге при условно оптимальном управлении, обеспечивающем переход из состояния S_{2}^{λ} в последующее состояние по условно оптимальной траектории.

Выделение оптимальной траектории осуществляется из состояния S_{0}^{1} через оптимальное управление $u_{1}^{*} = u_{0,j}^{1,\mu}$ переходом в последующее оптимальное состояние, например S_{K}^{μ}, из которого через оптимальное управление $u_{K,j}^{*\mu,\nu}$ переходят в последующее оптимальное состояние S_{j}^{ν} и т.д. до достижение конечного состояния S_{N}^{1}.

Пример выбора оптимального пути на сетевой модели

На рис. 3.15 представлена сетевая модель, состоящая из 8 событий и 13 работ, продолжительность которых указана над (под) работами.

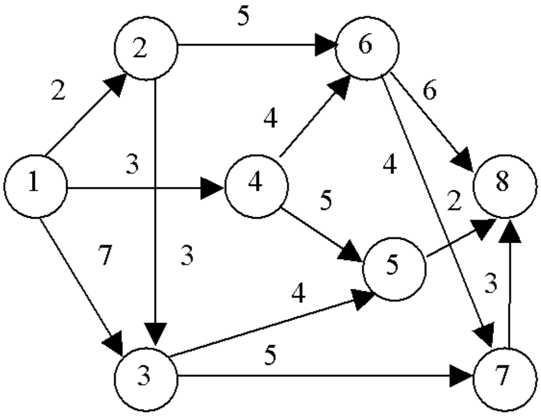


Рис. 3.15. Исходная сетевая модель

Составим таблицу событий

Этапы	События							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	S_0^1							
1		S_1^1		S_1^2				
2			S_2^1			S_2^2		
3					S_3^1		S_3^2	
4								S_4^1

На рис. 3.16 представлена трансформированная по этапам расчета сетевая модель.

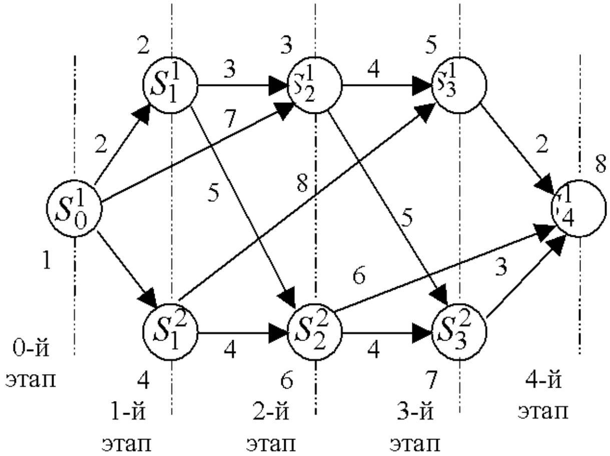


Рис. 3.16. Трансформированная сетевая модель

Рассмотрим пошаговое решение задачи перехода из состояния S_0^1 в состояние S_4^1 по траектории, обеспечивающей максимальное значение эффективности.

Первый шаг. Функциональное уравнение $F_{3,4}(S_3^{\mu}) = u_{3,4}^{\mu,1}$.

Состояние	Переход	Эффективность перехода	$F_{3,4}(S_3^{\mu})$
S_3^1	$u(S_3^1 \to S_4^1)$	$u_{3,4}^{1,1} = 2$	$u_{3,4}^{1,1} = 2$
S_3^2	$u(S_3^2 \to S_4^1)$	$u_{3,4}^{2,1} = 3$	$u_{3,4}^{2,1} = 3$

Второй шаг. Функциональное уравнение $F_{2,4}(S_2^{\mu}) = \max\limits_{\nu}[u_{2,3+i}^{\mu,\nu} + F_{3+i,4}(S_{3+i}^{\nu})]$.

Состояние	i	Переход	Эффективность перехода	Переход в состояние	$F_{3+i,4}(S_{3+i}^{\nu})$	$u_{2,3+i}^{\mu,\nu} + F_{3+i,4}(S_{3+i}^{\nu})$	$F_{2,4}(S_2^{\mu}) = \max\limits_{\nu}[u_{2,3+i}^{\mu,\nu} + F_{3+i,4}(S_{3+i}^{\nu})]$
S_2^1	0	$u(S_2^1 \to S_3^1)$	$u_{2,3}^{1,1} = 4$	S_3^1	$F_{3,4}(S_3^1) = 2$	$u_{2,3}^{1,1} + F_{3,4}(S_3^1) = 4 + 2 = 6$	$F_{2,4}(S_2^1) = u_{2,3}^{1,2} + F_{3,4}(S_3^2) = 8$
		$u(S_2^1 \to S_3^2)$	$u_{2,3}^{1,2} = 5$	S_3^2	$F_{3,4}(S_3^2) = 3$	$u_{2,3}^{1,2} + F_{3,4}(S_3^2) = 5 + 3 = 8$	
S_2^2	0	$u(S_2^2 \to S_3^2)$	$u_{2,3}^{2,2} = 4$	S_3^2	$F_{3,4}(S_3^2) = 3$	$u_{2,3}^{2,2} + F_{3,4}(S_3^2) = 4 + 3 = 7$	$F_{2,4}(S_2^2) = u_{2,3}^{2,2} + F_{3,4}(S_3^2) = 7$
	1	$u(S_2^2 \to S_4^1)$	$u_{2,4}^{2,1} = 6$	S_4^1	$F_{4,4}(S_4^1) = 0$	$u_{2,4}^{2,1} + F_{4,4}(S_4^1) = 0 + 6 = 6$	

Третий шаг. Функциональное уравнение $F_{1,4}(S_1^{\mu}) = \max\limits_{\nu}[u_{1,2+i}^{\mu,\nu} + F_{2+i,4}(S_{2+i}^{\nu})]$.

Состояние	i	Переход	Эффективность перехода	Переход в состояние	$F_{2+i,4}(S_{2+i}^{\nu})$	$u_{1,2+i}^{\mu,\nu} + F_{2+i,4}(S_{2+i}^{\nu})$	$F_{1,4}(S_1^{\mu}) = \max\limits_{\nu}[u_{1,2+i}^{\mu,\nu} + F_{2+i,4}(S_{2+i}^{\nu})]$
S_1^1	0	$u(S_1^1 \to S_2^1)$	$u_{1,2}^{1,1} = 3$	S_2^1	$F_{32,4}(S_2^1) = 8$	$u_{1,2}^{1,1} + F_{2,4}(S_3^2) = 3 + 8 = 11$	$F_{1,4}(S_1^1) = u_{1,2}^{1,2} + F_{2,4}(S_2^2) = 12$
	0	$u(S_1^1 \to S_2^2)$	$u_{1,2}^{1,2} = 5$	S_2^2	$F_{2,4}(S_2^2) = 7$	$u_{1,2}^{1,2} + F_{2,4}(S_2^2) = 5 + 7 = 12$	
S_1^2	1	$u(S_1^2 \to S_3^1)$	$u_{1,3}^{2,1} = 8$	S_3^1	$F_{3,4}(S_3^1) = 2$	$u_{1,3}^{2,1} + F_{3,4}(S_3^1) = 8 + 2 = 10$	$F_{1,4}(S_1^2) = u_{1,2}^{2,2} + F_{2,4}(S_2^2) = 11$
	0	$u(S_1^2 \to S_2^2)$	$u_{1,2}^{2,2} = 4$	S_2^2	$F_{2,4}(S_2^2) = 7$	$u_{1,2}^{2,2} + F_{2,4}(S_2^2) = 4 + 7 = 11$	

Четвертый шаг. Функциональное уравнение $F_{0,4}(S_0^1) = \max\limits_{\nu}[u_{0,1+i}^{1,\nu} + F_{1+i,4}(S_{1+i}^{\nu})]$.

Состояние	i	Переход	Эффективность перехода	Переход в состояние	$F_{1+i,4}(S_{1+i}^{\nu})$	$u_{0,1+i}^{1,\nu} + F_{1+i,4}(S_{1+i}^{\nu})$	$F_{0,4}(S_1^0) = \max\limits_{\nu}[u_{0,1+i}^{1,\nu} + F_{1+i,4}(S_{1+i}^{\nu})]$
S_0^1	0	$u(S_0^1 \to S_1^1)$	$u_{0,1}^{1,1} = 2$	S_1^1	$F_{1,4}(S_1^1) = 12$	$u_{0,1}^{1,1} + F_{1,4}(S_1^1) = 2 + 12 = 14$	$F_{0,4}(S_1^0) = u_{0,2}^{1,1} + F_{2,4}(S_2^1) = 15$
	0	$u(S_0^1 \to S_1^2)$	$u_{0,1}^{1,2} = 3$	S_1^2	$F_{1,4}(S_1^2) = 11$	$u_{0,1}^{1,2} + F_{1,4}(S_1^2) = 3 + 11 = 14$	
	1	$u(S_0^1 \to S_2^1)$	$u_{0,2}^{1,1} = 7$	S_1^2	$F_{2,4}(S_2^1) = 8$	$u_{0,2}^{1,1} + F_{2,4}(S_2^1) = 7 + 8 = 15$	

Выделим оптимальную траекторию. Из состояния S_0^1 в соответствии с таблицей четвертого шага имеем $u_{0,2}^{1,1} = 7$, что соответствует участку оптимальной территории $u(S_0^1 \to S_2^1)$. Затем выделяем оптимальное управление перехода из состояния S_2^1 в состояние S_3^2 по таблице второго шага оптимизации $u_{2,3}^{1,2} = 5$. Далее для состояния S_3^2 по таблице первого шага определяем оптимальное управление $u_{3,4}^{2,1} = 3$ перехода и из состояния S_3^2 в состояние S_4^1.

Покажем оптимальную траекторию перехода из состояния S_0^1 в состояние S_4^1 на трансформированной сетевой модели (рис. 3.17).

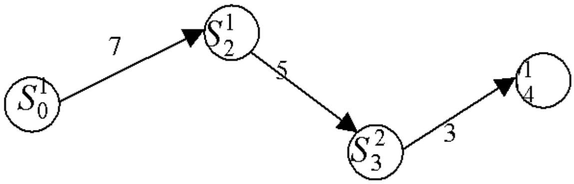


Рис. 3.17. Оптимальная траектория перехода на трансформированной сетевой модели

Оптимальная траектория для исходной сетевой модели имеет вид (рис. 3.18).

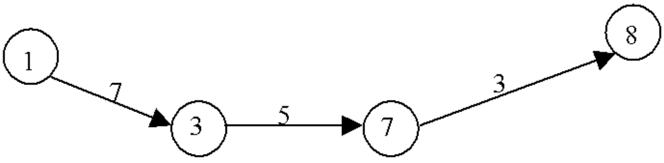


Рис. 3.18. Оптимальная траектория перехода на исходной сетевой модели

3.4.4.3. Выбор оптимальной стратегии использования оборудования на предприятии

Оптимизация стратегии обновления (замены) оборудования на предприятии является одним из важнейших направлений совершенствования структуры основных производственных фондов. В самом общем виде проблема оптимизации стратегии замены оборудования на предприятии состоит в том, что для заданного горизонта управления (планирования) необходимо найти такую стратегию замены или сохранения того или иного вида оборудования, при которой обеспечивается максимальное значение суммарной прибыли.

Горизонт управления представляется в дискретном виде через выбранный интервал времени, например через один год.

Для формирования целевой функции введем следующие обозначения:

$S_j(i)$ – состояние рассматриваемой системы прогнозирования замены оборудования, где j – длительность горизонта управления ($j = 1,2,..., N$), i – срок использования или возраст рассматриваемого вида оборудования ($i = 0,1,2,..., K$);

$u_{j-1}(i)$ – управление относительно состояния $S_j(i)$, т.е. принятие решения оставить находящееся в эксплуатации оборудование (закодируем его как $u_{j-1}(i) = 0$) или же заменить его новым оборудованием (закодируем его как $u_{j-1}(i) = 1$);

$q_j(i)$ – прибыль, получаемая от реализации продукции, произведенной за один интервал (шаг) дискретизации, например, за один год, на данном оборудовании, имеющем возраст *i* лет;

$r_j(i)$ – годовые эксплуатационные расходы предприятия по содержанию оборудования возраста *i* лет относительно состояния $S_j(i)$;

$l_j(i)$ – ликвидационная стоимость оборудования возраста *i* лет относительно состояния $S_j(i)$;

P_j – цена нового оборудования относительно состояния $S_j(i)$.

В общем виде ставится задача

$$Q(\mathbf{S}_N, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{N} q_j(S_j, u_{j-1}) \to \max_{\mathbf{u}}, \qquad (3.128)$$

где $\mathbf{S}_N$ – вектор исходных состояний в начале горизонта управления, $\mathbf{S}_N = (S_N(0), S_N(1),..., S_N(K))$; $\mathbf{u}$ – вектор управлений, $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2,..., u_{N-1})$, причем u_{j-1}, $j = 1,..., N$ может принимать лишь одно из двух дискретных значений (0 или 1) в соответствии с принятой кодировкой.

Составляющие критерия оптимальности (целевой функции) вычисляются как

$$q_j(S_j, u_{j-1}) = q_j(i) - r_j(i), \tag{3.129}$$

если $u_{j-1} = 0$, т.е. при сохранении оборудования, и

$$q_j(S_j, u_{j-1}) = l_j(i) - P_j + q_j(0) - r_j(i), \tag{3.130}$$

если $u_{j-1} = 1$, т.е. при замене оборудования.

Функциональные уравнения динамического программирования при пошаговом принятии решений от конца процесса к его началу имеют вид:

для первого шага

$$F_1(S_1(i)) = \max_{u_0} \begin{cases} q_1(i) - r_1(i), & u_0 = 0, \\ l_1(i) - P_1 + q_1(0) - r_1(0), & u_0 = 1 \end{cases}; \tag{3.131}$$

для последующих шагов

$$F_j(S_j(i)) = \max_{u_{j-1}} \begin{cases} q_j(i) - r_j(i) + F_{j-1}(i+1), & u_0 = 0, \\ l_j(i) - P_j + q_j(0) - r_j(0) + F_{j-1}(1), & u_0 = 1 \end{cases}, \tag{3.132}$$

где $j = 2, 3, ..., N$; $i = 0, 1, 2, ..., K$.

Этапы решения задачи представлены на рис. 3.19.

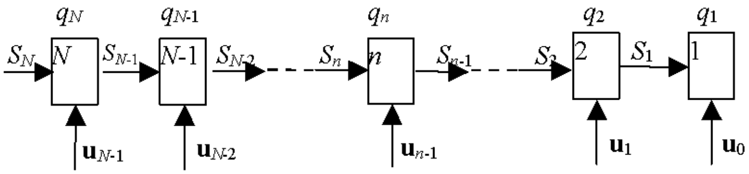


Рис. 3.19. Этапы решения задачи выбора оптимальной стратегии использования оборудования

Для упрощения иллюстраций пошагового решения задачи методом динамического программирования примем следующие допущения:

– длительность горизонта планирования $N = 5$ лет;

– может быть использовано оборудование с возрастом i = 0, 1, 2, 3, 4 лет;

– цена оборудования не меняется во времени и составляет $P_j = P = 10$ единиц;

– ликвидационная стоимость оборудования равна нулю ($l_j(i) = 0$);

– прибыль, получаемая от реализации продукции, производимой за один год на данном оборудовании, зависит только от его возраста, т.е. $q_j(i) = q(i)$;

– годовые эксплуатационные расходы также зависят только от возраста оборудования, т.е. $r_j(i) = r(i)$.

Значения $q_j(i)$, $r_j(i)$, и $q_j(i) - r_j(i)$ сведены в таблицу

Показатель	i				
	0	1	2	3	4
$q_j(i) = q(i)$	20	20	19	18	17
$r_j(i) = r(i)$	10	12	13	14	15
$q_j(i) - r_j(i) =$ $= q(i) - r(i)$	10	8	7	4	2

Рассмотрим последовательно решение задачи с принятыми условиями и допущениями.

Первый шаг. Функциональное уравнение

$$F_1(S_1(i)) = \max_{u_0} \begin{cases} q_1(i) - r_1(i), & u_0 = 0, \\ l_1(i) - P_1 + q_1(0) - r_1(0), & u_0 = 1 \end{cases}.$$

Таблица для формирования величины $F_1(S_1(i))$.

i	Состояние $S_1(i)$	Управление u_1	$f_0(S_1(i)) =$ $q_1(i) - r_1(i)$	$f_1(S_1(i)) =$ $l_1(i) - P_1 +$ $q_1(0) - r_1(0)$	$F_1(S_1(i)) = \max\begin{cases} f_0(S_1(i)) \\ f_1(S_1(i)) \end{cases}$
0	$S_1(0)$	0 1	10 –	– 0	10
1	$S_1(1)$	0 1	8 –	– 0	8
2	$S_1(2)$	0 1	6 –	– 0	6
3	$S_1(3)$	0 1	4 –	– 0	4
4	$S_1(4)$	0 1	2 –	– 0	2

Второй шаг. Функциональное уравнение $F_2(S_2(i)) = \max\limits_u \begin{cases} q_2(i) - r_2(i), & u = 0, \\ l_2(i) - P_2 + q_2(0) - r_2(0) + F_1(1), & u = 1 \end{cases}$.

Таблица для формирования величины $F_2(S_2(i))$

i	Состояние $S_2(i)$	Управление u_1	$q_2(S_2,u_1)$	Переход в $S_1(S_2,u_1)$	$F_1(S_1(i+1))$	$f_0(S_2) =$ $q_2(S_2,u_1) +$ $F_1(S_1(i+1))$	$f_1(S_2) =$ $q_2(S_2,u_1) +$ $F_1(1)$	$F_2(S_2(i)) = \max\limits_{\mathbf{u}} \begin{cases} f_0(S_2,u_1) \\ f_1(S_2,u_1) \end{cases}$
0	$S_2(0)$	0 1	10 0	$S_1(1)$ $S_1(1)$	8 –	18 –	– 8	18
1	$S_2(1)$	0 1	8 0	$S_1(2)$ $S_1(1)$	6 –	14 –	– 8	14
2	$S_2(2)$	0 1	6 0	$S_1(3)$ $S_1(1)$	4 –	10 –	– 8	10
3	$S_2(3)$	0 1	4 0	$S_1(4)$ $S_1(1)$	2 –	6 –	– 8	8
4	$S_2(4)$	0 1	2 0	——— $S_1(1)$	0 –	2 –	– 8	8

Третий шаг. Функциональное уравнение $F_3(S_3(i)) = \max\limits_u \begin{cases} q_3(i) - r_3(i) + F_2(i+1), & u = 0, \\ l_3(i) - P_3 + q_3(0) - r_3(0) + F_2(1), & u = 1 \end{cases}$.

Таблица для формирования величины $F_3(S_3(i))$

i	Состояние $S_3(i)$	Управление u_2	$q_3(S_3, u_2)$	Переход в $S_2(S_3, u_2)$	$F_2(S_2(i+1))$	$f_0(S_3) =$ $q_3(S_3, u_2)$ + $F_2(S_2(i+1))$	$f_1(S_3) =$ $q_3(S_3, u_2)$ + $F_2(1)$	$F_3(S_3(i)) =$ $\max\limits_u \begin{cases} f_0(S_3, u_2) \\ f_1(S_3, u_2) \end{cases}$
0	$S_3(0)$	0 1	10 0	$S_2(1)$ $S_2(1)$	14 –	24 –	– 8	24
1	$S_3(1)$	0 1	8 0	$S_2(2)$ $S_2(1)$	10 –	18 –	– 8	18
2	$S_3(2)$	0 1	6 0	$S_2(3)$ $S_2(1)$	8 –	14 –	– 8	14
3	$S_3(3)$	0 1	4 0	$S_2(4)$ $S_2(1)$	8 –	12 –	– 8	14
4	$S_3(4)$	0 1	2 0	$S_2(5)$ $S_2(1)$	8 –	10 –	– 8	14

Четвертый шаг. Функциональное уравнение $F_4(S_4(i)) = \max\limits_u \begin{cases} q_4(i) - r_4(i) + F_3(i+1), & u = 0, \\ l_4(i) - P_4 + q_4(0) - r_4(0) + F_3(1), & u = 1 \end{cases}$.

Таблица для формирования величины $F_4(S_4(i))$

i	Состояние $S_4(i)$	Управление u_3	$q_4(S_4, u_3)$	Переход в состояние $S_3(S_4, u_3)$	$F_3(S_3(i+1))$	$f_0(S_4) = q_4(S_4, u_3) + F_3(S_3(i+1))$	$f_1(S_4) = q_4(S_4, u_3) + F_3(1)$	$F_4(S_4(i)) = \max\limits_{\mathbf{u}} \begin{cases} f_0(S_4, u_3) \\ f_1(S_4, u_3) \end{cases}$
0	$S_4(0)$	0 1	10 0	$S_3(1)$ $S_3(1)$	18 –	28 –	– 18	24
1	$S_4(1)$	0 1	8 0	$S_3(2)$ $S_3(1)$	14 –	22 –	– 18	22
2	$S_4(2)$	0 1	6 0	$S_3(3)$ $S_3(1)$	14 –	20 –	– 18	20
3	$S_4(3)$	0 1	4 0	$S_3(4)$ $S_3(1)$	14 –	18 –	– 18	18
4	$S_4(4)$	0 1	2 0	$S_3(5)$ $S_3(1)$	14 –	16 –	– 18	18

Пятый шаг. Функциональное уравнение $F_5(S_5(i)) = \max_u \begin{cases} q_5(i) - r_5(i) + F_4(i+1), & u = 0, \\ l_5(i) - P_5 + q_5(0) - r_5(0) + F_4(1), & u = 1 \end{cases}.$

Таблица для формирования величины $F_5(S_5(i))$

i	Состояние $S_5(i)$	Управление u_4	$q_5(S_5,u_4)$	Переход в состояние $S_4(S_5,u_4)$	$F_4(S_4(i+1))$	$f_0(S_5) =$ $q_5(S_5,u_4) +$ $F_4(S_4(i+1))$	$f_1(S_5) =$ $q_5(S_5,u_4) +$ $F_4(1)$	$F_5(S_5(i)) =$ $\max_u \begin{cases} f_0(S_5,u_4) \\ f_1(S_5,u_4) \end{cases}$
0	$S_5(0)$	0 1	10 0	$S_4(1)$ $S_4(1)$	22 –	32 –	– 22	32
1	$S_5(1)$	0 1	8 0	$S_4(2)$ $S_4(1)$	20 –	28 –	– 22	28
2	$S_5(2)$	0 1	6 0	$S_4(3)$ $S_4(1)$	18 –	24 –	– 22	24
3	$S_5(3)$	0 1	4 0	$S_4(4)$ $S_4(1)$	18 –	22 –	– 22	22
4	$S_5(4)$	0 1	2 0	$S_4(5)$ $S_4(1)$	18 –	20 –	– 22	22

Для выбранного исходного состояния системы прогнозирования на заданный горизонт прогноза оптимальная стратегия формулируется следующим образом. Из таблицы последнего шага принятия решений по управлению, соответствующему максимальной величине критерия оптимальности $u_{N-1}^{*} = u_{N-1}(S_N)$, осуществляют переход в оптимальное состояние системы с уменьшенным горизонтом прогноза на один шаг (один год), т.е. $\mathbf{S}^{*}_{N-1} = \mathbf{S}_{N-1}(\mathbf{S}_N, u^{*}_{N-1})$ и далее, поочередно используя соотношения

$$\begin{aligned} u_j^{*} &= u_j(S_{j+1}), \\ \mathbf{S}_j^{*} &= \mathbf{S}_j(\mathbf{S}_{j+1}, u_j^{*}), \end{aligned} \qquad j = N-2, N-3, \ldots, 1, 0,$$

получают стратегию оптимального прогноза (рис. 3.20).

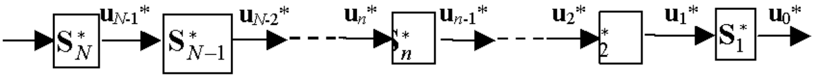


Рис. 3.20. Стратегия оптимального прогноза по использованию оборудования

Для приведенного примера имеем оптимальный прогноз, представленный на рис. 3.21.

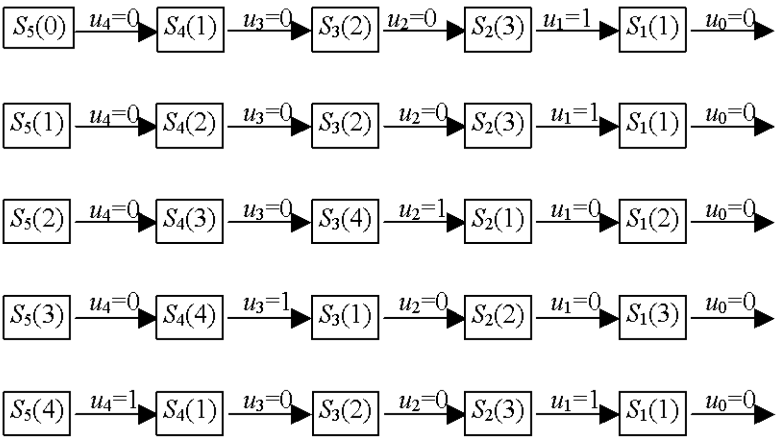


Рис. 3.21. Стратегия оптимального прогноза по использованию оборудования в рассматриваемом примере

Прокомментируем результаты оптимизации.

Если на пятилетний срок работы предприятия вначале введено:

– новое оборудование, то его нужно заменить на новое один раз через три года эксплуатации;

– оборудование, находившееся в эксплуатации один год, то его также нужно заменить на новое один раз через три года эксплуатации;

– оборудование, находившееся в эксплуатации два года, то его нужно заменить на новое один раз через два года эксплуатации;

– оборудование, находившееся в эксплуатации три года, то его нужно заменить на новое один раз через один год эксплуатации;

– оборудование, находившееся в эксплуатации четыре года, то нужно дважды произвести замену оборудования на новое: сразу же и через два года работы предприятия после замены оборудования.

Контрольные вопросы

1. Какие требования предъявляются к целевой функции для применения динамического программирования в дискретной форме при оптимизации?
2. Что понимают под состоянием системы (объекта) в динамическом программировании в дискретной форме?
3. Что понимается под стадией в динамическом программировании?
4. Что понимается под шагом решения задачи в динамическом программировании?
5. Каково содержание функциональных уравнений динамического программирования в дискретной форме?
6. Каков алгоритм решения задачи оптимизации для многостадийного процесса при последовательных преобразованиях состояний?
7. Каков алгоритм решения задачи оптимизации при параллельных преобразованиях состояний (в задачах распределения)?
8. Каков алгоритм выделения оптимальных управлений в динамическом программировании?

3.4.5. Линейное программирование

Линейное программирование – это математическая теория, изучающая методы решения линейных экстремальных задач, т.е. задач нахождения экстремума (максимума или минимума) целевой функции $Q(\mathbf{u}) = C_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i u_i$, которая линейно зависит от управляющих переменных, причём уравнения связей тоже линейны. Здесь $C_0, \ldots C_n$ – постоянные.

3.4.5.1. Особенности задач линейного программирования

Линейность целевой функции и линейность условий связи варьируемых переменных являются основной особенностью задач линейного программирования.

Задача линейного программирования формулируется следующим образом:

$$Q(\mathbf{u}) = C_0 + C_1 u_1 + \ldots + C_n u_n \to \min_{\mathbf{u}}(\max) \qquad (3.133)$$

при условиях:

$$\begin{array}{l} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \le b_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \le b_m \end{array}, \qquad (3.134)$$

$$u_i \ge 0,\ i = 1,\ldots,n. \qquad (3.135)$$

В пространстве переменных $u_i,\ i = 1,\ldots,n$ геометрическая фигура целевой функции, изображающая условие $Q(\mathbf{u}) = const$, есть гиперплоскость, а область допустимых значений переменных в соответствии с приведенными выше условиями является многогранником. Грани многогранника – плоскости, а ребра многогранника – прямые линии, причем эта область выпуклая.

Для двумерной задачи область допустимых управлений приведена на рис. 3.22.

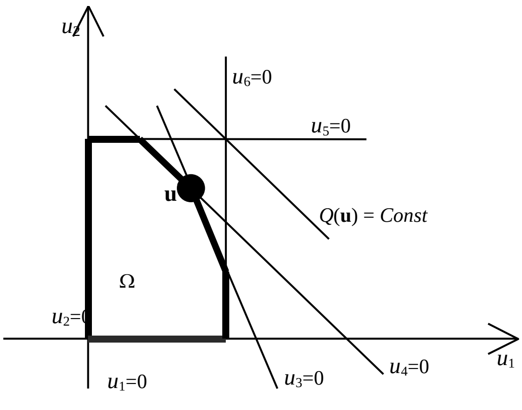


Рис. 3.22. Область допустимых управлений в задаче линейного программирования

В связи с вышеизложенным оптимальному состоянию системы в задаче линейного программирования соответствует одна из вершин многогранника ограничений или оптимальное решение имеет бесчисленное множество точек, принадлежащих одной из граней многогранника ограничений.

Последнее имеет место в том случае, когда коэффициенты при соответствующих переменных $u_i, i = 1,...,n$ в целевой функции пропорциональны коэффициентам при тех же переменных в одном из условий связи.

В задачах линейного программирования целевая функция называется линейной формой.

Систему неравенств, связывающих переменные, можно переписать в канонической форме

$$\begin{array}{l} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n + u_{n+1} = b_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2n}u_n + u_{n+2} = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mn}u_n + u_{n+m} = b_m \end{array}, \qquad (3.136)$$

$$u_{n+j} \geq 0, \; j = 1,...,n . \qquad (3.137)$$

Теперь уравнения границ, получаемых при обращении исходных условий связи из неравенств в равенства, можно записать в виде $u_k = 0, k = 1,...,n, n+1,...,n+m$.

Рассматривая общее число переменных $u_1, u_2,..., u_n, u_{n+1},..., u_{n+m}$, отметим следующее свойство задач линейного программирования: в вершинах многогранника ограничений ровно столько переменных обращается в нуль, сколько степеней свободы имеет система, а остальные переменные в нуль не обращаются.

Анализ числа степеней свободы системы показывает, что имеется m уравнений, связывающих $n+m$ переменных $u_k, k = 1,...,n+m$. Следовательно, число степеней свободы ровно $n+m-m=n$. Таким образом, в вершине многогранника ограничений ровно n переменных из $u_k, k = 1,...,n+m$ обращаются в нуль. Эти переменные называются свободными переменными. Остальные m переменных в нуль не обращаются и называются базисными переменными. Вершины многогранника ограничений называются базисами.

3.4.5.2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Двумерная задача линейного программирования может быть решена геометрически путём построения области допустимых управлений и построения линии уровня (постоянного значения линейной формы). В общем случае для решения задач линейного программирования используется симплекс-метод.

Сущность симплекс-метода состоит в том, что из исходного базиса переходят за один шаг в соседний с ним базис. Проверяют выполнение условий оптимальности в этом базисе. Если условие оптимальности не выполняется, то из этого базиса переходят в другой соседний с ним базис.

Алгоритм решения задачи симплекс-методом

1. Выбирается исходный базис с координатами $\mathbf{u}^1=(u_1,u_2,...,u_n,u_{n+1},...,u_{n+m})=(0,...,0,b_1,...,b_m)$.

2. Систему связи, взятую в канонической форме, записывают в виде выражений базисных переменных через свободные, т.е. $u_k=b_k-a_{k1}u_1-a_{k2}u_2-...-a_{kn}u_n$, $k=1,...,m$.

Линейная форма также выражается через свободные переменные $Q(\mathbf{u})=C_0+C_1u_1+...+C_{i-1}u_{i-1}+C_iu_i+C_{i+1}u_{i+1}+...+C_nu_n$

3. В выражении линейной формы выбирается та переменная $\mathrm{u_i}$, увеличение которой в области $\mathbf{u}\geq\mathbf{0}$ относительно исходного базиса вызывает улучшение линейной формы.

4. Рассматриваются построчно отношения константы b_k к коэффициенту a_{ki} при переменной u_i, причем, при коэффициенте a_{ki} должен быть отрицательный знак.

5. Выбирается j-ая строка из системы связей, удовлетворяющая условию $b_j/a_{ji}=\min\limits_{k=1,\dots,n;\ a_{ki}>0}(b_k/a_{ki})$.

$$
\begin{aligned}
&u_{n+1}=b_1-a_{11}u_1-...-a_{1i-1}u_{i-1}-a_{1i}u_i-a_{1i+1}u_{i+1}-...-a_{1n}u_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&u_{n+j-1}=b_{j-1}-a_{j-11}u_1-...-a_{j-1i-1}u_{i-1}-a_{j-1i}u_i-\\
&-a_{j-1i+1}u_{i+1}-...-a_{j-1n}u_n\\
&u_{n+j}=b_j-a_{j1}u_1-...-a_{ji-1}u_{i-1}-a_{ji}u_i-a_{ji+1}u_{i+1}-...-a_{jn}u_n\,. \qquad (3.138)\\
&u_{n+j+1}=b_{j+1}-a_{j+11}u_1-...-a_{j+1i-1}u_{i-1}-a_{j+1i}u_i-\\
&-a_{j+1i+1}u_{i+1}-...-a_{j+1n}u_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&u_{n+m}=b_m-a_{m1}u_1-...-a_{mi-1}u_{i-1}-a_{mi}u_i-a_{mi+1}u_{i+1}-...-a_{mn}u_n
\end{aligned}
$$

В выбранной строке коэффициент a_{ji} называется разрешающим элементом, а сама строка называется строкой, содержащей разрешающий элемент.

Заметим, что когда переменная u_i принимает значение $u_i = b_i / a_{ji}$, переменная u_{n+j} обращается в нуль.

Следовательно, осуществлен переход в соседний базис, где переменная u_i приняла значение, равное нулю, т.е. стала свободной. При указанном значении $u_i = b_i / a_{ji}$ условие $u_{n+k} \geq 0,\, k = 1,\ldots,m$ выполняется.

6. Из строки, содержащей разрешающий элемент, u_i выражается как

$$u_i = b_i / a_{ji} - (a_{j1} / a_{ji}) u_1 - \ldots - (a_{j\,j-1} / a_{ji}) u_{i-1} - (1/a_{ji}) u_{n+j} -$$
$$- (a_{j\,i+1} / a_{ji}) u_{i+1} - \ldots - (a_{jn} / a_{ji}) u_n$$

и подставляется в остальные строки системы уравнений связи.

После приведения подобных членов получается

$$\begin{array}{l}
u_{n+1} = \bar{b}_1 - \bar{a}_{11} u_1 - \ldots - \bar{a}_{1i-1} u_{i-1} - \bar{a}_{1n+j} u_{n+j} - \\
\bar{a}_{1i+1} u_{i+1} - \ldots - \bar{a}_{1n} u_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_{n+j-1} = \bar{b}_{j-1} - \bar{a}_{j-11} u_1 - \ldots - \bar{a}_{j-1i-1} u_{i-1} - \bar{a}_{j-1n+j} u_{n+j} - \\
- \bar{a}_{j-1i+1} u_{i+1} - \ldots - \bar{a}_{j-1n} u_n \\
u_{n+j} = 0 \\
u_{n+j+1} = \bar{b}_{j+1} - \bar{a}_{j+11} u_1 - \ldots - \bar{a}_{j+1i-1} u_{i-1} - \bar{a}_{j+1n+j} u_{n+j} - \\
- \bar{a}_{j+1i+1} u_{i+1} - \ldots - \bar{a}_{j+1n} u_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_{n+m} = \bar{b}_m - \bar{a}_{m1} u_1 - \ldots - \bar{a}_{mi-1} u_{i-1} - \bar{a}_{mn+j} u_{n+j} - \\
- \bar{a}_{mi+1} u_{i+1} - \ldots - \bar{a}_{mn} u_n
\end{array} \quad . \quad (3.139)$$

7. Выражение u_i подставляется в линейную форму. После приведения подобных членов получается:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 u_1 + \ldots + \bar{C}_{i-1} u_{i-1} + \bar{C}_{n+j} u_{n+j} + \\ + \bar{C}_{i+1} u_{i+1} + \ldots + \bar{C}_{m+n} u_{m+n} \end{aligned} \qquad (3.140)$$

8. Записываются координаты базиса, в который пришли

$$\mathbf{u}^2 =$$
$$= (u_1,\ldots,u_{i-1},u_{n+j},u_{i+1},\ldots,u_n,u_{i+1},\ldots,u_{n+j-1},u_i,u_{n+j+1},\ldots,u_{n+m}) = .$$
$$= (0,\ldots,0,0,0,\ldots,0,\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{j-1},\bar{b}_i = b_i / a_{ji},\bar{b}_{j+1},\ldots,\bar{b}_{n+m})$$

Значение линейной формы в этом базисе $Q = \overline{C}_0$.

9. Проверяется условие оптимальности базиса $\mathbf{u}^2$.

Если для базиса $\mathbf{u}^2$ в задаче $Q(\mathbf{u}) \to \min$ имеет место $C_i > 0$, а в задаче $Q(\mathbf{u}) \to \max$ имеет место $C_i < 0$, где C_i – любой из коэффициентов линейной формы, исключая C_0, то базис $\mathbf{u}^2$ является оптимальным.

10. Если условие оптимальности не выполняется, то в выражении линейной формы $Q(\mathbf{u})$ выбирается переменная, улучшающая линейную форму при возрастании этой переменной, и повторяются пункты 4–9.

При практической реализации симплекс-метода переход от одного базиса к другому и проверка базиса на оптимальность формализуются с использованием упрощающих приемов в форме симплекс-таблиц.

3.4.5.3. Симплекс-таблицы

Система ограничений представляется в виде

$$\begin{array}{l}
u_{n+1} + a_{11}u_1 + \ldots + a_{1i-1}u_{i-1} + a_{1i}u_i + a_{1i+1}u_{i+1} + \ldots + a_{1n}u_n = b_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{n+j-1} + a_{j-11}u_1 + \ldots + a_{j-1i-1}u_{i-1} + a_{j-1i}u_i + a_{j-1i+1}u_{i+1} + \ldots \\
\ldots + a_{j-1n}u_n = b_{j-1} \\
u_{n+j} + a_{j1}u_1 + \ldots + a_{ji-1}u_{i-1} + a_{ji}u_i + a_{ji+1}u_{i+1} + \ldots + a_{jn}u_n = b_j \\
u_{n+j+1} + a_{j+11}u_1 + \ldots + a_{j+1i-1}u_{i-1} + a_{j+1i}u_i + a_{j+1i+1}u_{i+1} + \ldots \\
\ldots + a_{j+1n}u_n = b_{j+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{n+m} + a_{m1}u_1 + \ldots + a_{mi-1}u_{i-1} + a_{mi}u_i + a_{mi+1}u_{i+1} + \ldots \\
\cdots + a_{mn}u_n = b_m
\end{array}, \quad (3.141)$$

а линейная форма представляется в виде

$$Q(\mathbf{u}) - C_1u_1 - \ldots - C_{i-1}u_{i-1} - C_iu_i - C_{i+1}u_{i+1} - \ldots - C_nu_n = C_0 \qquad (3.142)$$

В приведенных уравнениях свободными переменными являются $u_1,\ldots,u_n$. Координаты исходного базиса

$$\mathbf{u}^1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+m}) = (0,\ldots,0,b_1,\ldots,b_m).$$

Этому состоянию соответствует симплекс-таблица 1 .

(Симплекс – таблица 1)

Базисные перем.	Своб.члены	Переменные													
		u_{n+1}	…	u_{n+j-1}	u_{n+j}	u_{n+j+1}	…	u_{n+m}	u_1	…	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	…	u_n
u_{n+1}	b_1	1	…	0	0	0	…	0	a_{11}	…	$a_{1\ i-1}$	$a_{1\ i}$	$a_{1\ i+1}$	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
u_{n+j-1}	b_{j-1}	0	…	1	0	0	…	0	$a_{j-1\ 1}$	…	$a_{j-1\ i-1}$	$a_{j-1\ i}$	$a_{j-1\ i+1}$	…	$a_{j-1\ n}$
u_{n+j}	b_j	0	…	0	1	0	…	0	$a_{j\ 1}$	…	$a_{j\ i-1}$	$a_{j\ i}$	$a_{j\ i+1}$	…	$a_{j\ n}$
u_{n+j+1}	b_{j+1}	0	…	0	0	1	…	0	$a_{j+1\ 1}$	…	$a_{j+1\ i-1}$	$a_{j+1\ i}$	$a_{j+1\ i+1}$	…	$a_{j+1\ n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
u_{n+m}	b_m	0	…	0	0	0	…	1	$a_{m\ 1}$	…	$a_{m\ i-1}$	$a_{m\ i}$	$a_{m\ i+1}$	…	$a_{m\ n}$
линейн. форма Q	C_0	0	…	0	0	0	…	0	$-C_1$	…	$-C_{i-1}$	$-C_i$	$-C_{i+1}$	…	$-C_n$

Пусть разрешающим элементом является a_{ji}. Тогда очередной шаг симплекс-метода состоит в переходе от базиса $\mathbf{u}^1$ к базису $\mathbf{u}^2 =$
$= (u_1,...,u_{i-1},u_i,u_{i+1},...,u_n,u_{n+1},...,u_{n+j-1},u_{n+j},u_{n+j+1},...,u_{n+m}) =$
$= (0,...,0,b_j / a_{ji},0,...,0,b_1,...,b_{j-1},0,b_{j+1},...,b_m)$

через систему

$$\begin{array}{l}
u_{n+1} + \tilde{a}_{1i}u_1 + ... + \tilde{a}_{1i-1}u_{i-1} + \tilde{a}_{1j}u_{n+j} + \tilde{a}_{1i+1}u_{i+1} + ... + \tilde{a}_{1n}u_n = \tilde{b}_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_{n+j-1} + \tilde{a}_{j-11}u_1 + ... + \tilde{a}_{j-1i-1}u_{i-1} + \tilde{a}_{j-1j}u_{n+j} + \tilde{a}_{j-1i+1}u_{i+1} + ... \\
... + \tilde{a}_{j-1n}u_n = \tilde{b}_{j-1} \\
u_i + \tilde{a}_{i1}u_1 + ... + \tilde{a}_{ii-1}u_{i-1} + \tilde{a}_{ij}u_{n+j} + \tilde{a}_{ii+1}u_{i+1} + ... + \tilde{a}_{in}u_n = \tilde{b}_i \\
u_{n+j+1} + \tilde{a}_{j+11}u_1 + ... + \tilde{a}_{j+1i-1}u_{i-1} + \tilde{a}_{j+1j}u_{n+j} + \tilde{a}_{j+1i+1}u_{i+1} + ... \\
... + \tilde{a}_{j+1n}u_n = \tilde{b}_{j+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_{n+m} + \tilde{a}_{m1}u_1 + ... + \tilde{a}_{mi-1}u_{i-1} + \tilde{a}_{mj}u_{n+j} + \tilde{a}_{mi+1}u_{i+1} + ... \\
\cdots + \tilde{a}_{mn}u_n = \tilde{b}_m
\end{array} . \quad (3.143)$$

При этом линейная форма принимает вид:

$$-\tilde{C}_1u_1 - ... - \tilde{C}_{i-1}u_{i-1} - \tilde{C}_ju_{n+j} - \tilde{C}_{i+1}u_{i+1} - ... - \tilde{C}_nu_n = \tilde{C}_0 . \quad (3.144)$$

Базису $\mathbf{u}^2$ соответствует симплекс-таблица 2.