Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал

№ 2(68)

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.

Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук, включён в Единый государственный перечень научных изданий — «Белый список» (уровень 3)

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

Редакционный совет: Ю. Н. Радаев, И. Э. Келлер, В. П. Радченко, А. И. Шашкин, Л. Ю. Коссович, А. А. Маркин, Л. А. Игумнов, А. А. Алексеев, А. А. Буренин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. Н. Богданов, А. Н. Власов, Д. В. Георгиевский, В. В. Глаголев, М. А. Гузев, Д. В. Иванов, Р. А. Каюмов, Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин, Л. А. Максимова, Н. В. Минаева, М. Н. Михин, Ю. В. Немировский, В. Н. Орлов, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, К. Б. Устинов, А. Д. Чернышов, А. В. Чигарев, М. В. Шитикова

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: https://limit21.ru

© Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, 2026

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA

Scientific journal
№ 2(68)

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov, B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor" (Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia" (reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Council: Yu. N. Radayev, I. E. Keller, V. P. Radchenko, A. I. Shashkin, L. Yu. Kossovich, A. A. Markin, L. A. Igumnov, A. A. Alekseev, A. A. Burenin

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. N. Bogdanov, A. N. Vlasov, D. V. Georgievsky, V. V. Glagolev, M. A. Guzev, D. V. Ivanov, R. A. Kayumov, D. M. Klimov, V. A. Kovalev, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin, L. A. Maksimova, N. V. Minaeva, M. N. Mikhin, Yu. V. Nemirovskii, V. N. Orlov, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporykhin, A. A. Treshchev, K. B. Ustinov, A. D. Chernyshev, A. V. Chigarev, M. V. Shitikova

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: http://limit21.ru

© I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, 2026

Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.009 *EDN: GEUHBR*
Научная статья *УДК: 539.374*

А. С. Бегун

КОНЕЧНЫЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ НЕСЖИМАЕМОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток, Россия

Владивостокский государственный университет, Владивосток, Россия

Аннотация. Рассматривается деформирование несжимаемой упругопластической пластины в условиях цилиндрического изгиба. Для математического моделирования используется модель больших упругопластических деформаций. В условиях плоской деформации при возрастающем изгибающем моменте исследуется сначала чисто упругое деформирование, затем деформирование при наличии областей пластического течения. Считается, что в процессе деформирования каждая линия в поперечном сечении пластины переходит в соответствующую дугу окружности. Для описания исходного недеформированного и текущего деформированного состояний пластины используются декартовая прямоугольная и цилиндрическая системы координат соответственно. Найдены условия начала пластического течения и закономерности его развития. Получены распределения напряжений и деформаций в пластине.

Ключевые слова: большие деформации, цилиндрический изгиб, упругопластический материал.

Бегун Александра Сергеевна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории Механики деформируемого твердого тела Института автоматики и процессов управления ДВО РАН, доцент кафедры Математики и моделирования Владивостокского государственного университета; `e-mail:` asustinova@mail.ru; https://orcid.org/0000-0003-4067-9161; AuthorID: 162735

для цитирования: *Бегун А. С.* Конечный цилиндрический изгиб несжимаемой упругопластической пластины // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 132–141. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.009. EDN: GEUHBR

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Бегун А. С. 2026

Поступила: 01.05.26; принята в печать: 31.07.26; опубликована: XX.XX.XX.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.009 *EDN: GEUHBR*
Research Article

A. S. Begun

FINITE BENDING OF AN INCOMPRESSIBLE ELASTIC-PLASTIC BLOCK

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences Vladivostok, Russia

Vladivostok State University, Vladivostok, Russia

Abstract. This article examines the deformation of an incompressible elastoplastic plate under cylindrical bending. A large elastoplastic deformation model is used for mathematical modeling. Under plane strain conditions with monotonically increasing bending moment, purely elastic deformation is first investigated, followed by deformation in the presence of regions of plastic flow. It is assumed that during deformation, each line in the plate's cross-section transforms into a corresponding circular arc. Cartesian rectangular and cylindrical coordinate systems are used to describe the initial undeformed and current deformed states of the plate, respectively. The conditions for the onset of plastic flow and the patterns of its development are determined. Stress and strain distributions in the plate are obtained.

Keywords: large strains, cylindrical bending, elastic-plastic material.

Aleksandra S. Begun, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher at the Laboratory of Mechanics of Deformable Solids at the Institute of Automation and Control Processes of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Associate Professor at the Department of Mathematics and Modeling at Vladivostok State University; e-mail: asustinova@mail.ru;
https://orcid.org/0000-0003-4067-9161; AuthorID: 162735

to cite this article: *Begun A. S.* Finite bending of an incompressible elastic-plastic block // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 132–141. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.009

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 01.05.26; *accepted: 31.07.26;* *published: XX.XX.XX.*

Введение. Изгиб упругопластической пластины представляет теоретический и практический интерес, поэтому рассматривался неоднократно, например [1—10]. Классические решения основаны на теории Кирхгофа-Лява и описывают поведение пластин при малых перемещениях и деформациях. Однако современные технологии требуют расчета, учитывающего большие деформации, как обратимые, так и необратимые. Решения для чисто упругого конечного изгиба в условиях плоского деформированного состояния представлены в [4, 7]. Жесткопластический изгиб рассматривался в [6]. В работе [3] получены решения для изгиба упругопластических пластин в рамках эйлеровой модели конечных деформаций, основанной на логарифмической скорости. В [1] представлен обзор решений для жесткопластических и упругопластических материалов, а также экспериментальных работ. В настоящей работе цилиндрический изгиб исследуется в рамках модели больших упругопластических деформаций, предложенной в [11].

1. Модельные соотношения. Для описания процесса деформирования будем использовать модель больших деформаций [11]. В эйлеровой системе координат обратимые и необратимые деформации определяются дифференциальными уравнениями переноса:

$$
\begin{gathered}
d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik} e_{kj} - e_{ik} p_{kj} - p_{ik} e_{kj} + e_{ik} p_{ks} e_{sj}, \\
\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2} \left((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik}) e_{kj} + e_{ik} (\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj}) \right), \\
\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik} p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik} n_{kj} + n_{ik} r_{kj}, \\
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(v_{i,j} + v_{j,i} \right), \quad r_{ij} = w_{ij} + z_{ij} \left(e_{ij}, \varepsilon_{ij} \right), \quad w_{ij} = \frac{1}{2} \left(v_{i,j} - v_{j,i} \right),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где u_i и v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды, d_{ij}, e_{ij}, p_{ij} – компоненты тензоров полных, обратимых и пластических деформаций соответственно, r_{ij} – тензор вращений, ε_{ij} и γ_{ij} – компоненты скоростей полных и пластических деформаций.

Считаем, что напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями, и связаны зависимостями:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}) \qquad \text{при} \qquad p_{ij} \equiv 0,$$
$$\sigma_{ij} = -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \qquad \text{при} \qquad p_{ij} \neq 0,$$
$$W = (a-\mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - \kappa J_1 J_2 - \chi J_1^3 + ..., \tag{2}$$
$$J_k = \begin{cases} L_k, & \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0 \\ I_k, & \text{при} \quad p_{ij} \neq 0 \end{cases}, \qquad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki},$$
$$I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \qquad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns},$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, p_1 – добавочное гидростатическое давление, $W = W(e_{ij})$ – упругий потенциал (плотность распределения свободной энергии) , μ – модуль сдвига исследуемого материала, a, b, κ, χ – упругие модули более высокого порядка.

Связь скоростей пластических деформаций ε^p_{ij} с напряжениями в условиях принимаемого принципа максимума Мизеса устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon^p_{ij} = \lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon^p_{ij}) = k, \qquad \lambda > 0. \tag{3}$$

В качестве условия пластичности будем использовать условие Треска

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k, \tag{4}$$

где σ_i, ε^p_k – главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, k – предел текучести.

2. Постановка задачи, основные кинематические соотношения. Пусть в недеформированном состоянии прямоугольная пластина толщиной h и длиной $2l$ занимает область $-h/2 \le x_1 \le h/2$, $-l \le x_2 \le l$, $-b \le x_3 \le b$ (рис. 1). Считаем, что под действием приложенного изгибающего момента $M = M(t)$ пластина деформируется так, что плоскости $x_1 = const$, переходят в сектора цилиндрических поверхностей $r = const$, а плоскости $x_2 = const$ в плоскости $\theta = const$. Внутренняя и внешняя поверхности предполагаются свободными от напряжений $\sigma_{rr}(r_1) = \sigma_{rr}(r_2) = 0$

Начальные (x_1, x_2, x_3) и текущие (y_1, y_2, y_3) координаты точки среды связаны формулами:

$$y_1 = r(x_1)\cos\theta(x_2) - R^*, \quad y_2 = r(x_1)\sin\theta(x_2), \quad y_3 = x_3. \tag{5}$$

Используя условие несжимаемости найдем

$$r = \sqrt{R^2 + 2x_1 r_*}, \quad \theta = \frac{x_2}{r_*}, \quad r' = \frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{r_*}{r}, \quad \theta' = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{1}{r_*} \tag{6}$$

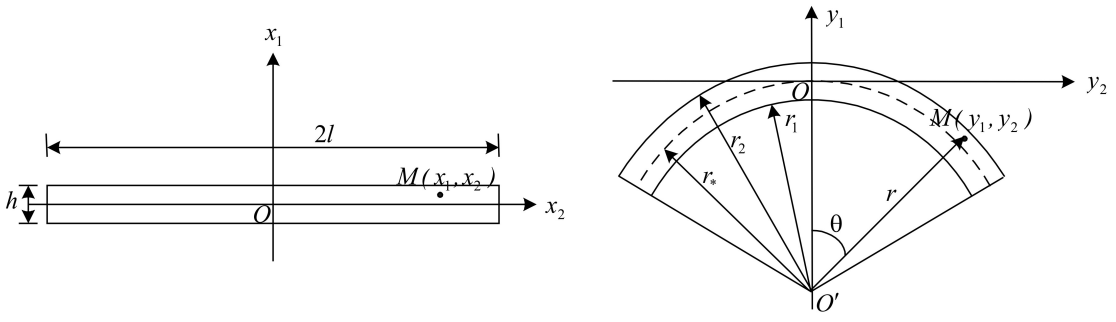


Рис. 1. Недеформированное и деформированное состояние прямоугольной пластины при изгибе.

Если e_1, e_2, e_3 — базисные вектора исходной декартовой системы координат, а e_r, e_φ, e_z – базисные вектора текущей цилиндрической системы координат, тогда для тензора градиента деформаций $\mathbf{F}$ и тензора деформаций Альманси $\mathbf{d}$ получим соотношения

$$\mathbf{F} = r' e_r \otimes e_1 + r\theta' e_\varphi \otimes e_2, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{r}{r_*}\right)^2\right) e_r \otimes e_r + \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{r_*}{r}\right)^2\right) e_\varphi \otimes e_\varphi. \quad (7)$$

Тензор градиента скоростей $\mathbf{L}$, тензор скоростей деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и тензор вращения $\boldsymbol{\omega}$ определяются следующими равенствами

$$\mathbf{L} = \frac{\dot{r}'}{r'} e_r \otimes e_r - \dot{\theta}' e_r \otimes e_\varphi + \dot{\theta}' e_\varphi \otimes e_r - \frac{\dot{r}'}{r'} e_\varphi \otimes e_\varphi,$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\dot{r}'}{r'} e_r \otimes e_r - \frac{\dot{r}'}{r'} e_\varphi \otimes e_\varphi, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}' e_r \otimes e_\varphi + \dot{\theta}' e_\varphi \otimes e_r. \quad (8)$$

Здесь и далее $(\cdot)$ — производная по времени.

3. Упругое деформирование. Считаем, что, до достижения изгибающим моментом M значения M_0 вся пластина деформируется обратимо. Отличные от нуля компоненты тензора напряжения имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -p + a - \mu - (k + 3\chi)(d_{rr} + d_{\varphi\varphi}) - (k + 3\chi)(d_{rr}^2 + d_{\varphi\varphi}^2) + \\
&\quad + 2\mu d_{rr} - 2(k + 2b + 2a) d_{rr}^2, \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= -p + a - \mu - (k + 3\chi)(d_{rr} + d_{\varphi\varphi}) - (k + 3\chi)(d_{rr}^2 + d_{\varphi\varphi}^2) + \\
&\quad + 2\mu d_{\varphi\varphi} - 2(k + 2b + 2a) d_{\varphi\varphi}^2, \\
\sigma_{zz} &= -p + a - \mu + (2b - 3\chi)(d_{rr} + d_{\varphi\varphi}) - (k + 3\chi)(d_{rr}^2 + d_{\varphi\varphi}^2), \\
\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\mu(d_{rr} - d_{\varphi\varphi}) - 2(k + 2b + 2a)(d_{rr}^2 - d_{\varphi\varphi}^2).
\end{aligned} \quad (9)$$

Интегрируя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{r}, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

и считая, что внутренняя и внешняя поверхности свободны от напряжений ($\sigma_{rr}(r_1) = \sigma_{rr}(r_2) = 0$), найдем компоненты напряжений и изгибающий момент

$$\sigma_{rr} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_*^2} + r_*^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)\right) - \frac{k + 2b + 2a}{2}\left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_*^2} + r_*^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{r^4 - r_1^4}{4r_*^4} - \frac{r_*^4}{4}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_1^2}\right)\right),$$
$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + \mu\left(\frac{r^2}{r_*^2} - \frac{r_*^2}{r^2}\right) - \frac{k + 2b + 2a}{2}\left(2\frac{r^2}{r_*^2} - 2\frac{r_*^2}{r^2} - \frac{r^4}{r_*^4} + \frac{r_*^4}{r^4}\right), \tag{11}$$
$$M = \int_{r_1}^{r_2} r\sigma_{\varphi\varphi} dr = \frac{\mu}{2}\left(\frac{r_2^4 - r_1^4}{4r_*^2} + r_*^2 \ln\frac{r_2}{r_1}\right) - \frac{k + 2b + 2a}{4}\left(\frac{r_2^4 - r_1^4}{2r_*^2} - 2r_*^2 \ln\frac{r_2}{r_1} - \right.$$
$$\left. - \frac{r_*^4}{2}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) - \frac{r_2^6 - r_1^6}{6r_*^4}\right), \quad r_*^2 = r_2 r_1.$$

Задавая изгибающий момент и используя соотношение $r_*^2 = r_2 r_1$, получим уравнение для определения положения нейтральной линии r_*

$$\frac{k + 2b + 2a}{4\mu}\left(\frac{1}{2}\left(1 - \tilde{r}_*^4\right) + 2\tilde{r}_*^2 \ln\left(\tilde{r}_*^2\right) + \frac{1}{6}\left(\tilde{r}_*^8 - \frac{1}{\tilde{r}_*^4}\right) - \frac{1}{2}\left(\tilde{r}_*^6 - \frac{1}{\tilde{r}_*^2}\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left(\tilde{r}_*^6 - \frac{1}{\tilde{r}_*^2}\right) - \tilde{r}_*^2 \ln\left(\tilde{r}_*^2\right)\right) = \frac{M(t)}{r_1^2 \mu}, \quad \tilde{r}_* = \frac{r_*}{r_1}.$$

Далее находятся внутренняя r_1 и внешняя r_2 цилиндрические поверхности. Деформации и напряжения находятся из соотношений (7) и (9) соответственно.

Условие пластичности в рассматриваемом случае записывается в виде

$$|\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}| = 2k.$$

Согласно выведенным соотношениям, напряженное состояние достигнет предела текучести одновременно на внутренней $r = r_1$ и внешней $r = r_2$ цилиндрической поверхности.

4. Пластическое течение. После того как изгибающий момент M достигнет значения M_0, в пластине будут упругая область $r_1^p \le r \le r_2^p$ и две пластические области $r_2^p \le r \le r_2$ и $r_1 \le r \le r_1^p$, развивающиеся от внешней и внутренней границы соответственно. Интегрируя уравнения равновесия и используя граничные условия $\sigma_{rr}(r_1) = \sigma_{rr}(r_2) = 0$, в областях пластического течения найдем

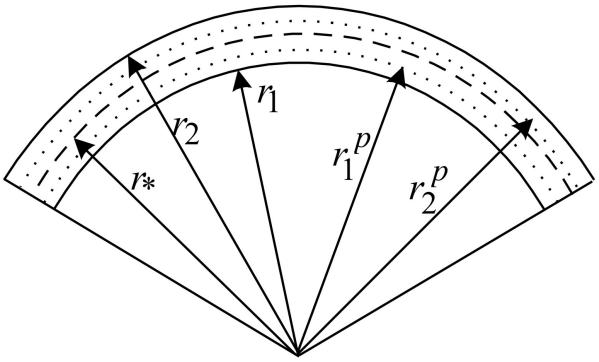


Рис. 2. Упругая и пластические области.

$$r_1 \le r \le r_1^p: \quad \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = -2k, \quad \sigma_{rr} = 2k \ln \frac{r_1}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \left(\ln \frac{r_1}{r} - 1 \right); \quad (12)$$

$$r_2^p \le r \le r_2: \quad \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = 2k, \quad \sigma_{rr} = 2k \ln \frac{r}{r_2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \left(\ln \frac{r}{r_2} + 1 \right).$$

Используя условие непрерывности напряжений на упругопластической границе $r = r_1^p$ в области обратимого деформирования $r_1^p \le r \le r_2^p$ имеем:

$$\sigma_{rr} = -\frac{k+2b+2a}{2} \left(\frac{r^2 - r_1^{p2}}{r_*^2} + r_*^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^{p2}} \right) - \frac{r^4 - r_1^{p4}}{4r_*^4} - \frac{r_*^4}{4} \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_1^{p4}} \right) \right) +$$

$$+ \frac{\mu}{2} \left(\frac{r^2 - r_1^{p2}}{r_*^2} + r_*^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^{p2}} \right) \right) + 2k \ln \frac{r_1}{r_1^p}, \quad (13)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + \mu \left(\frac{r^2}{r_*^2} - \frac{r_*^2}{r^2} \right) - \frac{k+2b+2a}{2} \left(2\frac{r^2}{r_*^2} - 2\frac{r_*^2}{r^2} - \frac{r^4}{r_*^4} + \frac{r_*^4}{r^4} \right).$$

Изгибающий момент теперь можно вычислить по формуле

$$M = \int_{r_1}^{r_2} r\sigma_{\varphi\varphi} dr = \int_{r_1}^{r_1^p} r\sigma_{\varphi\varphi} dr + \int_{r_1^p}^{r_2^p} r\sigma_{\varphi\varphi} dr + \int_{r_2^p}^{r_2} r\sigma_{\varphi\varphi} dr =$$

$$= \frac{\mu}{2} \left(\frac{r_2^{p4} - r_1^{p4}}{4r_*^2} + r_*^2 \ln \frac{r_2^p}{r_1^p} \right) - \frac{k+2b+2a}{4} \left(\frac{r_2^{p4} - r_1^{p4}}{2r_*^2} - 2r_*^2 \ln \frac{r_2^p}{r_1^p} - \right. \quad (14)$$

$$\left. - \frac{r_*^4}{2} \left(\frac{1}{r_2^{p2}} - \frac{1}{r_1^{p2}} \right) - \frac{r_2^{p6} - r_1^{p6}}{6r_*^4} \right) + k \left(\frac{r_2^2 - r_2^{p2} + r_1^2 - r_1^{p2}}{2} - r_2^{p2} \ln \frac{r_2^p}{r_2} - r_1^{p2} \ln \frac{r_1^p}{r_1} \right).$$

Используя соотношения (14) и (13) и условие непрерывности напряжений на упругопластических границах, получим систему алгебраических уравнений

для определения положения нейтральной линии r_*, внутренней r_1, внешней r_2 поверхностей и упругопластических границ r_1^p и r_2^p

$$M(t)=\frac{\mu}{2}\left(\frac{r_2^{p4}-r_1^{p4}}{4r_*^2}+r_*^2\ln\frac{r_2^p}{r_1^p}\right)-\frac{k+2b+2a}{4}\left(\frac{r_2^{p4}-r_1^{p4}}{2r_*^2}-2r_*^2\ln\frac{r_2^p}{r_1^p}-\right.$$

$$\left.-\frac{r_*^4}{2}\left(\frac{1}{r_2^{p2}}-\frac{1}{r_1^{p2}}\right)-\frac{r_2^{p6}-r_1^{p6}}{6r_*^4}\right)+k\left(\frac{r_2^2-r_2^{p2}+r_1^2-r_1^{p2}}{2}-r_2^{p2}\ln\frac{r_2^p}{r_2}-r_1^{p2}\ln\frac{r_1^p}{r_1}\right),$$

$$\mu\left(\frac{r_1^{p2}}{r_*^2}-\frac{r_*^2}{r_1^{p2}}\right)-\frac{k+2b+2a}{2}\left(2\frac{r_1^{p2}}{r_*^2}-2\frac{r_*^2}{r_1^{p2}}-\frac{r_1^{p4}}{r_*^4}+\frac{r_*^4}{r_1^{p4}}\right)=-2k,$$

$$\mu\left(\frac{r_2^{p2}}{r_*^2}-\frac{r_*^2}{r_2^{p2}}\right)-\frac{k+2b+2a}{2}\left(2\frac{r_2^{p2}}{r_*^2}-2\frac{r_*^2}{r_2^{p2}}-\frac{r_2^{p4}}{r_*^4}+\frac{r_*^4}{r_2^{p4}}\right)=2k$$

$$-\frac{k+2b+2a}{2}\left(\frac{r_2^{p2}-r_1^{p2}}{r_*^2}+r_*^2\left(\frac{1}{r_2^{p2}}-\frac{1}{r_1^{p2}}\right)-\frac{r_2^{p4}-r_1^{p4}}{4r_*^4}-\frac{r_*^4}{4}\left(\frac{1}{r_2^{p4}}-\frac{1}{r_1^{p4}}\right)\right)+$$

$$+\frac{\mu}{2}\left(\frac{r_2^{p2}-r_1^{p2}}{r_*^2}+r_*^2\left(\frac{1}{r_2^{p2}}-\frac{1}{r_1^{p2}}\right)\right)=2k\ln\frac{r_2r_1^p}{r_1r_2^p},\quad r_2^2-r_1^2=2hr_*.$$

Далее находим компоненты тензора напряжений и тензора деформаций Альманси. В упругой области $r_1^p\le r\le r_2^p$ для компонент обратимых деформаций справедливы формулы

$$e_{rr}=1-\sqrt{1-2d_{rr}}=1-\frac{r}{r_*},\quad e_{\varphi\varphi}=1-\sqrt{1-2d_{\varphi\varphi}}=1-\frac{r_*}{r}.\qquad(15)$$

На рис.3 показано изменение упругопластических границ и нейтральной линии.

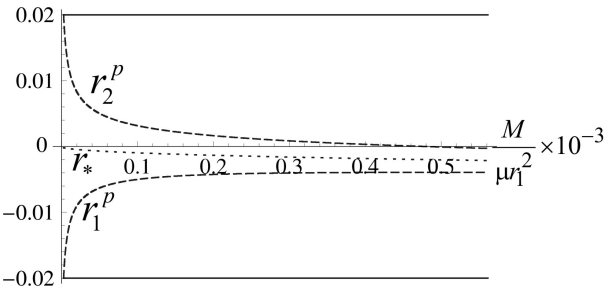


Рис. 3. Изменение упругопластических границ и нейтральной линии.

В областях пластического течения обратимые деформации не изменяются и равны в каждой точке значению в тот момент времени, когда до нее дошла упругопластическая граница. Компоненты пластических деформаций через полные

и обратимые деформации находятся по формулам

$$p_{rr} = \frac{1}{2} - \frac{1-2d_{rr}}{2(e_{rr}-1)^2}, \quad p_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} - \frac{1-2d_{\varphi\varphi}}{2(e_{\varphi\varphi}-1)^2}. \tag{16}$$

5. Заключение. В рамках модели больших упругопластических деформаций получено решение о цилиндрическом изгибе прямоугольной пластины. Найдены условия зарождения и продвижения упругопластических границ. Рассчитаны поля напряжений и полных, обратимых и необратимых деформаций. Представленное решение может в дальнейшем использоваться для задачи разгрузки пластины при постепенном уменьшении изгибающего момента.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (тема № FWFW-2021-0005).

ADDITIONAL INFORMATION

Competing interests. The author declare that they have no competing interests.
Funding. The research was carried out within the state assignment of IACP FEB RAS (Theme № FWFW-2021-0005) .

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexandrov S., Lyamina E., Hwang Y.-M. Plastic Bending at Large Strain: A Review // Processes. 2021. Т. 9, № 3. С. 406. DOI: 10.3390/pr9030406.
2. Arslan E., Eraslan A. N. Analytical solution to the bending of a nonlinearly hardening wide curved bar // Acta Mechanica. 2010. Т. 210, № 1. С. 71–84. DOI: 10.1007/s00707-009-0195-y.
3. Bruhns O. T., Gupta N. K., Meyers A. T. M., Xiao H. Bending of an elastoplastic strip with isotropic and kinematic hardening // Archive of Applied Mechanics. 2003. Т. 72. С. 759–778. DOI: 10.1007/s00419-002-0273-2.
4. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
5. Dadras P. Plane strain elastic-plastic bending of a strain hardening curved beam // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. Т. 43, № 1. С. 39–56. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00104-4.
6. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, UK: Clarendon Press, 1950.
7. Kassianidid F., Ogden R. On large bending deformations of transversely isotropic rectangular elastic blocks // Note di Matematica. 2007. Т. 27, № 2. С. 131–154. DOI: 10.1285/i15900932v27n2p131.
8. Rivlin R. S. Large elastic deformations of isotropic materials – V: The problem of flexure // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1949. Т. 195. С. 463–473. DOI: 10.1098/rspa.1949.0004.
9. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970.
10. Yu T. X., Zhang L. C. Plastic Bending: Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 1996. DOI: 10.1142/2754.

11. Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Доклады Академии наук. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.

REFERENCES

1. Alexandrov S., Lyamina E., Hwang Y.-M. Plastic Bending at Large Strain: A Review // Processes. 2021. Vol. 9, no. 3. P. 406. DOI: 10.3390/pr9030406.
2. Arslan E., Eraslan A. N. Analytical solution to the bending of a nonlinearly hardening wide curved bar // Acta Mechanica. 2010. Vol. 210, no. 1. P. 71–84. DOI: 10.1007/s00707-009-0195-y.
3. Bruhns O. T., Gupta N. K., Meyers A. T. M., Xiao H. Bending of an elastoplastic strip with isotropic and kinematic hardening // Archive of Applied Mechanics. 2003. Vol. 72. P. 759–778. DOI: 10.1007/s00419-002-0273-2.
4. Chernykh K. F. Nonlinear Theory of Elasticity in Mechanical Engineering Calculations. L.: Mechanical Engineering, 1986. 336 p.
5. Dadras P. Plane strain elastic-plastic bending of a strain hardening curved beam // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. Vol. 43, no. 1. P. 39–56. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00104-4.
6. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, UK: Clarendon Press, 1950.
7. Kassianidid F., Ogden R. On large bending deformations of transversely isotropic rectangular elastic blocks // Note di Matematica. 2007. Vol. 27, no. 2. P. 131–154. DOI: 10.1285/i15900932v27n2p131.
8. Rivlin R. S. Large elastic deformations of isotropic materials – V: The problem of flexure // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1949. Vol. 195. P. 463–473. DOI: 10.1098/rspa.1949.0004.
9. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970.
10. Yu T. X., Zhang L. C. Plastic Bending: Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 1996. DOI: 10.1142/2754.
11. Burenin A., Bykovtsev G., Kovtanyuk L. A simple model of finite strain in an elastoplastic medium // Doklady Physics. 1996. Vol. 41, no. 3. P. 127–129.

Содержание

Профессор Сергей Михайлович Айзикович. К 75-летию со дня рождения 7

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Система определяющих неравенств в механике линейных анизотропных тел Гука 32

Канду В. В., Круссер А. И, Шепелев А. С., Шитикова М. В. Анализ вынужденных нелинейных колебаний пластин на вязкоупругом основании Пастернака на основе модели Кельвина-Фойгта с дробными производными 50

Адамов А. А., Келлер И. Э. Базовые испытания и идентификация модели вязкоупругого поведения эластомеров при конечных деформациях 83

Лавит И. М., Перова О. С. Напряженное состояние окрестности вершины центральной трещины в прямоугольной полосе 104

Стрелков К. С. Применение модели деформационного упрочнения для оценки герметичности премиальных резьбовых соединений 119

Бегун А. С. Конечный цилиндрический изгиб несжимаемой упругопластической пластины 132

Михин М. Н. О приведении энергии деформации гемитропных тел к каноническому виду методом Якоби 142

Петров М. В., Алексеева О. А., Михайлов Б. В. Экспериментальное исследование потери устойчивости пустых и наполненных сыпучим заполнителем тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при изгибе с кручением 156

Зайко Н. Ю., Любимова О. Н. О связи коэффициентов трения и стесненной деформации в контактной задаче при температурных нагрузках 173

Андрюкова В. Ю, Тарасов В. Н. Устойчивость системы арок, подкрепленных нерастяжимыми нитями 192

Торосян В. С., Погосян А. В. Об исследовании качественных закономерностей изменения скачков напряжений на границе прямоугольной области в одной известной задаче линейной эластостатики 202

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Каноническое преобразование деформаций и изгибов–кручений в случае гемитропной микрополряной среды 215

Информация о постоянно действующих семинарах в Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Орлов В. Н. Сингулярная задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения дробного порядка 232

Корнев Ю. В., Гилязова Р. Ф., Драч Е. А., Муромцев Д. Н., Майский А. В., Валиев Х. Х., Келбышева Е. С., Джага А. О. Экспериментально-теоретическое исследование влияния параметров

микроструктуры на механические свойства дисперснонаполненных эластомерных и полимерных композитов 239

Сорокин Г. С. Аналитико-численные методы определения эффективных механических характеристик композитных материалов на примере скальных грунтов и композитов для медицинского применения 247

Гузев М. А. Удаление сингулярности поля напряжений для проблемы Вильямса (1952) на основе неевклидовой модели сплошной среды 252

Мурашкин Е. В. Псевдотензорные представления в термомеханике полуизометрических микрополярных тел 257

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА 261

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ 265

СОДЕРЖАНИЕ 267

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА

СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2026. № 2 (68)

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать XX.XX.2026. Выход в свет XX.XX.2026.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX 2_ε. Усл. печ. л. XX,X.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38