

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВЛАДИВОСТОКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И
СЕРВИСА»

На правах рукописи

Панченко

Панченко Галина Леонидовна

**УПРУГИЕ, РЕОЛОГИЧЕСКИЕ И ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В
ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТЕЧЕНИЯХ МАТЕРИАЛОВ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф. – м.н. Ковтанюк Л.В.

Владивосток – 2014

Содержание

Введение	4
Глава 1. Основные соотношения математической модели больших упругопластических деформаций	16
1.1. Кинематика больших упругопластических деформаций....	17
1.2. Определяющие законы	21
1.3. Конкретизация определяющих законов	25
Глава 2. Прямолинейное течение в упруговязкопластическом цилиндрическом слое в условиях возможного проскальзывания материала	34
2.1. Прямолинейное течение в упруговязкопластическом цилиндрическом слое в случае проскальзывания материала в окрестности внутренней поверхности	35
2.1.1. Постановка задачи, обратимое деформирование.....	35
2.1.2. Вязкопластическое течение.....	39
2.1.3. Торможение вязкопластического течения и разгрузка среды.....	46
2.1.4. Деформирование среды при движении внешнего жесткого цилиндра.....	52
2.2. Прямолинейное течение в упруговязкопластическом цилиндрическом слое в случае проскальзывания материала в окрестности внешней поверхности.....	61
2.2.1. Обратимое деформирование и вязкопластическое течение	61
2.2.2. Торможение вязкопластического течения и разгрузка среды.....	65
2.2.3. Деформирование среды при движении внешнего цилиндра.....	70

2.3. Прямолинейное течение в упруговязкопластическом цилиндрическом слое при возможном двустороннем проскальзывании материала.....	76
2.3.1. Обратимое деформирование и вязкопластическое течение.....	76
2.3.2. Торможение вязкопластического течения и разгрузка среды.....	81
2.3.3. Деформирование среды при движении внешнего жесткого цилиндра.....	87
Глава 3. Неизотермическое деформирование упруговязкопластического плоского тяжелого слоя.....	95
3.1. Обратимое деформирование.....	96
3.2. Вязкопластическое течение.....	100
Глава 4. Неизотермическое деформирование упруговязкопластического плоского горизонтального слоя.....	106
4.1. Постановка задачи. Упругое деформирование.....	106
4.2. Развивающееся вязкопластическое течение.....	113
4.3. Течение при постоянном напряжении.....	120
4.4. Течение при уменьшающемся напряжении и разгрузка среды.....	128
4.5. Охлаждение.....	145
Заключение.....	148
Список литературы.....	151

Введение

При математическом моделировании процессов необратимого деформирования материалов упругие свойства материала обычно не учитываются. Обратимые деформации считают малыми по сравнению с необратимыми и ими можно пренебречь. Для описания таких процессов служит модель жестковязкопластического тела Шведова-Бингама. В этой модели считается, что вязкопластическое течение начинается при достижении напряженным состоянием поверхности текучести. Материал разделяется на части, в которых он не деформируется, и области течения. Границы, разделяющие такие области, заранее не известны. В прошлом столетии был разработан математический аппарат для расчетов параметров вязкопластических течений. Можно отметить метод последовательных приближений, предложенный А.В. Резунным и А.Д. Чернышовым [108], подход, основанный на вариационном исчислении, разработанный П.П. Мосоловым и В.П. Мясниковым [80, 81]. С помощью модели Шведова-Бингама получен ряд аналитических решений задач, в том числе о прямолинейных течениях [23, 82, 116].

В современной технологической практике в расчетах режимов интенсивного формоизменения металлов при обработке их термомеханическим воздействием (прокатка, скоростная штамповка, волочение и др.) должны учитываться упругие свойства материалов. Так как именно упругие свойства и связанные с ними обратимые деформации могут вызывать заметные геометрические изменения в форме и объеме продеформированных сред в процессах разгрузки. Также по упругим деформациям производится расчет остаточных напряжений, которые оказывают существенное влияние на характеристики готовых изделий в процессе эксплуатации и для их снятия требуются специальные технологические приемы: отпуск, отжиг и др.

Используемые технологические приемы обработки материалов термомеханическим воздействием могут осуществляться в условиях пристеночно-

го скольжения. При достаточно больших скоростях скольжения невозможно пренебречь разогревом поверхности за счет трения, более того, в пристеночных областях развивающееся вязкопластическое течение также не является изотермическим. Следовательно, приходим к необходимости использования для моделирования подобных технологий связанной математической модели термоупругопластических деформаций. При этом в таких пристеночных областях течения хотя бы необратимые деформации считать малыми нельзя. Следовательно, адекватной моделью для подобных технологических процессов становится математическая модель больших деформаций. Развитие фундаментальной механики деформирования привело к возможности постановок задач данного класса. В настоящей работе изучаются особенности постановок некоторых таких модельных задач и приводятся их решения. Таким образом, актуальность в рассмотрении таких задач диктуется не только нуждами в развитии фундаментальной теории больших деформаций материалов, но и ответом на вызов технологической практики, связанный с потребностью в моделировании соответствующих технологий.

Учет упругих, реологических и теплофизических свойств приводит к существенно нелинейной задаче математической физики с неизвестными движущимися упругопластическими границами, отделяющими области упругого деформирования от областей вязкопластического течения. Решение такой задачи связано с некоторыми проблемами. Первая проблема связана с тем, что область деформирования разделяется на подобласти, в которых решение краевых задач строится разными способами. В области пластического течения задача решается в скоростях, в то время как в области обратимого деформирования – в перемещениях. При этом на упругопластической границе напряжения, скорости и перемещения должны быть непрерывны. Но найти перемещения в области вязкопластического течения по скоростям не всегда возможно [30–32]. Вторая проблема – выбор математической модели больших упругопластических деформаций. До настоящего времени, несмот-

ря на то, что предложено достаточное количество моделей [159, 160], общепризнанной математической модели больших упругопластических деформаций фундаментальная механика не имеет по двум причинам. Первая – определение обратимых и необратимых деформаций. Полные деформации материала можно измерить экспериментально. Но вот их составляющие – упругую и пластическую по отдельности измерить нельзя. Поэтому исследователь сам решает, каким образом он разделит полные деформации на обратимую и необратимую составляющие. При обобщении теории пластического течения [33, 34, 40, 41, 118, 121, 122, 124] на случай учета конечных упругопластических деформаций возникает вторая проблема – определение тензора скоростей пластических деформаций, без которого нельзя записать ассоциированный закон пластического течения. Тензор скоростей необратимых деформаций обычно определяют с помощью какой-либо объективной производной по времени от тензора пластических деформаций (Яумана, Олдройда, Трусдела и др. [4]). В [4, 140, 150, 151] этот вопрос решается путем проведения экспериментов. Однако такой подход не может быть обобщен на другие виды деформирования, и нет гарантии, что наиболее подходящая в данном случае производная была выбрана. В связи с этим существует много моделей больших упругопластических деформаций.

Первой работой, в которой изучалась кинематика конечных упругопластических деформаций, является монография Л.И. Седова [117]. В ней предложено представлять тензор полных деформаций как сумму тензоров упругих и пластических деформаций, а вектор перемещений – в виде суммы упругой и пластической частей. Но такой подход не является математически корректным.

Сильное влияние на развитие теории больших упругопластических деформаций оказало предложение Е. Ли [168] представить градиент полной деформации в следующем виде

$$F = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{r}_0} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}_0} = F_e F_p,$$

где \bar{r}_0 и \bar{r} – радиус-векторы начального и текущего положений точки деформируемой среды, \bar{p} – радиус-вектор этой же точки в состоянии разгрузки, F_e и F_p – градиенты упругой и пластической деформации. Однако при разложении F , принятом в [168] принципы материальной индифферентности и термодинамической допустимости выполняются только для изотропных материалов, а для анизотропных не имеют места. Несмотря на недостатки в подходе Е. Ли, его идеи получили свое развитие [28, 55, 65, 66, 91, 127, 142, 149, 153, 155, 156, 165, 168, 189].

А. Грин и Р. Нахди в своих работах [155, 156] пытались исправить недостатки кинематики Е. Ли, а также обобщить модель на анизотропный случай. В этих работах предлагается разделение полных деформаций E на обратимую E_e и необратимую E_p составляющие как $E = E_e + E_p$. Из-за такого представления закон упругости становится сильно зависимым от необратимых деформаций, а такую теорию практически не возможно конкретизировать.

В работах [126, 173] получены обобщения кинематики Ли на термоупругопластические среды. В работе [173] в изотропном случае градиент термоупругой деформации F_e раскладывается на произведения градиентов упругой F_{ee} и температурной деформации F_θ (аналогично разложению Ли[168]): $F_e = F_{ee} F_\theta$, причем ввиду изотропии F_θ – шаровой тензор. При принятии такого соотношения возникают проблемы, связанные с инвариантностью относительно вращения в промежуточной конфигурации. В работе [126] аналогичное разложение приведено для изотропного терможесткопластического материала $F_{p\theta} = F_\theta F_p$. В работе [187] для термоупругопластического материала, по аналогии с работами Грина и Нахди [155, 156], принято аддитивное разложение $E = E_e + E_p + E_\theta$, где E_θ – мера температурной де-

формации. Однако имеющиеся в таких подходах недостатки не устранены добавлением температурных градиентов деформаций [126, 173] и температурных деформаций [187].

Кондауров В.И. и Кукуджанов В.Н. в статьях [55, 62] строят модель конечных упругопластических деформаций, учитывающей вязкие свойства материалов на стадии пластического течения. В рамках построенной модели рассматривались закономерности распространения волн напряжений [57, 61] и предлагались методы расчетов нестационарных задач упругопластического деформирования твердых тел [56, 62]. Авторы данных работ исправили неточности в подходе Ли, а также конкретизировали модельные зависимости для решения конкретных краевых задач.

Р. Клифтон в своей работе [149] использует следующее разложение

$$F = F_p F_e.$$

Это разложение отличается от разложения Е. Ли порядком следования сомножителей.

С. Немат-Нассер [183] в качестве исходного принимает разложение вектора перемещений u в виде суммы обратимой u_e и пластической u_p составляющих.

Исследования Киевской школы механиков [66–69, 84] обобщены в монографии В.И. Левитаса [65]. Построенная В.И. Левитасом кинематика конечных упругопластических деформаций не содержит большинства недостатков предшественников. Однако свою теорию В.И. Левитас строит на положении Е. Ли о существовании разгрузочного состояния. Поэтому оказалось нужным ввести дополнительные ограничения, которые освободили теорию от зависимости упругих деформаций от пластических в процессах разгрузки. В своей монографии [65] В.И. Левитас значительное внимание уделяет проблеме выбора объективной производной для связи скоростей пластических деформаций с тензором необратимых деформаций. Чтобы избавиться от не-

однозначности в выборе объективной производной В.И. Левитас ввел новую объективную производную, названную R – производной. С ее помощью стало возможным обобщить определяющие зависимости в случае деформирования без конечных поворотов на общий случай. Таким образом, проблема неоднозначного выбора из общетеоретической проблемы переходит в задачу конкретизации модели на уровне простых нагружений. С помощью данной теории получен ряд численных решений краевых задач [72, 73, 86–89].

А.Д. Чернышов в своей работе [127] предложил использовать законы термодинамики в построении модели конечных упругопластических деформаций. Модельные соотношения основаны на идее Е. Ли об алгебраическом разделении деформаций на упругую и пластическую составляющие с использованием гипотезы существования единственного разгрузочного состояния. В качестве разгрузочного состояния автор предлагает для каждой частицы среды считать предельным состоянием ее состояние при неограниченном измельчении разгруженного тела. Возникает вопрос, как такое состояние рассчитать? Здесь опять же остается проблема выбора объективной производной.

А.А. Роговой с учениками в своих работах [60, 88, 109] принимают за разгрузочное состояние то же, что и в [127]. Отмечается, что так же как и в разложении Е. Ли [168] и его последователей [55, 65, 183] данное состояние не является единственно возможным и подчеркивается, что необоснованно принимать условие зануления неупругих конечных поворотов. С целью уточнения кинематики больших упругопластических деформаций предлагается рассматривать процесс накопления деформаций как последовательное наложение малых упругих и пластических деформаций на конечные. Таким образом, все проблемы, связанные с разделением деформаций на упругие и пластические переходят на уровень приращения деформаций, где необратимыми принимаются деформации до некоторой промежуточной конфигурации, полученной при неизменяющихся напряжениях, а обратимыми – от

промежуточной до текущей конфигурации. Так как упругие и пластические деформации можно считать малыми, то при наложении считается, что упругие и пластические деформации в сумме дают полные. Вводом промежуточной конфигурации принимается гипотеза о том, что обратимые деформации не влияют в малом на процесс приобретения необратимых. В работах [110–112] такая модель была обобщена на случай учета температурных эффектов.

Теория, изначальные предположения которой отличаются от модели Е. Ли, были разработана на Дальнем Востоке А.А. Бурениным, Г.И. Быковцевым, Л.В. Ковтанюк, В.П. Мясниковым и А.И. Шитиковым [5, 24, 54, 83]. В работе В.П. Мясникова [83] на основе законов неравновесной термодинамики предложены определяющие соотношения для необратимо деформируемых материалов. Предлагается упругие и пластические деформации считать параметрами состояния. Для таких параметров состояния выписываются дифференциальные уравнения их изменения (переноса). В этом случае не возникает проблемы выбора объективной производной, так как дифференциальные уравнения переноса соответствующих тензоров деформаций содержат тензоры скоростей их изменения, входящих в уравнения в качестве источников. С использованием такого подхода способ разделения полных деформаций на упругую и пластическую составляющие оказывается непринципиальным. В работе Г.И. Быковцева и А.В. Шитикова [24] определение обратимых и необратимых деформаций основано на постулировании для них дифференциальных уравнений их изменения. Здесь отсутствует понятие промежуточной (разгрузочной) конфигурации, любое состояние разгрузки определяется только его начальными параметрами и не зависит от характера деформирования. В работе [5] представлена математическая модель больших упругопластических деформаций. В этой модели обратимые и необратимые деформации определяются через уравнения переноса. Делается предположение, что тензор необратимых деформаций в процессах разгрузки не изменяется, в то время как его компоненты меняются так же, как и при жестком

вращении тела. Теория значительно упрощается при использовании предположения, что термодинамические потенциалы (внутренняя энергия, свободная энергия) не зависят от пластических деформаций. Поэтому напряжения в среде определяются только упругими деформациями. Необратимые же деформации определяют только диссипативный механизм деформирования.

Описанный выше подход в дальнейшем получил свое развитие. Так было сделано обобщение математической модели больших упругопластических деформаций на случай учета теплофизических и реологических эффектов [45, 54]. В рамках данной модели решены разные краевые задачи. В [6, 7, 13, 15, 16, 48] получен ряд решений задач о пластическом течении и формировании полей остаточных напряжений в окрестностях микронеоднородностей упругопластического материала. В работах [7, 8, 11, 12, 46, 47, 92] получены решения задач о прямолинейных вязкопластических течениях. Прямолинейные вязкопластические течения с учетом теплофизических эффектов изучались в [14, 51, 53]. Вязкометрические течения упруговязкопластических материалов рассматривались в работах [17–19, 53]. Динамические задачи рассматриваемой теории в одномерном случае изучались в [10].

Выше рассматривались модели больших упругопластических деформаций, основой которых является теории пластического течения. Также делались попытки обобщить деформационную теорию пластичности (теория упругопластических процессов А.А. Ильюшина) [35–38], чтобы она могла учитывать конечные деформации [25, 77–79, 97, 98, 106, 120, 143, 144, 198, 199]. Интересна монография А.А. Поздеева, П.В. Трусова и Ю.И. Няшина [99], Они провели большое количество исследований по теории больших необратимых деформаций, когда обратимые считаются малыми. С помощью такой модели были поставлены краевые задачи термоупругопластичности, а также рассмотрены методы их решения, в основу которых положен метод Галеркина и конечноэлементные соотношения.

Учет теплофизических свойств материала при построении моделей уп-

ругоупругих деформаций вызывает значительные трудности, связанные с тем, что приходится решать систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В общем случае такие системы не разрешимы. Поэтому очень важными становятся решения конкретных краевых задач. В большинстве случаев неизоэластические связанные задачи решаются с использованием приближенных или численных методов. Одним из популярных методов для решения неизоэластических связанных задач является метод конечных элементов.

Значительное внимание проблемам термопластичности и термоупруго-пластичности в своих работах [128–135, 154, 180, 188–192] посвящают Ю.Н. Шевченко и его ученики. В этих работах исследуется теория термовязкопластичности, которая описывает неизоэластические процессы нагружения с учетом геометрии и траектории деформирования элемента тела, разрабатываются экспериментальные методы исследования свойств материалов, вызванные высокой температурой. В своей монографии [129] Ю.Н. Шевченко обобщает теории пластичности при неизоэластических нагружениях. В исследованиях [130, 132, 133] на основе теории малых упругоупругих деформаций рассматривается напряженно-деформированное состояние сплошного диска постоянной толщины, коротких сплошных и полых цилиндров и толстой конической оболочки под неравномерным нагревом и другие задачи. В качестве физических уравнений были выбраны уравнения теории простых процессов нагружения, учитывающих историю нагружения. Во всех задачах нелинейные уравнения линеаризуются с использованием метода переменных параметров упругости. В работе [135] уделено внимание осесимметричному упругоупругому напряженному состоянию вращающегося ротора, находящегося в процессе конвективного теплообмена с окружающей средой. В процессе его нагрева возникают области пластического течения, переходящие в области разгрузки. В работе [188] предложены методы исследования трехмерного вязкоупругого напряженно-деформированного состояния

инженерных сооружений под термомеханической нагрузкой. Рассматриваются осесимметричные и неосесимметричные задачи для тел вращения, тел произвольных форм и анизотропных тел вращения в трехмерном случае. В исследовании [189] предлагается модель, описывающая неизотермические процессы деформирования ортотропных тел с учетом деформаций ползучести, истории нагружения и разогрева тела. Основные уравнения записываются в линейной тензорной форме. Также в этой работе описаны эксперименты по определению точных значений скалярных функций, входящих в определяющие уравнения теории. Работа [154] посвящена методу вычисления термоупругопластического состояния слоистых оболочек, основанному на сдвиговой кинематической модели. Линеаризация нелинейных уравнений реализована посредством метода Ньютона.

Целью настоящей работы является постановка и решение краевых задач теории больших упругопластических деформаций о прямолинейных течениях материалов с учетом теплофизических и реологических эффектов.

Диссертация включает введение, четыре главы, заключение и список литературы.

Во введении дано обоснование актуальности темы диссертационной работы, приводится литературный обзор работ, посвященных моделированию больших упругопластических деформаций.

В первой главе диссертации приводятся основные соотношения используемой в дальнейшем при решении задач теории больших упругопластических деформаций. В качестве такой теории выбрана модель, предложенная А.А. Бурениным, Г.И. Быковцевым и Л.В. Ковтанюк [5], и обобщенная на случай учета вязких и теплофизических свойств материала [14, 45, 54].

Во второй главе поставлены и решены краевые задачи теории больших упруговязкопластических деформаций о прямолинейных течениях материала в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями в случаях, когда одна из поверхностей (внутренняя или внешняя) дви-

жется, причем на одной из поверхностей выполняется условие проскальзывания материала, а на другой – условие жесткой спайки, а также, когда на обеих поверхностях возможно проскальзывание материала. Первоначально решается упругая задача, определяются необходимые условия и место зарождения вязкопластического течения с последующей разгрузкой.

В третьей главе рассматривается краевая задача термоупругопластичности о сползании тяжелого слоя с наклонной плоскости при его нагреве за счет вязкопластического течения, обусловленного зависимостью предела текучести материала слоя от температуры.

В четвертой главе решается последовательность связанных задач термоупруговязкопластичности о развитии течения в слое материала, находящегося в условиях нарастающего чистого сдвига, когда неоднородность напряженного состояния слоя вызывается тепловыделением за счет трения о его граничную поверхность; о течении материала слоя при постоянной нагрузке, о торможении течения и его остановке при уменьшающейся нагрузке вплоть до полной разгрузки и охлаждении материала слоя до комнатной температуры. Разработаны конечно-разностные схемы для неизотермических задач с неизвестными движущимися упругопластическими границами.

В заключении приводятся основные результаты и выводы работы.

Увеличение температуры и скорости протекания технологических приемов формования профилей приводит к заметному повышению поверхностной температуры металла, вплоть до оплавления. Предварительный натяг оснастки может вызвать неконтролируемый процесс приповерхностного течения формуемого материала, выводящий технологию на недопустимые режимы. Подобные технологические приемы для своего модельного описания с необходимостью требуют учета в математических моделях связанности процессов деформирования и тепловыделения. При этом часто отсутствует возможность положить деформации малыми.

Известно [115], что штампуемый материал выплавляемой модели, ос-

новное содержание которого составляет парафино-стеариновая смесь, пластически деформируется в пристеночных областях пресс-формы, нагревается до оплавления, заполняя ее конструктивные вогнутости, а после этого застывает, формируя упрочненный приповерхностный слой. Подобные эффекты присущи штамповке в порошковой металлургии. В таких процессах деформации, приобретаемые материалами, большие, наряду с упругими свойствами материалов необходимо учитывать пластические, а в областях течения и вязкие. При этом деформирование и трение о жесткие стенки вызывает заметный разогрев материала. Таким образом, соответствующая задача математического моделирования оказывается задачей теории больших деформаций сред с упругими, пластическими и вязкими свойствами, в которой предел текучести зависит от температуры, а деформирование, тепловыделение и теплопередача не разделяются. Постановок и решений задач, включающих в себя все отмеченные деформационные и теплофизические особенности, теория больших деформаций до настоящего времени не содержит. В диссертации предпринята попытка поставить и решить ряд модельных задач для данных целей.

Полученные решения также могут оказаться полезными для тестирования алгоритмов и программ численных расчетов. Расчетная сложность интенсивного формоизменения с учетом вязкопластических течений в неизотермических условиях продиктована не только существенной нелинейностью математической модели процесса, но и, главное, присутствием движущихся границ, которые разделяют область деформирования на части. В этих областях деформирование и течение подчинено разным системам дифференциальных уравнений в частных производных. В таких случаях требуются специальные алгоритмические приемы. Полученные численно-аналитические решения с успехом могут послужить такой цели.

По теме диссертации опубликовано 11 работ, четыре из них в журналах из перечня ВАК [14, 51, 53, 92].

Глава 1. Основные соотношения математической модели больших упругопластических деформаций

Математические модели больших деформаций, разделяющихся на обратимые и необратимые, предлагались неоднократно [24, 55, 65, 83, 109, 127, 149, 168, 185]. Предложение об использовании уравнений переноса для определения экспериментально не измеримых обратимой (упругой) и необратимой (пластической) составляющих полных деформаций высказывалось ранее в [5, 54, 83]. Основной гипотезой для разделения тензора полных деформаций на составляющие в [5] является неизменность необратимых деформаций в процессах разгрузки. Данного предположения оказалось достаточно для того, чтобы разгрузочное состояние материала полностью определялось его состоянием в момент начала процесса разгрузки, то есть не зависело от характера самого процесса разгрузки. При этом если считать термодинамический потенциал не зависящим от необратимых деформаций, напряжения в деформируемой среде определяются только уровнем и распределением обратимых деформаций.

Математическая модель усложняется при отказе от условий изотермичности процесса деформирования. В этом случае деформирование является источником тепловыделения и инициирует процесс теплопроводности в материале, а постоянные материала (предел текучести, вязкость пластического течения) становятся зависящими от температуры. В этой главе мы запишем замкнутую связанную систему уравнений, описывающую взаимовлияние процессов деформирования и теплопередачи.

1.1. Кинематика больших упругопластических деформаций

Движение точек деформируемой среды будем рассматривать в пространственных координатах Эйлера. С целью упрощения последующих зависимостей будем использовать прямоугольную декартову систему координат x_1, x_2, x_3 . Тогда

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = x_i - a_i(x_1, x_2, x_3, t),$$

где a_i – начальные (материальные) координаты точки движущейся среды (координаты Лагранжа); u_i – компоненты вектора перемещений. Гипотеза сплошности позволяет записать следующие соотношения

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{dx_i}{dt} = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,m} v_m, & u_{i,m} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_m}, \\ \frac{da_{i,j}}{dt} + a_{i,k} v_{k,j} &= 0, & \frac{du_{i,j}}{dt} + u_{i,k} v_{k,j} &= v_{i,j}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Последние зависимости в (1.1) называют уравнениями изменения (переноса) тензоров дисторсии $a_{i,j}$ и градиента перемещений $u_{i,j}$.

В качестве тензора деформаций выберем тензор деформаций Альманси

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}),$$

$$g_{ij} = a_{k,i} a_{k,j},$$

где δ_{ij} – компоненты единичного тензора (составленного из символов Кронекера), g_{ij} – компоненты метрического тензора.

Используя соотношения (1.1), можно получить уравнения изменения метрического тензора g_{ij} и тензора деформаций Альманси d_{ij}

$$\begin{aligned}
\frac{Dg_{ij}}{Dt} &= \frac{dg_{ij}}{dt} + g_{ik}v_{k,j} + v_{k,i}g_{kj} = 0, \\
\frac{Dd_{ij}}{Dt} &= \frac{dd_{ij}}{dt} + d_{ik}v_{k,j} + v_{k,i}d_{kj} = \varepsilon_{ij}, \quad g_{ij} = a_{k,i}a_{k,j}, \\
2d_{ij} &= \delta_{ij} - g_{ij}, \quad 2\varepsilon_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $\frac{D}{Dt}$ – оператор конвективной производной Коттера-Ривлина.

Из (1.1) и (1.2) замечаем, что тензор дисторсии и метрический тензор сохраняются вдоль траектории частицы, так как уравнения их изменения не содержат слагаемых типа источника. Уравнения изменения тензора градиента перемещений и тензора деформаций Альманси включают в себя такие слагаемые ($v_{i,j}$ и ε_{ij} соответственно), поэтому могут изменяться при движении материальной точки. Тело движется без деформаций, как жесткое целое, при $\varepsilon_{ij} = 0$. Из (1.2) в таком случае следует

$$\begin{aligned}
\frac{dg_{ij}}{dt} &= w_{im}g_{mj} + g_{im}w_{jm}, \quad \frac{dd_{ij}}{dt} = w_{im}d_{mj} + d_{im}w_{jm}, \\
w_{is} &= -w_{si} = \frac{1}{2}(v_{i,s} - v_{s,i}) = \varepsilon_{ijs}w_j.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь ε_{ijs} – кососимметричный тензор, составленный из символов Леви-Чивита, w_j – компоненты угловой скорости жесткого вращения среды. Таким образом, если для некоторого тензора s_{ij} в течение какого-то промежутка времени справедлива зависимость

$$\frac{ds_{ij}}{dt} = n_{im}s_{mj} + s_{im}n_{jm}, \quad n_{is} = -n_{si}, \tag{1.4}$$

то изменение компонент тензора s_{ij} связано только с жестким перемещением и поворотом системы координат с угловой скоростью n_k , определяемой тензором n_{ij} ($n_k = -1/2\varepsilon_{kij}n_{ij}$). Это означает, что $s_{ij} = z_{ki}s_{kt}^0z_{tj}$, где s_{kt}^0 – значения компонент тензора в момент начала вращения системы координат, z_{ki} – ком-

поненты ортогонального тензора. При жестком вращении тела (или системы координат) n_{kj} не зависят от x_j . Если такая зависимость присутствует, то вращение системы координат для разных точек тела происходит по-разному. Уравнения (1.3) показывают, как изменяются компоненты тензоров в случае неизменности самих тензоров (деформации при жестком вращении не изменяются). Аналогично, будем говорить, что тензор s_{ij} не меняется в данной точке в течение времени, пока выполнено (1.4).

Представим метрический тензор g_{ij} в виде произведения

$$g_{ij} = (\delta_{ik} - m_{ik})(\delta_{ks} - 2p_{ks})(\delta_{sj} - m_{sj}), \quad (1.5)$$

а для тензора дисторсии $a_{i,j}$ примем представление

$$a_{i,j} = Y_{ik}(\delta_{kj} - m_{kj})$$

Согласно (1.1) можно получить уравнения изменения тензоров m_{ij} и p_{ij}

$$\begin{aligned} \frac{dm_{ij}}{dt} &= v_{i,j} - b_{ij} - m_{ik}v_{k,j} + b_{ik}m_{kj}, \\ \frac{dp_{ij}}{dt} &= \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}) - b_{ki}p_{kj} - p_{ik}b_{kj}, \quad b_{ij} = -Y_{ik}^{-1} \frac{dY_{kj}}{dt}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Потребуем, чтобы тензоры m_{ij} и p_{ij} были симметричными. Это возможно только при условии, следующем из зависимостей (1.6)

$$b_{kt}(\delta_{ij} - m_{ij}) - (\delta_{kt} - m_{kt})b_{jt} = (\delta_{kt} - m_{kt})v_{t,j} - v_{t,k}(\delta_{ij} - m_{ij}). \quad (1.7)$$

Согласно (1.7) тензор b_{kt} не может быть произвольным. Данное равенство можно рассматривать в качестве уравнения для определения компонент тензора b_{kt} , при которых тензоры m_{ij} и p_{ij} становятся симметричными. Решение такого уравнения имеет вид [75]

$$b_{ij} = r_{ij} + (\delta_{ik} - m_{ik})t_{kj}. \quad (1.8)$$

В (1.8) t_{kj} – компоненты произвольного симметричного тензора. Тензор r_{ij} является кососимметричным с компонентами

$$r_{ij} = w_{ij} + A^{-1} \left[B^2 (\varepsilon_{ik} m_{kj} - m_{ik} \varepsilon_{kj}) + B (\varepsilon_{ik} m_{ks} m_{sj} - m_{ik} m_{ks} \varepsilon_{sj}) + m_{ik} \varepsilon_{ks} m_{st} m_{tj} - m_{ik} m_{ks} \varepsilon_{st} m_{tj} \right]$$

$$A = 8 - 8L_1 + 3L_1^2 - L_2 - \frac{1}{3}L_1^3 + \frac{1}{3}L_3, \quad B = 2 - L_1,$$

$$L_1 = m_{ii}, \quad L_2 = m_{ik} m_{ki}, \quad L_3 = m_{ij} m_{jk} m_{ki}.$$

При выполнении условия (1.5) компоненты тензора p_{ij} определены соотношением

$$p_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - Y_{ki} Y_{kj}),$$

а компоненты тензора полных деформаций Альманси вычисляются через m_{ij} и p_{ij} зависимостью

$$d_{ij} = m_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} m_{ik} m_{kj} - m_{ik} p_{kj} - p_{ik} m_{kj} + m_{ik} p_{ks} m_{sj}. \quad (1.9)$$

Уравнения изменения тензоров m_{ij} и p_{ij} при этом имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dm_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij} - t_{ij} - r_{ij} + w_{ij} - m_{ik} (v_{k,j} - t_{kj}) + (r_{ik} + t_{ik}) m_{kj} - m_{it} t_{tk} m_{kj}, \\ \frac{dp_{ij}}{dt} &= t_{ij} - \frac{1}{2} (m_{ik} t_{kj} + t_{ik} m_{kj}) + (r_{ik} - t_{ik}) p_{kj} - p_{ik} (r_{kj} + t_{kj}) + \\ &+ p_{ik} m_{kn} t_{nj} + t_{im} m_{mk} p_{kj}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

В силу произвольности тензора t_{ij} положим первоначально, что $t_{ij} \equiv 0$.

Тогда уравнение изменения тензора p_{ij} принимает форму

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = r_{ik} p_{kj} + p_{ik} r_{jk}. \quad (1.11)$$

Сравнение (1.11) с (1.4) позволяет сделать вывод о неизменности тензора p_{ij} в данном случае. Будем считать, что в это время происходит разгрузка среды, и тензор p_{ij} назовем тензором необратимых (пластических) деформаций. Тензор m_{ij} в (1.9) целесообразно назвать тензором обратимых дефор-

маций. При этом, учитывая симметрию m_{ij} , первое соотношение (1.6) можно переписать в виде

$$\frac{dm_{ij}}{dt} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \left(r_{ik} m_{kj} - m_{ik} r_{kj} - v_{k,i} m_{kj} - m_{ik} v_{k,j} \right) \quad (1.12)$$

Если считать тепловое расширение обратимым, то

$$m_{ij} = e_{ij} + \alpha(T - T_0)\delta_{ij}.$$

Здесь e_{ij} – тензор упругих деформаций, α – коэффициент линейного расширения, T – текущая температура, T_0 – температура тела в свободном состоянии. Заметим, что процесс разгрузки полностью кинематически определен, так как условием разгрузки ($t_{ij} \equiv 0$) исключается из рассмотрения неизвестный до настоящего времени тензор t_{ij} . Определение данного тензора выходит за рамки кинематики.

Следуя (1.9) обратимыми деформациями следовало бы назвать компоненты тензора $m_{ij} - \frac{1}{2} m_{ik} m_{kj}$, так как именно им оказываются равными компоненты полных деформаций при отсутствии пластических ($p_{ij} = 0$). Однако, это только усложняет запись не только уравнения переноса для обратимых деформаций, но и запись формулы Мурнагана при наличии необратимых деформаций $p_{ij} \neq 0$ и, следовательно, всех последующих соотношений.

1.2. Определяющие законы

С целью получения зависимостей напряжений от кинематических параметров воспользуемся законами термодинамики. В качестве термодинамического потенциала будем использовать свободную энергию, для плотности распределения которой, имеем: $\psi = e - Ts$, где e, s – массовые плотности распределения внутренней энергии и энтропии. Параметрами состояния в

этом случае следует считать абсолютную температуру T , компоненты обратимых m_{ij} и необратимых p_{ij} деформаций. Следствием закона сохранения энергии является соотношение

$$\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial m_{ij}} \frac{dm_{ij}}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial p_{ij}} \frac{dp_{ij}}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \frac{dT}{dt} + T \frac{ds}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \sigma_{ij} \varepsilon_{ji} + q_{j,j} = 0. \quad (1.13)$$

В (1.13) σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Эйлера – Коши, q_j – компоненты вектора теплового потока, ρ – плотность среды. В случае $t_{ij} \equiv 0$ из (1.13) следуют зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial m_{ik}} (\delta_{kj} - m_{kj}) + A^{-1} \left(B^2 \left(m_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial m_{ks}} m_{sj} - \frac{\partial \psi}{\partial m_{ik}} m_{ks} m_{sj} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + B \left(m_{ik} m_{kt} \frac{\partial \psi}{\partial m_{ts}} m_{sj} - \frac{\partial \psi}{\partial m_{ik}} m_{ks} m_{st} m_{tj} \right) + m_{ik} m_{ks} \frac{\partial \psi}{\partial m_{st}} m_{tn} m_{nj} - \right. \right. \\ \left. \left. - m_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial m_{ks}} m_{st} m_{tn} m_{nj} \right) \right], \\ m_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial m_{kj}} - \frac{\partial \psi}{\partial m_{ik}} m_{kj} + p_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial p_{kj}} - \frac{\partial \psi}{\partial p_{ik}} p_{kj} = 0, \quad \rho T \frac{ds}{dt} + q_{j,j} = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

При $t_{ij} \neq 0$ получим

$$\begin{aligned} \rho T \frac{ds}{dt} + q_{j,j} = N_{ij} t_{ji} = D, \\ N_{ij} = \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial m_{ij}} - m_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial m_{kj}} - \frac{\partial \psi}{\partial m_{ik}} m_{kj} + m_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial m_{ks}} m_{sj} - \frac{\partial \psi}{\partial p_{ij}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial p_{ik}} m_{kj} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} m_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial p_{kj}} + \frac{\partial \psi}{\partial p_{ik}} p_{kj} + p_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial p_{kj}} - \frac{\partial \psi}{\partial p_{ik}} p_{ks} m_{sj} - m_{ik} p_{ks} \frac{\partial \psi}{\partial p_{sj}} \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отметим, что правая часть первой формулы (1.14) содержит возможно несимметричные слагаемые $\frac{\partial \psi}{\partial m_{ik}} m_{kj}$, $\frac{\partial \psi}{\partial m_{ik}} m_{ks} m_{sj}$, $m_{ik} m_{ks} \frac{\partial \psi}{\partial m_{st}} m_{tj}$,

$\frac{\partial \psi}{\partial m_{ik}} m_{ks} m_{st} m_{tj}$, $m_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial m_{ks}} m_{st} m_{tn} m_{nj}$. Однако, для того чтобы тензор напряжений

σ_{ij} был симметричным, необходимо полагать

$$\begin{aligned}
& m_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial m_{kj}} - \frac{\partial \psi}{\partial m_{ik}} m_{kj} + A^{-1} B^2 \left(m_{ik} m_{ks} \frac{\partial \psi}{\partial m_{sj}} - \frac{\partial \psi}{\partial m_{ik}} m_{ks} m_{sj} \right) + \\
& + A^{-1} B \left(m_{ik} m_{ks} \frac{\partial \psi}{\partial m_{st}} m_{tj} - m_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial m_{ks}} m_{st} m_{tj} + m_{ik} m_{ks} m_{st} \frac{\partial \psi}{\partial m_{tj}} - \right. \\
& \left. - \frac{\partial \psi}{\partial m_{ik}} m_{ks} m_{st} m_{tj} + m_{ik} m_{ks} m_{st} \frac{\partial \psi}{\partial m_{tj}} \right) + A^{-1} \left(m_{ik} m_{ks} m_{st} \frac{\partial \psi}{\partial m_{tn}} m_{nj} - \right. \\
& \left. - m_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial m_{ks}} m_{st} m_{tn} m_{nj} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Равенство (1.16) возможно только в случае симметрии тензора $m_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial m_{kj}}$. Из второго уравнения (1.14) в таком случае следует и симметрия

тензора $p_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial p_{kj}}$. Тогда первое соотношение (1.14) переписывается в форме,

аналогичной формуле Мурнагана, известной в нелинейной теории упругости

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial m_{ik}} (\delta_{kj} - m_{kj}). \tag{1.17}$$

Третье соотношение (1.14) является уравнением баланса энтропии. В силу необратимости процесса пластического течения в правой части этого уравнения, записанного для процессов необратимого деформирования (первая формула (1.15)), стоит источник энтропии D . В теории идеальной пластичности производство энтропии называют диссипативной функцией и определяют зависимостью $D = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p$, где ε_{ij}^p – тензор скоростей пластических деформаций. Принятие данного положения позволяет определить механический смысл тензора t_{ij} ; с тензором скоростей пластических деформаций ε_{ij}^p он связан зависимостью

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p = N_{ij} t_{ij}.$$

Наиболее просто на основе этого соотношения произвольный тензор t_{ij} встраивается в кинематическую схему, если, как и в [5], принять гипотезу о независимости свободной энергии от пластических деформаций. В этом случае имеем

$$b_{ij} = r_{ij} + \varepsilon_{ij}^p.$$

Исключая тензор b_{ij} из второго уравнения (1.6), получим зависимость, которая определяет однозначную связь тензора пластических деформаций с тензором скоростей пластических деформаций

$$\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \frac{dp_{ij}}{dt} + p_{is}r_{sj} + p_{is}\varepsilon_{sj}^p + r_{si}p_{sj} + \varepsilon_{si}^p p_{sj} = \varepsilon_{ij}^p. \quad (1.18)$$

Соотношением (1.18) вводится определение объективной производной по времени, связывающей необратимые деформации со скоростью их изменения. Заметим, что (1.18) явилось не предметом «выбора», как в большинстве теорий [65], а прямым следствием законов термодинамики.

При построении модели упругопластической среды предполагается, что материал деформируется обратимо, если напряженное состояние соответствует в пространстве напряжений неравенству $F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_i, T) < 0$.

Поверхность нагружения $F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_i, T) = 0$, где χ_i – параметры истории, в условиях принципа максимума Мизеса $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)\varepsilon_{ij}^p \geq 0$, где σ_{ij}^* – статически допустимое напряжение, оказывается пластическим потенциалом. Ассоциированный закон пластического течения при этом записывается в форме

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda = \lambda(\varepsilon_{ij}^p, p_{ij}, \chi_i) > 0. \quad (1.19)$$

Математическая модель будет замкнутой, если постулировать кинетические уравнения для параметров истории: $\dot{\chi}_i = A_{ij}\chi_j$.

В простейшем случае можно принять уравнение поверхности нагружения в виде

$$F(\sigma_{ij}) = k(1 - \varphi(T)),$$

где k – предел текучести материала. В качестве $F(\sigma_{ij})$ можно использовать классические зависимости максимального касательного напряжения (призма Треска), максимального приведенного напряжения (призма Ивлева) или максимального октаэдрического напряжения (цилиндр Мизеса). В качестве обобщения модели можно принять, что тепловое расширение имеет необратимую составляющую. В этом случае в качестве поверхности нагружения следует в простейшем случае использовать соответствующее обобщение конуса Мизеса – Шлейхера или пирамиды Кулона – Мора.

1.3. Конкретизация определяющих законов

В областях, где пластические деформации отсутствуют, тензор полных деформаций Альманси имеет компоненты

$$d_{ij} = m_{ij} - \frac{1}{2} m_{ik} m_{kj}.$$

Закон связи напряжений с деформациями для таких областей согласно (1.17) принимает вид

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial d_{ik}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}). \quad (1.20)$$

В случае независимости свободной энергии от пластических деформаций в областях, где пластические деформации отсутствуют, можно принять, что

$$W = \rho_0 \psi = W(d_{ij}, T),$$

где W – упругий потенциал, ρ_0 – плотность материала в недеформированном состоянии ($d_{ij} = 0$, $T = const$). Зависимость (1.20) для вычисления напряжений в упругой области в этом случае переписется в виде

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial d_{ik}} (\delta_{kj} - 2d_{kj})$$

Для изотропной среды данная функция зависит только от инвариантов тензора d_{ij} и температуры T : $W = W(J_1, J_2, J_3, T)$. Выберем ее в виде разложения в ряд Тейлора относительно свободного состояния, ограничиваясь слагаемыми до третьего порядка по компонентам d_{ij} и T :

$$W = \lambda/2J_1^2 + \mu J_2 - \nu\theta J_1 + \nu_1\theta^2 + lJ_1J_2 + mJ_1^3 + nJ_3 + \kappa_1J_1\theta^2 + \kappa_2J_1^2\theta + \kappa_3J_2\theta - \nu_2\theta^3, \quad \theta = (T - T_0)T_0^{-1}, \quad J_1 = d_{kk}, \quad J_2 = d_{ik}d_{ki}, \quad J_3 = d_{ik}d_{kj}d_{ji}. \quad (1.21)$$

Коэффициенты $\lambda, \mu, \nu, \nu_1, l, m, n, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \nu_2$ являются термоупругими постоянными среды. Воспользовавшись уравнением неразрывности

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - 2J_1 + 2J_1^2 - 2J_2 - \frac{4}{3}J_1^3 + 4J_1J_2 - \frac{8}{3}J_3\right)^{\frac{1}{2}},$$

раскладывая величину ρ/ρ_0 в ряд, получим

$$\sigma_{ij} = \left(1 - J_1 + \frac{1}{2}J_1^2 - J_2 + J_1J_2 - \frac{4}{3}J_3 - \frac{1}{6}J_1^3\right) \left(\frac{\partial W}{\partial J_1} \delta_{ij} + 2\left(\frac{\partial W}{\partial J_2} - \frac{\partial W}{\partial J_1}\right) d_{ij} + \left(3\frac{\partial W}{\partial J_3} - 4\frac{\partial W}{\partial J_2}\right) d_{ik}d_{kj} - 6\frac{\partial W}{\partial J_3} d_{is}d_{sk}d_{kj}\right).$$

Раскрывая скобки, приводя подобные слагаемые и оставляя слагаемые до второго порядка по деформациям и температуре, получим зависимость для вычисления напряжений в областях обратимого деформирования

$$\sigma_{ij} = ((\lambda + (\nu + 2\kappa_2)\theta)d_{kk} - \nu\theta + ld_{st}d_{ts} + (3m - \lambda)d_{kk}^2 + \kappa_1\theta^2)\delta_{ij} + 2(\mu + (l - \lambda - \mu)d_{kk} + (\kappa_3 + \nu)\theta)d_{ij} + (3n - 4\mu)d_{ik}d_{kj}. \quad (1.22)$$

Из уравнения баланса энтропии (третье равенство (1.14)) в этом случае следует

$$\frac{\rho}{\rho_0} (1 + \theta) \left((2\kappa_1\theta - \nu + 2\kappa_2J_1) \frac{dJ_1}{dt} + (2\nu_1 + 2\kappa_1J_1 - 6\nu_2\theta) \frac{d\theta}{dt} + \kappa_3 \frac{dJ_2}{dt} \right) = q_{j,j}. \quad (1.23)$$

Учитывая, что

$$\frac{dJ_1}{dt} = \varepsilon_{kk} - 2\varepsilon_{sk} d_{sk}, \quad \frac{dJ_2}{dt} = 2\varepsilon_{sk} d_{sk} - 4\varepsilon_{sk} d_{kt} d_{ts},$$

из (1.23) следует уравнение теплопроводности

$$(1 + j_1 d_{kk} + j_2 \theta) \frac{d\theta}{dt} + (j_3 + j_4 \theta + j_5 d_{kk}) \varepsilon_{kk} + j_6 \varepsilon_{ij} d_{ji} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j},$$

$$j_1 = \frac{\kappa_1}{\nu_1} - 1, \quad j_2 = 1 - 3 \frac{\nu_2}{\nu_1}, \quad j_3 = -\frac{\nu}{2\nu_1},$$

$$j_4 = \frac{2\kappa_1 - \nu}{2\nu_1}, \quad j_5 = \frac{\nu + 2\kappa_2}{2\nu_1}, \quad j_6 = \frac{\nu + \kappa_3}{\nu_1}.$$
(1.24)

Здесь q – коэффициент температуропроводности.

В области разгрузки для упругого потенциала $W(m_{ij}, T)$ примем зависимость, аналогичную (1.21)

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \nu \theta I_1 + \nu_1 \theta^2 + l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \kappa_1 I_1 \theta^2 + \kappa_2 I_1^2 \theta +$$

$$+ \kappa_3 I_2 \theta - \nu_2 \theta^3, \quad I_1 = c_{kk}, \quad I_2 = c_{ik} c_{ki}, \quad I_3 = c_{ik} c_{kj} c_{ji}, \quad c_{ij} = m_{ij} - \frac{1}{2} m_{ik} m_{kj}.$$
(1.25)

Подстановка зависимостей (1.25) в формулу для вычисления напряжений (1.17), записанную для нашего случая в виде

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial m_{ik}} (\delta_{kj} - m_{kj}),$$

приводит к соотношению

$$\sigma_{ij} = ((\lambda + (\nu + 2\kappa_2)\theta) I_1 - \nu\theta + l I_2 + (3m - \lambda) I_1^2 + \kappa_1 \theta^2) \delta_{ij} +$$

$$+ 2(\mu + (l - \lambda - \mu) I_1 + (\kappa_3 + \nu)\theta) m_{ij} + (3n - 5\mu - (l - \lambda - \mu) I_1 -$$

$$- (\kappa_3 + \nu)\theta) m_{ik} m_{kj} + (4\mu - 3n) m_{ik} m_{ks} m_{sj} + \left(\frac{3}{4} n - \mu \right) m_{ik} m_{ks} m_{st} m_{tj}.$$
(1.26)

Выбор инвариантов в виде (1.25) и присутствие слагаемых до четвертого порядка по компонентам деформаций m_{ij} в (1.26) обеспечивает предельный переход от (1.26) к (1.22) при стремлении к нулю пластических деформаций.

Вычислим производные $\frac{dI_1}{dt}$ и $\frac{dI_2}{dt}$, необходимые при записи уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= \frac{dm_{kk}}{dt} - \frac{1}{2} \left(\frac{dm_{st}}{dt} m_{ts} + m_{st} \frac{dm_{ts}}{dt} \right) = \frac{dm_{kk}}{dt} - \frac{dm_{st}}{dt} m_{ts}, \\ \frac{dI_2}{dt} &= 2 \frac{dm_{st}}{dt} m_{st} - 3 \frac{dm_{st}}{dt} m_{tk} m_{ks} + \frac{dm_{st}}{dt} m_{tk} m_{ki} m_{is}.\end{aligned}\quad (1.27)$$

Воспользовавшись зависимостью (1.12), получим

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= \varepsilon_{kk} - 2\varepsilon_{it} m_{ti} + m_{in} \varepsilon_{nt} m_{ti}, \\ \frac{dI_2}{dt} &= 2\varepsilon_{it} m_{ti} - 5m_{in} \varepsilon_{nt} m_{ti} + 4m_{in} \varepsilon_{nt} m_{ts} m_{si} - m_{in} \varepsilon_{nt} m_{ts} m_{sk} m_{ki}.\end{aligned}\quad (1.28)$$

С учетом (1.28) уравнение теплопроводности для областей разгрузки запишется в виде

$$(1 + j_1 c_{kk} + j_2 \theta) \frac{d\theta}{dt} + (j_3 + j_4 \theta + j_5 c_{kk}) \varepsilon_{kk} + j_6 \varepsilon_{ij} c_{ji} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (1.29)$$

В областях пластического течения напряжения будут вычисляться по формуле (1.26) Учитывая, что производная $\frac{dm_{ij}}{dt}$ в этом случае определяется первым соотношением (1.10), из (1.27) получим

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= \varepsilon_{kk} - b_{kk} - 2(\varepsilon_{it} - b_{it}) m_{ti} + m_{in} (\varepsilon_{nt} - b_{nt}) m_{ti}, \\ \frac{dI_2}{dt} &= 2(\varepsilon_{it} - b_{it}) m_{ti} - 5m_{in} (\varepsilon_{nt} - b_{nt}) m_{ti} + \\ &+ 4m_{in} (\varepsilon_{nt} - b_{nt}) m_{ts} m_{si} - m_{in} (\varepsilon_{nt} - b_{nt}) m_{ts} m_{sk} m_{ki}.\end{aligned}\quad (1.30)$$

В простейшем варианте теории, при выполнении условия независимости свободной энергии от пластических деформаций, тензор b_{ij} в (1.30) следует заменить его симметричной частью ε_{ij}^p . Тогда уравнение теплопроводности для областей пластического течения переписется в форме

$$\begin{aligned}
& (1 + j_1 c_{kk} + j_2 \theta) \frac{d\theta}{dt} + (j_3 + j_4 \theta + j_5 c_{kk}) (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^p) + \\
& + j_6 (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) c_{ji} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{2\nu_1} \sigma_{ij} \varepsilon_{ji}^p.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Рассмотрим далее случай присутствия в среде внутренней геометрической связи, запрещающей изменение ее объема за счет механического воздействия. Выделенный объем среды может измениться только за счет теплового расширения (сжатия). Тогда формулы Мурнагана (1.17) и (1.20) следует записать в форме

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= -P_1 \delta_{ij} + \frac{1}{1 + 3\beta\theta} \frac{\partial W}{\partial m_{ik}} (\delta_{kj} - m_{kj}), \quad \beta = \alpha T_0, \\
\sigma_{ij} &= -P \delta_{ij} + \frac{1}{1 + 3\beta\theta} \frac{\partial W}{\partial d_{ik}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}).
\end{aligned} \tag{1.32}$$

В (1.32) P, P_1 – неизвестные функции добавочного гидростатического давления. Условие механической несжимаемости

$$1 - 2J_1 + 2J_1^2 - 2J_2 - \frac{4}{3}J_1^3 + 4J_1J_2 - \frac{8}{3}J_3 = (1 + 3\beta\theta)^{-2} \tag{1.33}$$

в областях обратимого деформирования и аналогичное с использованием инвариантов I_1, I_2, I_3 в областях пластического течения и разгрузки позволяют считать независимыми только J_1, J_2 (I_1, I_2) и θ . В этом случае напряжения могут присутствовать и в недеформированной среде, поэтому в разложении функции $W(J_1, J_2, \theta)$ в ряд Тейлора могут присутствовать и линейные слагаемые

$$\begin{aligned}
W &= (a - \mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - \kappa J_1J_2 - \zeta J_1^3 + \nu \theta J_1 + \\
&+ \nu_1 \theta^2 - \kappa_1 J_1 \theta^2 - \kappa_2 J_1^2 \theta - \kappa_3 J_2 \theta - \nu_2 \theta^3.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

В (1.34) μ – модуль сдвига, другие термомеханические постоянные $a, b, \kappa, \zeta, \nu, \nu_1, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \nu_2$ не имеют ярко выраженного механического смысла, но могут быть определены экспериментально.

Подстановка (1.34) в третье соотношение (1.32) приводит к зависимо-

сти

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \frac{1}{1+3\beta\theta} \left(\frac{\partial W}{\partial J_1} \delta_{ij} + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial J_2} - \frac{\partial W}{\partial J_1} \right) d_{ij} - 4 \frac{\partial W}{\partial J_2} d_{ik} d_{kj} \right),$$

которая переписывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & -P\delta_{ij} + (1-3\beta\theta+9\beta^2\theta^2) [(a-\mu+2bJ_1 - \\ & -\kappa J_2 - 3\zeta J_1^2 + \nu\theta - \kappa_1\theta^2 - 2\kappa_2\theta J_1)\delta_{ij} + 2d_{ij}(\mu - \\ & -\kappa J_1 - \kappa_3\theta - 2bJ_1 - \nu\theta) - 4ad_{ik}d_{kj}]. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Приводя в (1.35) подобные слагаемые, окончательно получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & (-P + a - \mu + 2(b - (\kappa_2 + 3b\beta)\theta)d_{kk} + (\nu - (a - \mu)3\beta)\theta - \\ & - (\kappa_1 + 3\beta\nu - 9\beta^2(a - \mu))\theta^2 - \kappa d_{st}d_{ts} - 3\zeta d_{kk}^2)\delta_{ij} + \\ & + 2(\mu - (\kappa + 2b)d_{kk} - (\nu + \kappa_3 + 3\mu\beta)\theta)d_{ij} - 4ad_{ik}d_{kj}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

Уравнение теплопроводности в областях обратимого деформирования принимает форму

$$\begin{aligned} (1 + \beta_1\theta + \beta_2 d_{kk}) \frac{d\theta}{dt} + \beta_3 \varepsilon_{ij} d_{ji} &= q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}, \\ \beta_1 = \frac{\nu_1(1-3\beta) - 3\nu_2}{\nu_1}, \quad \beta_2 = -\frac{\kappa_1}{\nu_1}, \quad \beta_3 = -\frac{\nu + \kappa_3}{\nu_1}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

Если в среде присутствуют необратимые деформации, инварианты J_1, J_2 в (1.34) следует заменить инвариантами I_1, I_2 . Тогда, воспользовавшись первой формулой (1.32), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & -P_1\delta_{ij} + \frac{1}{1+3\beta\theta} \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \delta_{ij} + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_2} - \frac{\partial W}{\partial I_1} \right) m_{ij} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} - 5 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) m_{ik} m_{kj} + \frac{\partial W}{\partial I_2} (4m_{ik} m_{ks} m_{sj} - m_{ik} m_{ks} m_{st} m_{tj}) \right), \end{aligned}$$

или, окончательно

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & (-P_1 + a - \mu + 2(b - (\kappa_2 + 3b\beta)\theta)I_1 - \kappa I_2 - 3\zeta I_1^2 + \\ & + (\nu - (a - \mu)3\beta)\theta - (\kappa_1 + 3\nu\beta - 9\beta^2(a - \mu))\theta^2)\delta_{ij} + \\ & + 2(\mu - (\kappa + 2b)I_1 - (\nu + \kappa_3 + 3\mu\beta)\theta)m_{ij} + ((\kappa + 2b)I_1 - \mu - \\ & - 4a + (\nu + \kappa_3 + 3\mu\beta)\theta)m_{ik} m_{mj} + a(4m_{ik} m_{ks} m_{sj} - m_{ik} m_{ks} m_{st} m_{tj}). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Соотношение (1.36) является предельным при стремлении пластических деформаций к нулю для зависимости (1.38), которой напряжения определяются в областях пластического течения и разгрузки.

Уравнение теплопроводности для областей разгрузки принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \left(m_{kk} - \frac{1}{2} m_{ks} m_{sk} \right) \right) \frac{d\theta}{dt} + \beta_3 \varepsilon_{ij} m_{ji} - \\ & - \frac{1}{2} \beta_3 \varepsilon_{ij} m_{jk} m_{ki} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Для областей пластического течения это уравнение в случае выполнения условия пластической несжимаемости $\varepsilon_{kk}^p = 0$ принимает форму

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \left(m_{kk} - \frac{1}{2} m_{ks} m_{sk} \right) \right) \frac{d\theta}{dt} + \beta_3 (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) m_{ji} - \\ & - \frac{1}{2} \beta_3 (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) m_{jk} m_{ki} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{2\nu_1} \sigma_{ij} \varepsilon_{ji}^p. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Ограничение в геометрии движения среды (предположение о ее несжимаемости) накладывает ограничения на вид функциональной зависимости $W(J_1, J_2)$. Предположив осуществимость антиплоского движения несжимаемой среды так, чтобы $u_1 = u_2 = 0$ и $u_3 = u(x_1, x_2, t)$, условию ее несжимаемости удовлетворим заведомо. Но в разложении функции $W = W(J_1, J_2)$ в ряд Тейлора относительно свободного состояния коэффициенты разложения окажутся зависимыми. Антиплоское движение будет осуществимо, если воспользоваться потенциалом

$$\begin{aligned} W = & -2\mu J_1 - \mu J_2 + b J_1^2 + (b - \mu) J_1 J_2 - \zeta J_1^3 + \nu \theta J_1 + \\ & + \nu_1 \theta^2 - \kappa_1 J_1 \theta^2 - \kappa_2 J_1^2 \theta - \kappa_3 J_2 \theta - \nu_2 \theta^3 \end{aligned} \quad (1.41)$$

для упругой области и аналогичным с инвариантами I_1, I_2 для областей пластического течения или разгрузки, то зависимости для вычисления напряжений принимают форму:

в областях обратимого деформирования:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & (-P - 2\mu + 2(b - (\kappa_2 + 3b\beta)\theta)d_{kk} + (v + 6\mu\beta)\theta - \\ & - (\kappa_1 + 3\beta v + 18\mu\beta^2)\theta^2 + (b - \mu)d_{st}d_{ts} - 3\zeta d_{kk}^2)\delta_{ij} + \\ & + 2(\mu - (b + \mu)d_{kk} - (v + \kappa_3 + 3\mu\beta)\theta)d_{ij} + 4\mu d_{ik}d_{kj}; \end{aligned} \quad (1.42)$$

в областях пластического течения и разгрузки:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & (-P_1 - 2\mu + 2(b - (\kappa_2 + 3b\beta)\theta)I_1 + (b - \mu)I_2 - 3\zeta I_1^2 + \\ & + (v + 6\mu\beta)\theta - (\kappa_1 + 3v\beta + 18\mu\beta^2)\theta^2)\delta_{ij} + \\ & + 2(\mu - (b + \mu)I_1 - (v + \kappa_3 + 3\mu\beta)\theta)m_{ij} + (3\mu + (5\mu - 3b)I_1 \\ & + (v + \kappa_3 + 3\mu\beta)\theta)m_{ik}m_{mj} - \mu(4m_{ik}m_{ks}m_{sj} - m_{ik}m_{ks}m_{st}m_{tj}). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Если тепловым расширением можно пренебречь, то в зависимостях (1.32), (1.33), (1.36)-(1.40), (1.42) и (1.43) коэффициент β следует положить равным нулю.

При деформировании любое твердое тело проявляет упругие, вязкие и пластические свойства. Поэтому для изучения процесса деформирования требуются соответствующие модели, в основе которых лежат три основных механизма деформирования: упругий, пластический и вязкий. Первый механизм определяет обратимый процесс деформирования, два других – необратимый. Считается, что необратимое деформирование, связанное с проявлением пластических свойств материалов, проявляется только в условиях соответствия напряжений в некоторой области тела поверхности нагружения. Вязкие же свойства материалов могут проявляться на любых стадиях процесса деформирования. В теории упругопластического тела вязкими свойствами, как правило, пренебрегают. В теории течения вязкопластических жидкостей в областях, где течение отсутствует, пренебрегается не только вязкими свойствами, но и упругими. Однако в областях течения наряду с пластическими свойствами материалов учитывается и их вязкость. Классическим примером этого является математическая модель Шведова – Бингама. В нашем случае упругими свойствами пренебрегать не станем, но вязкостью на стадии деформирования, предваряющей пластическое течение, будем так же, как и в

классических теориях, пренебрегать. В дальнейшем для учета вязких свойств материала на стадии пластического течения будем использовать обобщенное условие пластичности Треска:

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\varepsilon_k^p|. \quad (1.44)$$

Здесь η – коэффициент вязкости, ε_k^p – главные значения тензора скоростей пластических деформаций, σ_i – главные значения тензора напряжений.

Глава 2. Прямолинейное течение в упруговязкопластическом цилиндрическом слое в условиях возможного проскальзывания материала

Прямолинейные движения вязкопластических сред рассматривались ранее в [23, 81, 82]. Даже без учета упругих свойств среды, в рамках модели Шведова – Бингама, таких решений получено немного. Упругими деформациями, как правило, пренебрегают, считая их пренебрежимо малыми в сравнении с пластическими. Однако, в процессах интенсивного формоизменения деформируемых тел, например, при обработке металлов давлением, именно обратимые деформации могут приводить к заметным геометрическим изменениям в форме и объеме обрабатываемых заготовок в процессах разгрузки после снятия нагружающих усилий и к недопустимым уровням остаточных напряжений в готовых деталях. Изучение подобных эффектов возможно лишь в рамках модели больших упруговязкопластических деформаций, так как хотя бы необратимые деформации в рассматриваемых процессах нельзя считать малыми.

В [8, 12, 18, 46], в рамках построенной авторами модели больших упругопластических деформаций [46], обобщенной на случай учета вязких свойств материалов на стадии пластического течения [8], были получены аналитические решения в случаях, когда напряжения считаются с точностью до слагаемых второго порядка по компонентам тензора градиента перемещений. Такой подход, не требуя сложных вычислений, позволяет определять в каждый момент времени положение упругопластических границ и получить аналитические выражения для перемещений, как в областях обратимого деформирования, так и в областях вязкопластического течения.

Здесь, используя тот же подход, приводятся решения краевых задач теории больших упруговязкопластических деформаций о прямолинейном

движении материала, расположенного между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями. Одна из поверхностей движется, вторая жестко закреплена. В окрестности одной из поверхностей (или обеих) возможно проскальзывание. Задачи решаются в квазистатической постановке.

2.1 Прямолинейное течение в упруговязкопластическом цилиндрическом слое в случае проскальзывания материала в окрестности внутренней поверхности

2.1.1. Постановка задачи, обратимое деформирование

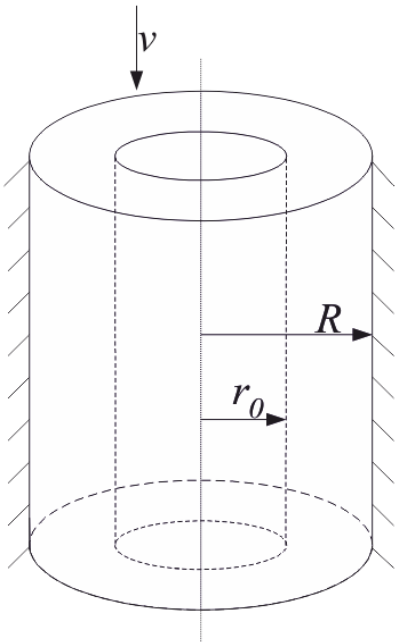


Рис. 2.1

Пусть несжимаемый упруговязкопластический материал находится между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ ($R > r_0$). Деформирование происходит за счет движения одной из жестких поверхностей.

Будем полагать, что внешний цилиндр закреплён, в то время как внутренняя стенка равноускоренно движется (рис. 2.1):

$$v|_{r=R} = u|_{r=R} = 0, \quad v^+|_{r=r_0} = a_1 t, \quad u^+|_{r=r_0} = \frac{a_1 t^2}{2}. \quad (2.1)$$

Здесь $u = u_z(r, t)$ – единственная не равная нулю компонента вектора перемещений, $v = v_z(r, t)$ – компонента скорости перемещения, a_1 – постоянная, v^+ , u^+ – скорость и перемещение внутренней жесткой стенки. В дальнейшем будем использовать цилиндрическую систему координат r, φ, z .

Считаем, что до момента начала воздействия ($t < 0$) деформации в слое отсутствуют, а напряженное состояние, вызванное начальным поджатием, задается одним параметром

$$\sigma_{rr}|_{r=r_0} = \sigma_0,$$

где σ_{rr} – радиальная компонента тензора напряжений.

Полагаем также, что до некоторого момента времени $t = t^*$ на границе $r = r_0$ выполняется условие прилипания, т.е. материал удерживается за счет сухого трения с коэффициентом трения покоя f :

$$\left(|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}| \right) \Big|_{r=r_0} < 0. \quad (2.2)$$

Рассчитаем параметры упругой задачи до момента времени $t = t^*$. Не нулевыми компонентами тензора Альманси в рассматриваемом случае являются:

$$d_{rr} = -\frac{(u')^2}{2}, \quad d_{rz} = \frac{u'}{2}, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Из зависимостей (1.42) для компонент напряжений в квадратичном приближении по u' получаем:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -(p + 2\mu) - (b + \mu) \frac{(u')^2}{2} = -s, \quad \sigma_{zz} = -s + \mu(u')^2, \quad \sigma_{rz} = \mu u'.$$

Согласно уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \quad (2.3)$$

переменная s является функцией только координаты z , так что $s = gz - a_0$, где g – неизвестная постоянная. Для того чтобы напряжения σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ и σ_{zz} были конечными при $z \rightarrow \infty$, необходимо положить $g = 0$. Тогда при граничных условиях (2.1) решение упругой задачи принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \frac{c(t)}{r}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0, \quad \sigma_{zz} = \sigma_0 + \frac{c^2(t)}{\mu r^2}, \quad u = A(c(t), r, R), \\ v &= A(\dot{c}(t), r, R), \quad c(t) = \frac{a_1 \mu t^2}{2} \ln^{-1} \frac{r_0}{R}, \quad A(c(t), r, R) = \frac{c(t)}{\mu} \ln \frac{r}{R}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Так как σ_0 влияет только на распределение компонент нормальных напряжений, положим $\sigma_0 < k/f$. В этом случае проскальзывание на внутренней по-

верхности начнется до возникновения пластического течения на ней же.

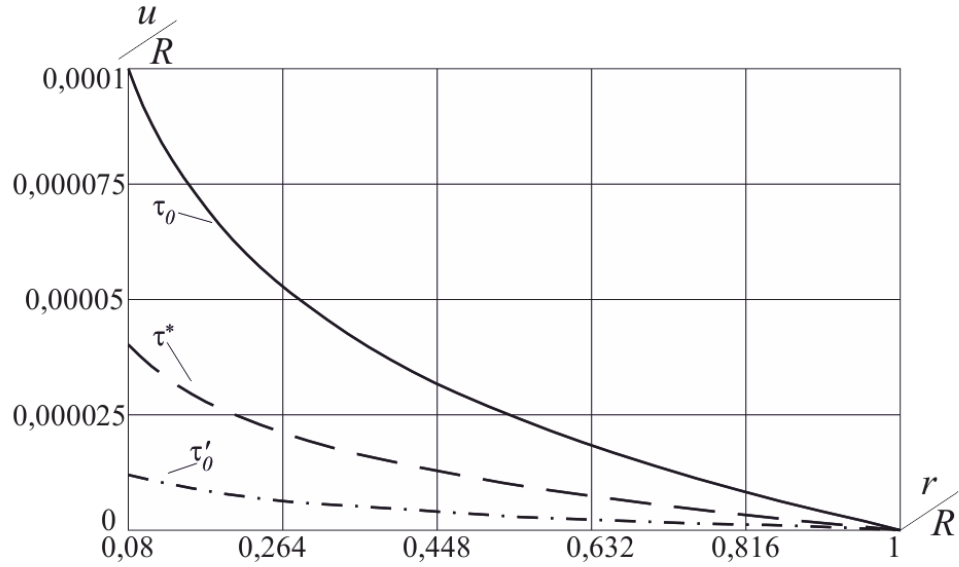


Рис. 2.2. Распределение перемещений в разные моменты времени

Компоненты обратимых деформаций, согласно уравнению (1.9), вычисляются по найденному полю перемещений из соотношений

$$e_{rz} = d_{rz} = \frac{u'}{2} = \frac{c(t)}{2\mu r}, \quad e_{rr} = -\frac{3}{2}e_{rz}^2, \quad e_{zz} = \frac{1}{2}e_{rz}^2. \quad (2.5)$$

Однако с момента времени $t = t^*$ перемещение материала на границе $r = r_0$ достигает такого предельного значения, что неравенство (2.2) обращается в равенство и материал начинает проскальзывать в окрестности внутренней стенки. В таком движении потребуем выполнения условия

$$\left(|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}| - \xi[v] \right)_{r=r_0} = 0, \quad \text{где} \quad t > t^* = \sqrt{\frac{2f\sigma_0 r_0}{\mu a_1} \ln \frac{R}{r_0}}. \quad (2.6)$$

где ξ – коэффициент вязкого трения, $[v] = v^+ - v^-$, v^- – скорость движения материала в окрестности движущейся внутренней поверхности.

Новое граничное условие (2.6) приведет к изменению функции $c(t)$ в (2.4), для которой получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\dot{c}}{\mu} \ln \frac{r_0}{R} - \frac{c}{\xi r_0} = a_1 t + \frac{f\sigma_0}{\xi}. \quad (2.7)$$

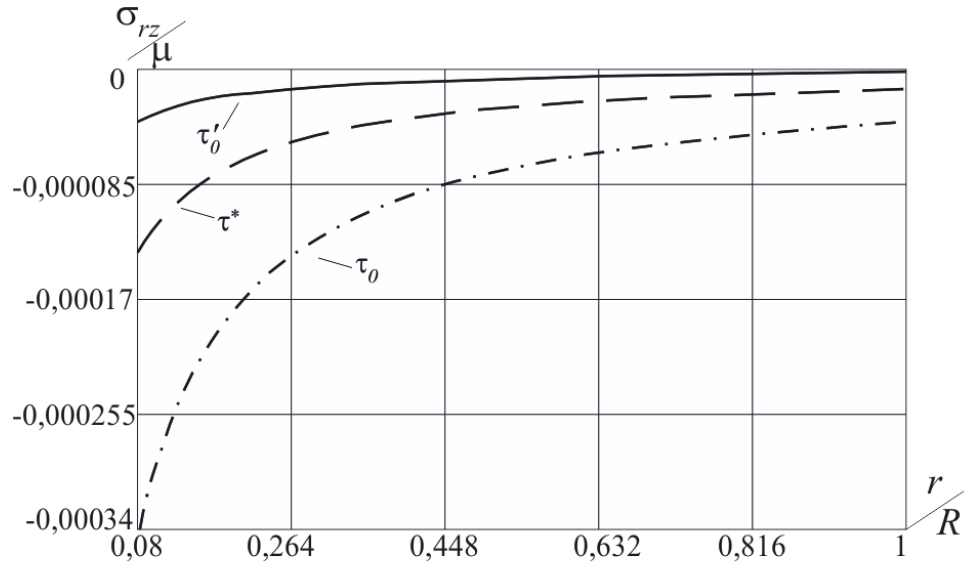


Рис. 2.3. Распределение напряжения σ_{rz} в разные моменты времени

Решением этого уравнения является функция

$$c(t) = a_1 \xi r_0 \left(t^* + \frac{\xi r_0}{\mu} \ln \frac{r_0}{R} \right) \exp \frac{\mu(t - t^*)}{\xi r_0 \ln \frac{r_0}{R}} - a_1 \xi r_0 \left(t + \frac{\xi r_0}{\mu} \ln \frac{r_0}{R} \right) - f \sigma_0 r_0. \quad (2.8)$$

Для скоростей, перемещений и напряжений частиц деформируемой среды выполняются те же зависимости (2.4). Только теперь функция $c(t)$ определяется по формуле (2.8).

На рисунке 2.2 представлено распределение перемещений u/R в зависимости от радиуса r/R в разные моменты времени $\tau = a_1 t^2 / r_0$: штрихпунктирной линией – в момент времени $\tau = \tau'_0$ ($\tau'_0 < \tau^*$), штриховой линией – в момент времени $\tau = \tau^*$ и сплошной линией – в момент начала пластического течения $\tau = \tau_0$. Рисунок 2.3 иллюстрирует распределение напряжения σ_{rz}/μ в разные моменты времени: сплошной линией – в момент времени $\tau = \tau'_0$, штриховой линией – в момент времени $\tau = \tau^*$ и штрихпунктирной линией – в момент времени $\tau = \tau_0$. При расчетах использовались следующие безраз-

мерные значения постоянных: $\frac{r_0}{R} = 0,08$; $\frac{k}{\mu} = 0,0005$; $\frac{\mu}{\eta} \sqrt{\frac{r_0}{a_1}} = 100$;

$$\frac{\mu}{\xi r_0} \sqrt{\frac{r_0}{a_1}} = 500; \quad \frac{f\sigma_0}{\mu} = 0,0002; \quad \frac{a_2}{a_1} = 0,5.$$

2.1.2. Вязкопластическое течение

В некоторый момент времени $t = t_0$ на внутренней границе $r = r_0$ выполнится условие пластичности (1.44), которое в рассматриваемом случае примет вид $\sigma_{rz}|_{r=r_0} = -k$. Из первого соотношения (2.4) получим уравнение для определения момента времени $t = t_0$ начала вязкопластического течения

$$c(t_0) = -kr_0.$$

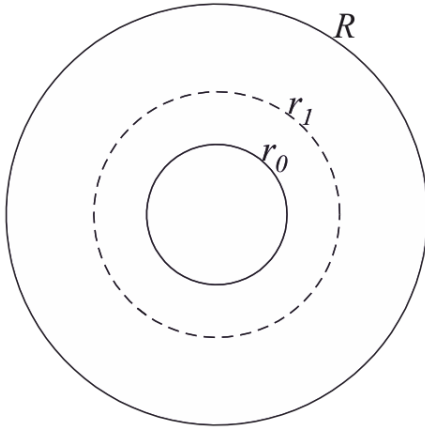


Рис. 2.4

Развивающаяся с момента времени $t = t_0$ область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = r_1(t)$ (рис. 2.4). В области $r_1(t) \leq r \leq R$ материал по-прежнему деформируется обратимо, то есть $r_1(t)$ является движущейся границей области вязкопластического течения.

В области обратимого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R$ интегрированием уравнений равновесия (2.3) в условиях прилипания на поверхности $r = R$ найдем

$$\sigma_{rz} = \frac{c(t)}{r}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0, \quad \sigma_{zz} = \sigma_0 + \frac{c^2(t)}{\mu r^2}, \quad (2.9)$$

$$u = A(c(t), r, R), \quad v = A(\dot{c}(t), r, R).$$

В (2.9) $c(t)$, как и ранее, остается неизвестной функцией интегрирования. С учетом непрерывности компонент упругих деформаций на упруго-

пластической границе $r = r_1(t)$ две последние кинематические зависимости из (2.5) будут справедливы и в области вязкопластического течения. Тогда, согласно формуле Мурнагана (1.32), для компонент напряжений с точностью до слагаемых второго порядка малости по e_{rz} в данной области имеют место выражения

$$\sigma_{rr} = -(p_1 + 2\mu) - 2(b + \mu)e_{rz}^2 = -s_1(t), \quad \sigma_{zz} = -s_1(t) + 4\mu e_{rz}^2, \quad \sigma_{rz} = 2\mu e_{rz}.$$

С другой стороны, интегрируя уравнения равновесия и используя условие непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе $r = r_1(t)$, получим, что в области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ для компонент напряжений выполняются те же зависимости (2.9), что и в упругой области.

Пластический потенциал (1.44) в квадратичном приближении может быть записан в форме:

$$F_1(\sigma_{rz}, \varepsilon_{rz}^p) = \sigma_{rz}^2 - (k + \eta \varepsilon_{rz}^p)^2 = 0.$$

Следуя ассоциированному закону пластического течения (1.19), находим

$$\sigma_{rz} = -k + \eta \varepsilon_{rz}^p, \quad \lambda = \frac{\varepsilon_{rz}^p}{\eta \varepsilon_{rz}^p - k}.$$

Сравнение этих соотношений и (2.9) позволяет определить скорость пластических деформаций

$$\varepsilon_{rz}^p = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c(t)}{r} + k \right). \quad (2.10)$$

Учитывая, что на упругопластической границе $r = r_1(t)$ скорости пластических деформаций равны нулю, найдем

$$c(t) = -k r_1(t). \quad (2.11)$$

Кинематические зависимости

$$\begin{aligned}
d_{rr} &= e_{rr} + p_{rr} - \frac{e_{rz}^2}{2} - 2e_{rz}p_{rz}, & d_{zz} &= e_{zz} + p_{zz} - \frac{e_{rz}^2}{2} - 2e_{rz}p_{rz}, & d_{rz} &= e_{rz} + p_{rz}, \\
\frac{dd_{rz}}{dt} &= \frac{\partial d_{rz}}{\partial t} = \frac{v'}{2}, & r_{rz} &= -r_{rz} = \frac{v'}{2}, & \varepsilon_{rz} &= \frac{v'}{2} = \varepsilon_{rz}^e + \varepsilon_{rz}^p = \frac{\partial e_{rz}}{\partial t} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial t}, \\
\varepsilon_{rr}^p &= \frac{dp_{rr}}{dt} + 2p_{rz}(r_{rz} + \varepsilon_{rz}^p), & \varepsilon_{zz}^p &= \frac{dp_{zz}}{dt} + 2p_{rz}(r_{rz} + \varepsilon_{rz}^p), & \varepsilon_{rr}^p &= -\varepsilon_{zz}^p = -2\varepsilon_{rz}^p e_{rz},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

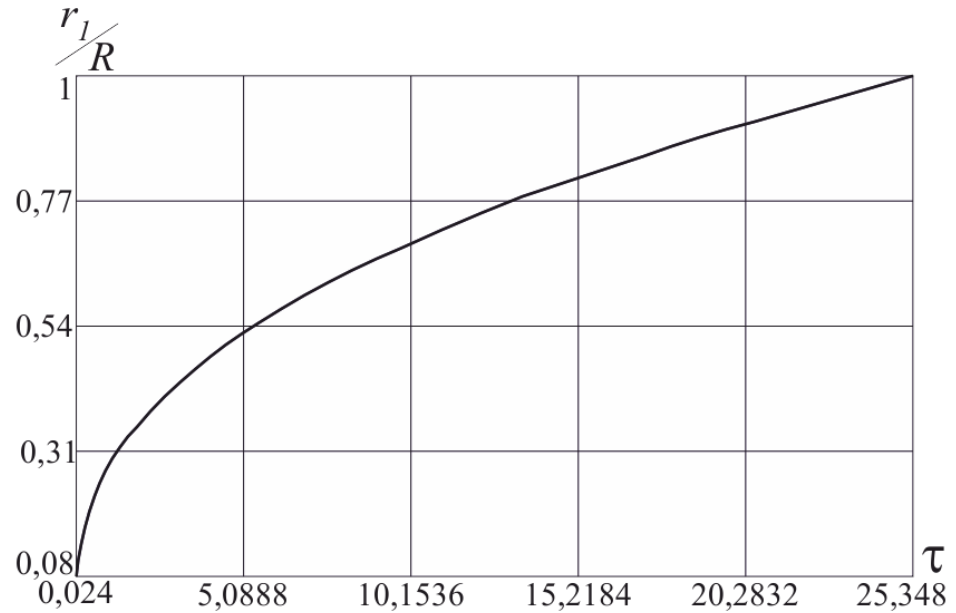


Рис. 2.5. Развитие области вязкопластического течения

имеющие место в рамках квадратичного приближения, и краевое условие вязкого трения (2.6) позволяют найти скорости точек в области вязкопластического течения:

$$\begin{aligned}
v &= A(\dot{c}(t), r, r_0) + B(c(t), r, r_0) + H(c(t), r_0) + a_1 t, \\
B(c(t), r, r_0) &= \frac{2}{\eta} \left(c(t) \ln \frac{r}{r_0} + k(r - r_0) \right), & H(c(t), r_0) &= \frac{c(t)}{\xi r_0} + \frac{f \sigma_0}{\xi}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Положение упругопластической границы $r = r_1(t)$ в каждый момент времени задается обыкновенным дифференциальным уравнением, следующим из (2.11) и условия непрерывности скорости точек материала на этой границе

$$A(k\dot{r}_1, r_0, R) + B(-k\dot{r}_1, r_1, r_0) + H(-k\dot{r}_1, r_0) + a_1 t = 0. \tag{2.14}$$

Из (2.10) и (2.12) найдем компоненты пластических деформаций

$$\begin{aligned}
p_{rz} &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(t)}{r} + kt \right) + g(r), \quad c_1(t) = \int_{t_0}^t c(\tau) d\tau + \frac{a_1 \xi^2 r_0^2}{\mu} \ln \frac{r_0}{R} \left(\left(t^* + \frac{\xi r_0}{\mu} \ln \frac{r_0}{R} \right) \times \right. \\
&\times \exp \left. \frac{\mu(t_0 - t^*)}{\xi r_0 \ln r_0 R^{-1}} - \frac{\xi r_0}{\mu} \ln \frac{r_0}{R} - t_0 \right) - r_0(t_0 - t^*) \left(\frac{a_1 \xi(t_0 + t^*)}{2} - f\sigma_0 \right) + \frac{\mu a_1 (t^*)^3}{6 \ln r_0 R^{-1}}, \quad (2.15) \\
p_{rr} &= 2d_{rz}(e_{rz} - d_{rz}), \quad p_{zz} = 2e_{rz}p_{rz}.
\end{aligned}$$

Здесь $g(r)$ – неизвестная функция интегрирования.

Выполняя условие равенства нулю пластических деформаций на продвигающейся упругопластической границе, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\eta r g' + \eta g + k\tau &= 0, \quad \mu \tau'(a_1 t + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, r_0)) = -k \ln \frac{r_0}{R}, \quad (2.16) \\
g &= g(r), \quad \tau = \tau(r), \quad g' = \frac{dg}{dr}, \quad \tau' = \frac{d\tau}{dr}
\end{aligned}$$

с начальными условиями

$$g(r_0) = -\frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(t_0)}{r_0} + kt_0 \right), \quad \tau(r_0) = t_0.$$

Решением этой системы находится неизвестная функция $g(r)$ в (2.15).

Учитывая (2.5), (2.15), равенство

$$u' = 2(e_{rz} + p_{rz}) \quad (2.17)$$

и непрерывность перемещений на упругопластической границе $r = r_1(t)$, для компонент перемещений в области вязкопластического течения находим

$$\begin{aligned}
u &= A(c(t), r, R) + B_1(c_1(t), r, r_1) + 2 \int_{r_1}^r g(x) dx, \quad (2.18) \\
B_1(c_1(t), r, r_1) &= \frac{2}{\eta} \left(c_1(t) \ln \frac{r}{r_1} + kt(r - r_1) \right).
\end{aligned}$$

На рисунке 2.5 изображено изменение границы r_1/R в зависимости от безразмерного времени τ .

Пусть, начиная с момента времени $t = t_1 > t_0$, скорость движения внутренней цилиндрической поверхности становится постоянной: $v^+ = a_1 t_1$. Это

изменение приведет к появлению новой упругопластической границы

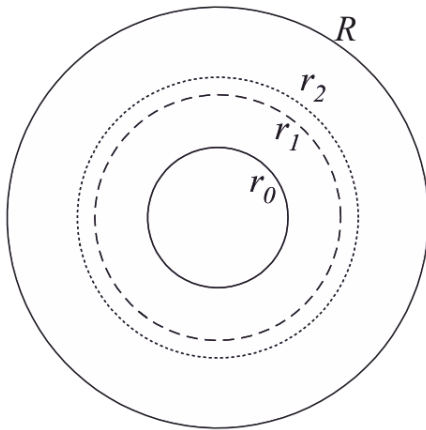


Рис. 2.6

$r = r_2(t)$, совпадающей в момент времени $t = t_1$ со стационарной границей $r = r_1(t_1)$. Теперь вязкопластическое течение продолжается в области $r_0 \leq r \leq r_2(t)$ (рис.2.6), а в области $r_2(t) \leq r \leq R$ материал по-прежнему деформируется обратимо.

В области обратимого деформирования $r_2(t) \leq r \leq R$ выполняются зависимости (2.9). В области вязкопластического течения для скорости точек среды получим

$$v = A(\dot{c}(t), r, r_0) + B(c(t), r, r_0) + H(c(t), r_0) + a_1 t_1. \quad (2.19)$$

Положение упругопластической границы $r = r_2(t)$ в каждый момент времени задается обыкновенным дифференциальным уравнением, следующим из условия непрерывности скоростей при $r = r_2(t)$ и равенства $c(t) = -kr_2(t)$,

$$A(k\dot{r}_2, r_0, R) + B(-kr_2, r_2, r_0) + H(-kr_2, r_0) + a_1 t_1 = 0 \quad (2.20)$$

с начальным условием $r_2(t_1) = r_1(t_1)$.

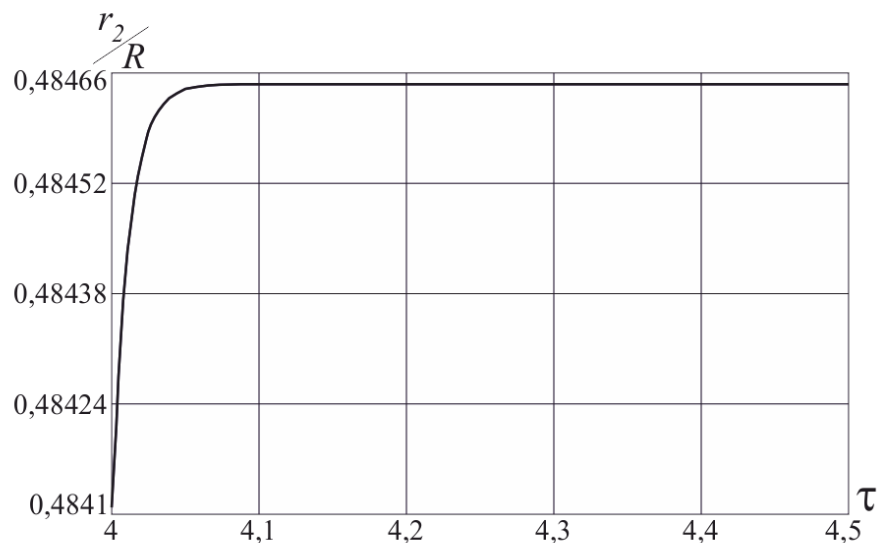


Рис. 2.7. Развитие области вязкопластического течения при постоянной скорости движения внутреннего цилиндра

Для компоненты p_{rz} тензора пластических деформаций из (2.10) и (2.12) имеем

$$p_{rz} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(t)}{r} + kt \right) + g_1(r). \quad (2.21)$$

В (2.21) функция $g_1(r)$ – неизвестная функция интегрирования. В интервале $r_0 \leq r \leq r_1(t_1)$ она совпадает с функцией $g(r)$, т.е.

$$g_1(r) = g(r) \quad \text{при} \quad r_0 \leq r \leq r_1(t_1),$$

а в промежутке $r_1(t_1) \leq r \leq r_2(t)$ для ее определения получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \eta r g_1' + \eta g_1 + k\tau = 0, \quad \mu \tau' (a_1 t_1 + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, r_0)) &= -k \ln \frac{r_0}{R}, \\ g_1(r_1) = g(r_1), \quad \tau(r_1) = t_1. \end{aligned}$$

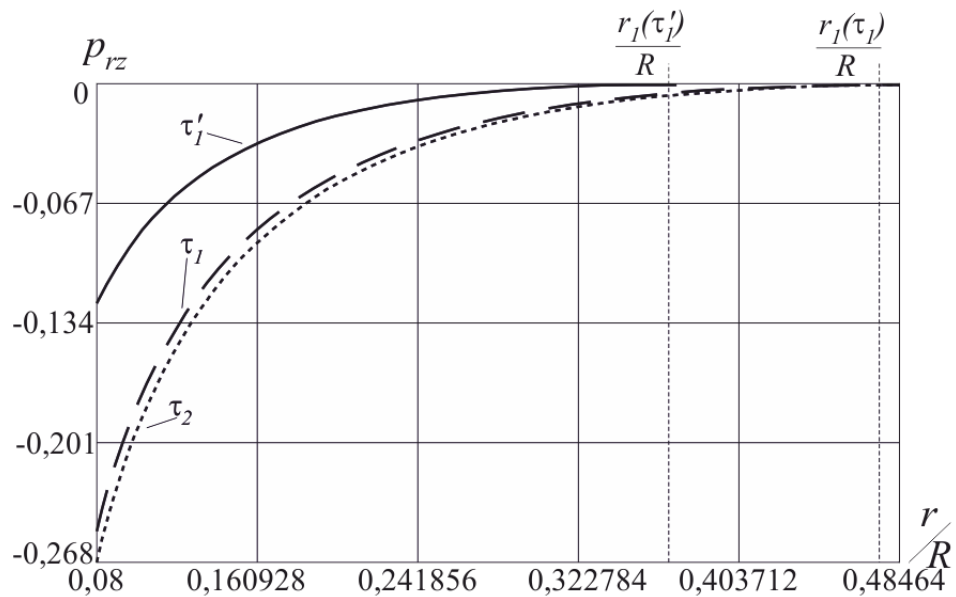


Рис. 2.8. Пластическая деформация p_{rz} в разные моменты времени

Из (2.5), (2.17), (2.21) и условия непрерывности компоненты вектора перемещений на упругопластической границе $r = r_2(t)$ найдем

$$u = A(c(t), r, R) + B_1(c_1(t), r, r_2) + 2 \int_{r_2}^r g_1(x) dx.$$

В области вязкопластического течения для напряжений также справед-

ливы соотношения (2.9).

Область течения увеличивается при равноускоренном движении граничной поверхности. После того, как движение становится равномерным ($t > t_1$), упругопластическая граница $r = r_2(t)$ асимптотически приближается к своему предельному значению и далее область течения не увеличивается (рис. 2.7).

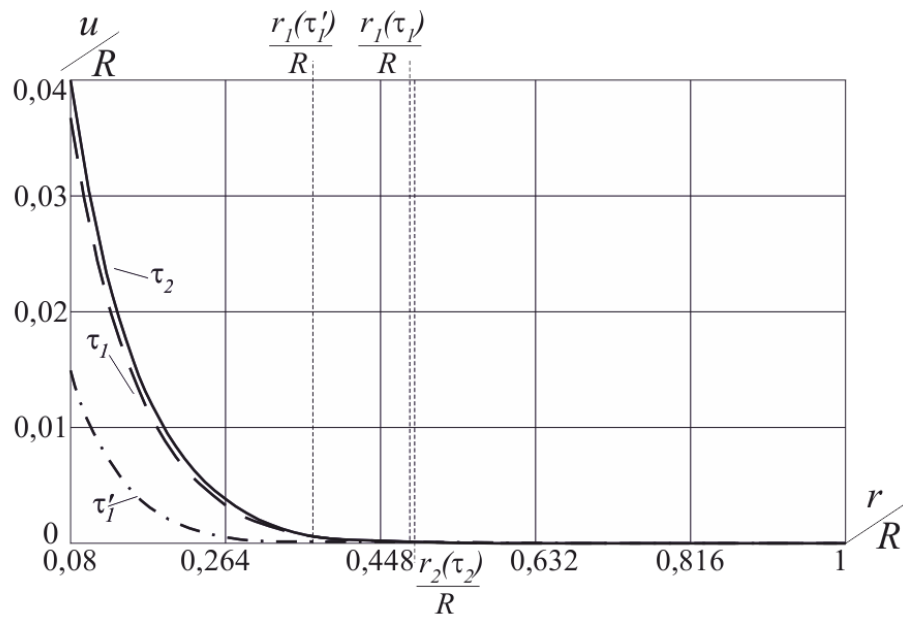


Рис. 2.9. Перемещения в разные моменты времени

Рисунок 2.8 показывает распределение компоненты p_{rz} тензора пластических деформаций в момент времени $\tau = \tau'_1$, $\tau_0 < \tau'_1 < \tau_1$ (сплошная линия), в момент времени $\tau = \tau_1$ (штриховая линия) и в момент времени $\tau = \tau_2$ (пунктирная линия). На рисунке 2.9 иллюстрируется распределение перемещений в разные моменты времени: в момент времени $\tau = \tau'_1$ штрихпунктирной линией, в момент времени $\tau = \tau_1$ штриховой линией и в момент времени $\tau = \tau_2$ сплошной линией.

2.1.3. Торможение вязкопластического течения и разгрузка среды

Положим теперь, что с некоторого момента времени $t = t_2 > t_1$ внутренний цилиндр начинает двигаться равномерно со скоростью

$$v^+ = a_1 t_1 - a_2 (t - t_2),$$

где a_2 – заданная постоянная. Торможение продолжается до полной остановки внутренней поверхности. Конечным моментом торможения является момент времени

$$t_k = \frac{a_1}{a_2} t_1 + t_2. \quad (2.22)$$

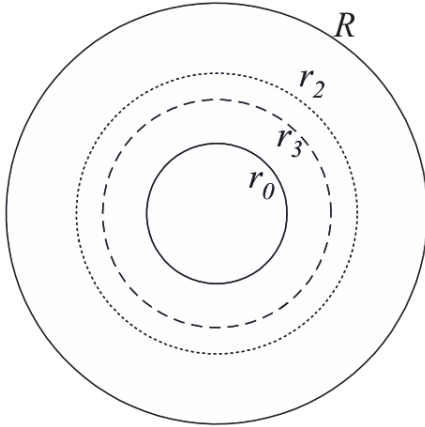


Рис. 2.10

Такое изменение в режиме нагружения приводит к возникновению новой упругопластической границы $r = r_3(t)$, которая движется к центру от стационарной поверхности $r = r_2(t_2)$ (рис. 2.10). Деформируемая область $r_0 \leq r \leq R$ разбивается теперь на три подобласти: вязкопластическое течение продолжается в области $r_0 \leq r \leq r_3(t)$, в области $r_3(t) \leq r \leq r_2(t_2)$ пластические деформации присутствуют, но не накапливаются, а в области $r_2(t_2) \leq r \leq R$ материал по-прежнему деформируется обратимо. Здесь $r = r_3(t)$ – подвижная граница, отделяющая область течения от области, где наряду с обратимыми имеются и неизменяющиеся необратимые деформации. Заметим, что неизменным остается тензор необратимых деформаций, в то время как его компоненты могут меняться. В рассматриваемом случае не меняется величина p_{rz} , а p_{rr} и p_{zz} изменяются в данной области.

Для области обратимого деформирования $r_2(t_2) \leq r \leq R$ остаются справедливыми зависимости (2.9). Кроме того, соотношения для напряжений из (2.9) остаются верными в области продолжающегося вязкопластического те-

чения и в области с неизменяющейся компонентой p_{rz} .

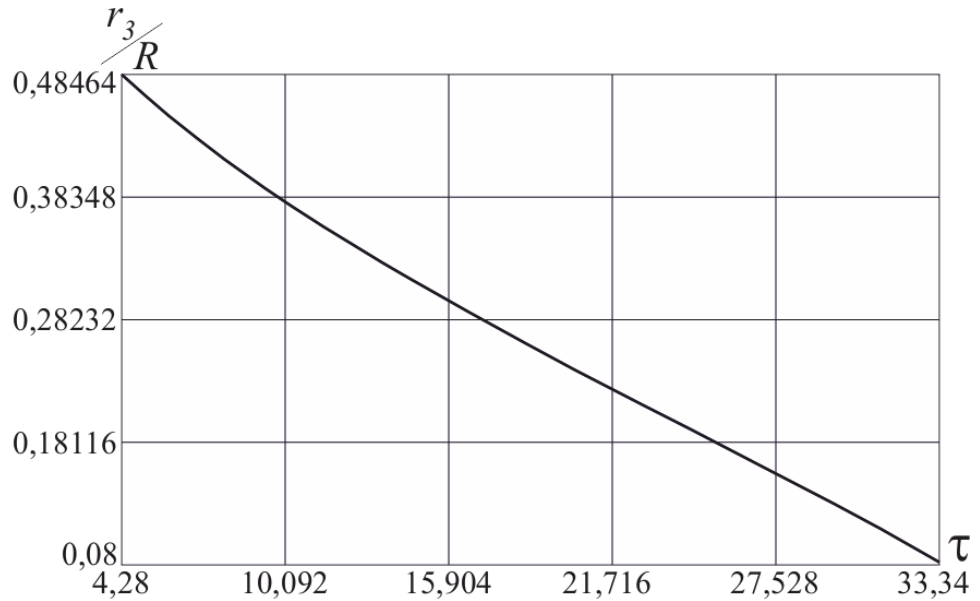


Рис. 2.11. Изменение границы r_3/R со временем

В области $r_3(t) \leq r \leq r_2(t_2)$ получим

$$\varepsilon_{rz}^p = 0, \quad v = A(\dot{c}(t), r, R), \quad c(t) = -kr_3(t).$$

В области $r_0 \leq r \leq r_3(t)$ для скоростей точек среды из (2.6) и (2.12) найдем

$$v = A(\dot{c}(t), r, r_0) + B(c(t), r, r_0) + H(c(t), r_0) + a_1 t_1 - a_2(t - t_2). \quad (2.23)$$

Движущаяся упругопластическая граница $r = r_3(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$A(k\dot{r}_3, r_0, R) + B(-kr_3, r_3, r_0) + H(-kr_3, r_0) + a_1 t_1 - a_2(t - t_2) = 0 \quad (2.24)$$

с начальным условием $r_3(t_2) = r_2(t_2)$.

Компонента ε_{rz}^p тензора скоростей пластических деформаций в области вязкопластического течения определяется по соотношению (2.10), а компонента p_{rz} тензора пластических деформаций – по (2.21).

В области $r_3(t) \leq r \leq r_2(t_2)$, в которой компонента p_{rz} не изменяется, она

имеет вид

$$p_{rz} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(\tau(r))}{r} + k\tau(r) \right) + g_1(r). \quad (2.25)$$

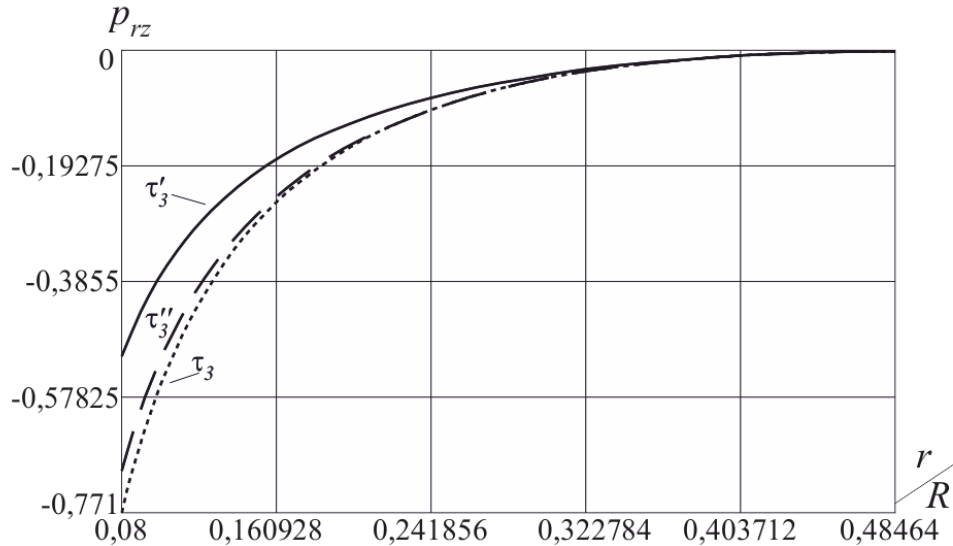


Рис. 2.12. Распределение пластической деформации p_{rz} в разные моменты времени

Здесь функция $\tau(r)$ – обратная функция времени от радиуса. Значение этой функции в какой-либо точке $r_0 \leq r \leq r_2(t_2)$ равно моменту времени, в который упругопластическая граница $r = r_3(t)$ достигает этой точки. Для определения функции $\tau(r)$ из (2.24) получим дифференциальное уравнение

$$\mu\tau'(a_1t_1 - a_2(\tau - t_2) + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, r_0)) = -k \ln \frac{r_0}{R}, \quad \tau(r_2) = t_2. \quad (2.26)$$

Из первых зависимостей (2.5) и (2.9), уравнения (2.17), соотношения (2.25) и условия непрерывности перемещений на упругопластической границе $r = r_2(t_2)$ в области с неизменяющейся компонентой p_{rz} найдем

$$u = A(c(t), r, R) + \frac{2}{\eta} \int_{r_2}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} + k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_2}^r g_1(x) dx. \quad (2.27)$$

А из условия непрерывности перемещений на движущейся границе $r = r_3(t)$ в области вязкопластического течения получим

$$u = A(c(t), r, R) + B_1(c_1(t), r, r_3) + \frac{2}{\eta} \int_{r_2}^{r_3} \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} + k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_2}^r g_1(x) dx.$$

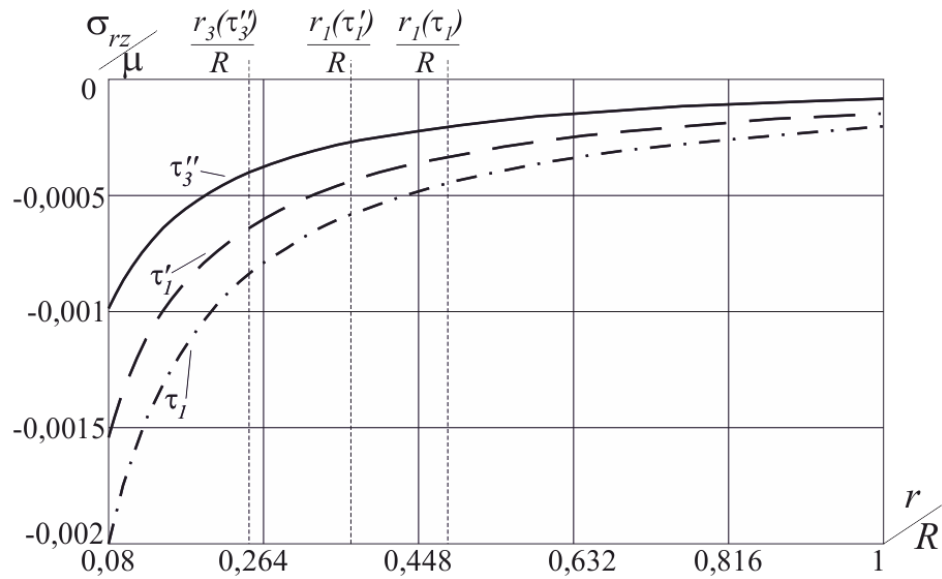


Рис. 2.13. Распределение напряжения σ_{rz} в разные моменты времени

В зависимости от свойств материала граница $r = r_3(t)$ достигает поверхности $r = r_0$ раньше или позже момента времени $t = t_k$, когда жесткий цилиндр остановится. В рассматриваемом случае, граница $r = r_3(t)$ достигнет поверхности $r = r_0$ до того, как она остановится, т.е. в некоторый момент времени $t = t_3 < t_k$ выполнится равенство: $r_3(t_3) = r_0$.

Деформируемая область $r_0 \leq r \leq R$ разбивается теперь на две части: в области $r_0 \leq r \leq r_2(t_2)$ компонента p_{rz} не изменяется, в области $r_2(t_2) \leq r \leq R$ материал деформируется обратимо.

С момента времени $t = t_3$ скорость становится одинаковой во всей области деформирования и вычисляется по последней формуле (2.9). Используя эту формулу и условие (2.6) получим дифференциальное уравнение для функции $c(t)$

$$\frac{\dot{c}}{\mu} \ln \frac{r_0}{R} - \frac{c}{\xi r_0} = a_1 t - a_2 (t - t_2) + \frac{f \sigma_0}{\xi}. \quad (2.28)$$

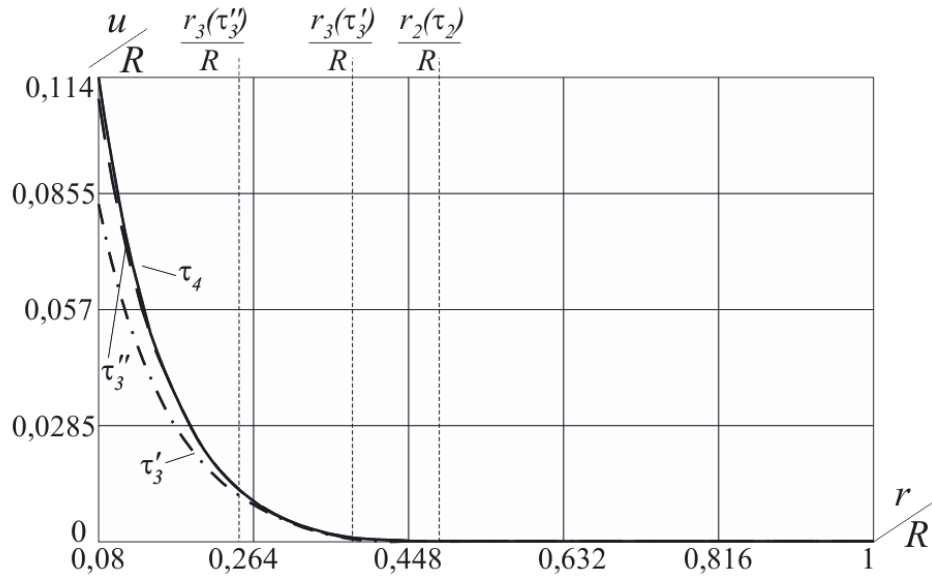


Рис. 2.14. Распределение перемещений в разные моменты времени

Решением этого уравнения является функция

$$c(t) = \xi r_0 \left(a_1 t - a_2 (t_3 - t_2) + \frac{f\sigma_0 - k}{\xi} - \frac{a_2 \xi r_0}{\mu} \ln \frac{r_0}{R} \right) \exp \frac{\mu(t - t_3)}{\xi r_0 \ln r_0 R^{-1}} - \xi r_0 \left(a_1 t - a_2 (t - t_2) + \frac{f\sigma_0}{\xi} - \frac{a_2 \xi r_0}{\mu} \ln \frac{r_0}{R} \right). \quad (2.29)$$

Для нахождения параметров напряженно-деформированного состояния по формулам (2.9), (2.25) и (2.27) в областях $r_0 \leq r \leq r_2(t_2)$ и $r_2(t_2) \leq r \leq R$ функцию $c(t)$ нужно заменить ее текущим значением (2.29).

В момент времени $t = t_k$ внутренний жесткий цилиндр остановится. Интегрируя уравнения равновесия в областях $r_0 \leq r \leq r_2(t_2)$ и $r_2(t_2) \leq r \leq R$, получим, что для напряжений и скорости выполняются зависимости (2.9). В области обратимого деформирования $r_2(t_2) \leq r \leq R$ перемещение вычисляется по последнему соотношению (2.9), а в области с неизменяющейся компонентой p_{rz} – по формуле (2.27). Из условия (2.6) выразим дифференциальное уравнение для неизвестной функции $c(t)$

$$\frac{\dot{c}}{\mu} \ln \frac{r_0}{R} - \frac{c}{\xi r_0} = \frac{f\sigma_0}{\xi}. \quad (2.30)$$

Решением этого уравнения будет функция

$$c(t) = \xi r_0 \left(a_1 t - a_2 (t_3 - t_2) + \frac{f\sigma_0 - k}{\xi} - \frac{a_2 \xi r_0}{\mu} \ln \frac{r_0}{R} \right) \exp \frac{\mu(t - t_3)}{\xi r_0 \ln r_0 R^{-1}} - \xi r_0 \left(a_1 t - a_2 (t_k - t_2) - \frac{a_2 \xi r_0}{\mu} \ln \frac{r_0}{R} \right) \exp \frac{\mu(t - t_k)}{\xi r_0 \ln r_0 R^{-1}} - f\sigma_0 r_0. \quad (2.31)$$

В момент времени $t = t_4$ на внутренней границе выполняется равенство $(|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}|)_{r=r_0} = 0$. С этого момента времени напряжения, деформации и перемещения перестают изменяться. Дальнейшая разгрузка связана с уменьшением напряжения σ_{rr} до нуля. Равенство нулю напряжений в конечный момент разгрузки на поверхности $r = r_0$ означает их равенство нулю во всей области деформирования. Равными нулю в конечный момент разгрузки будут и перемещения в области обратимого деформирования. В области с накопленными пластическими деформациями перемещения будут определяться следующим образом:

$$u = \frac{2}{\eta} \int_{r_2}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} + k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_2}^r g_1(x) dx.$$

Изменение границы r_3/R в зависимости от времени представлено на рисунке 2.11. Рисунок 2.12 иллюстрирует распределения пластической деформации p_{rz} в момент времени $\tau = \tau'_3$, $\tau_2 < \tau'_3 < \tau_3$ (сплошная линия), в момент времени $\tau = \tau''_3$, $\tau'_3 < \tau''_3 < \tau_3$ (штриховая линия) и в момент времени $\tau = \tau_3$ (пунктирная линия). На рисунке 2.13 изображено распределение напряжений σ_{rz} в моменты времени $\tau = \tau'_1$, $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau''_3$ штриховой, штрихпунктирной и сплошной линиями соответственно. Перемещения точек среды представлены на рисунке 2.14 в моменты времени $\tau = \tau'_3$, $\tau = \tau''_3$ и $\tau = \tau_4$ штрихпунктирной, штриховой и сплошной линиями соответственно.

2.1.4. Деформирование среды при движении внешнего жесткого цилиндра

Пусть теперь внешний цилиндр движется равноускоренно, а внутренний жестко закреплен:

$$v^+|_{r=r_0} = u^+|_{r=r_0} = 0, \quad v|_{r=R} = a_1 t, \quad u|_{r=R} = \frac{a_1 t^2}{2}. \quad (2.32)$$

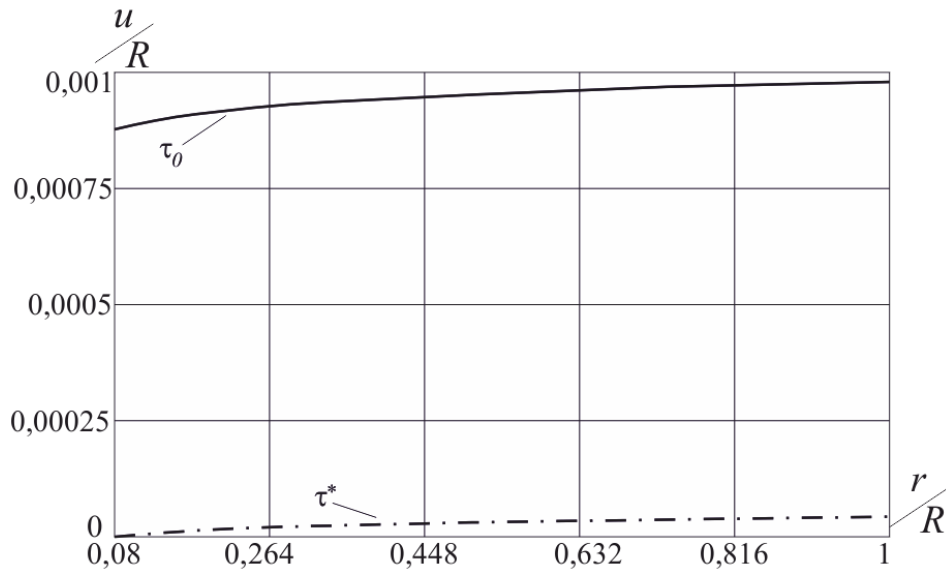


Рис. 2.15. Распределение перемещений в разные моменты времени

Полагаем также, что до некоторого момента времени $t = t^*$ на границе $r = r_0$ выполняется условие прилипания (2.2). Интегрируя уравнения равновесия (2.3) и используя граничные условия (2.32), получим

$$\sigma_{rz} = \frac{c(t)}{r}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0, \quad \sigma_{zz} = \sigma_0 + \frac{c^2(t)}{\mu r^2}, \quad (2.33)$$

$$u = A(c(t), r, R) + \frac{a_1 t^2}{2}, \quad v = A(\dot{c}(t), r, R) + a_1 t, \quad c(t) = \frac{a_1 \mu t^2}{2} \ln^{-1} \frac{R}{r_0}.$$

В момент времени $t = t^*$ неравенство (2.2) обратится в равенство, и материал начнет проскальзывать в окрестности внутренней жесткой стенки. Условие (2.2) заменим следующим

$$\left(|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}| - \xi v \right)_{r=r_0} = 0, \quad \text{где} \quad t > t^* = \sqrt{\frac{2f\sigma_0 r_0}{\mu a_1} \ln \frac{R}{r_0}}. \quad (2.34)$$

Условие (2.34) приведет к изменению функции $c(t)$ в (2.33), для которой будем иметь дифференциальное уравнение

$$\frac{\dot{c}}{\mu} \ln \frac{R}{r_0} + \frac{c}{\xi r_0} = a_1 t + \frac{f\sigma_0}{\xi}. \quad (2.35)$$

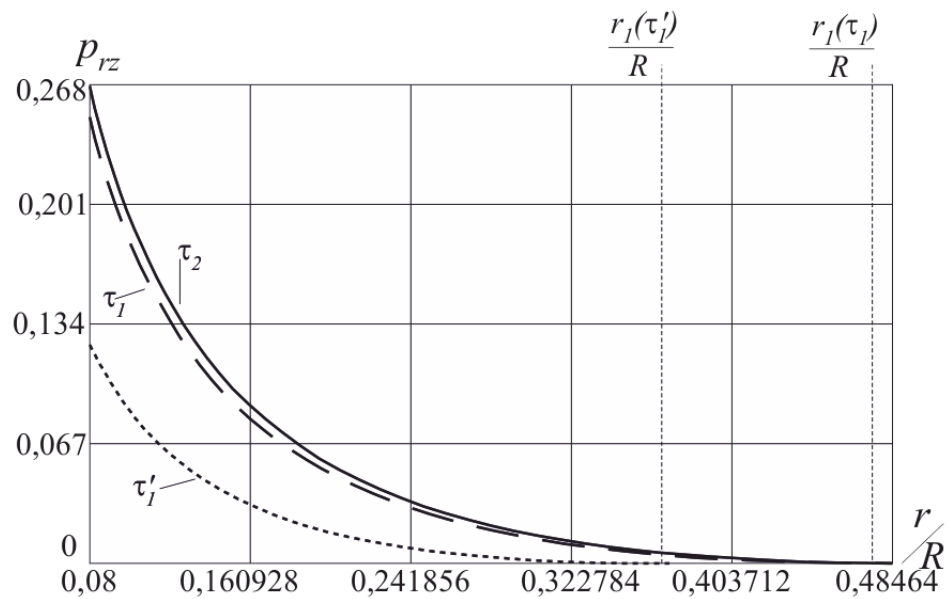


Рис. 2.16. Распределение пластических деформаций p_{rz} в разные моменты времени

Решением этого уравнения является функция

$$c(t) = a_1 \xi r_0 \left(\frac{\xi r_0}{\mu} \ln \frac{R}{r_0} - t^* \right) \exp \frac{\mu(t^* - t)}{\xi r_0 \ln \frac{R}{r_0}} + a_1 \xi r_0 \left(t - \frac{\xi r_0}{\mu} \ln \frac{R}{r_0} \right) + f\sigma_0 r_0. \quad (2.36)$$

Для скоростей, перемещений и напряжений частиц деформируемой среды выполняются те же зависимости (2.33). Только теперь функция $c(t)$ определяется по формуле (2.36).

В момент времени $t = t_0$ на внутренней границе $r = r_0$ выполнится условие пластичности (1.44), которое в рассматриваемом случае примет вид

$\sigma_{rz}|_{r=r_0} = k$. Из первого соотношения (2.33) получим уравнение для определения момента времени $t = t_0$: $c(t_0) = kr_0$.

При дальнейшем движении внешней поверхности область вязкопластического течения ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = r_1(t)$. В области $r_1(t) \leq r \leq R$ материал по-прежнему деформируется обратимо. В области обратимого деформирования интегрированием уравнений равновесия (2.3) в условиях прилипания на поверхности $r = R$ установим, что выполняются соотношения (2.33). Для области вязкопластического течения в этом случае следуют соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rz}^p &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{c(t)}{r} - k \right), & p_{rz} &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(t)}{r} - kt \right) + g(r), \\ v &= A(\dot{c}(t), r, r_0) - B(-c(t), r, r_0) - H(-c(t), r_0), & c(t) &= kr_1(t), \\ u &= A(c(t), r, R) - B_1(-c_1(t), r, r_1) + 2 \int_1^r g(x) dx + \frac{a_1 t^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

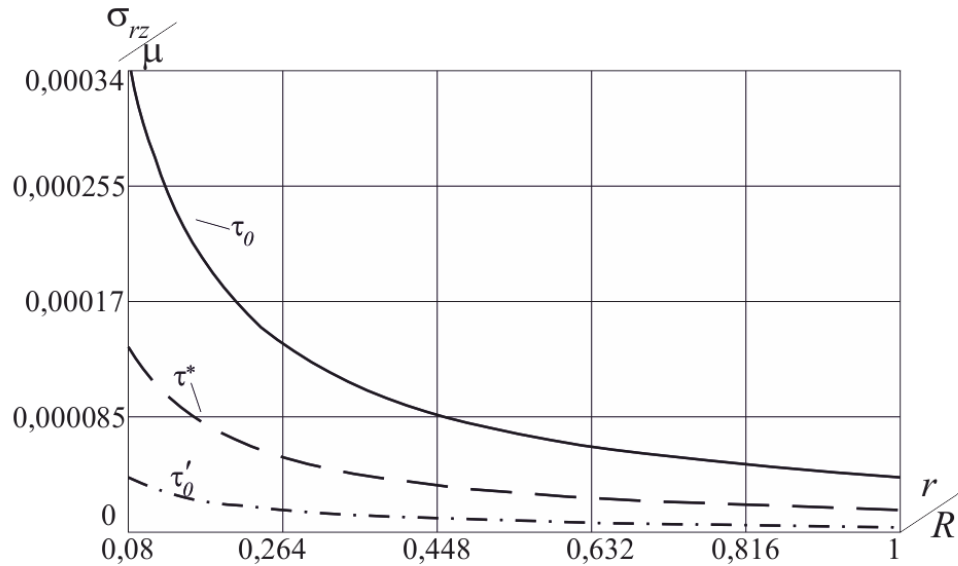


Рис. 2.17. Распределение напряжений σ_{rz} в разные моменты времени

В зависимостях (2.37) функция $c_1(t)$ определяется следующим образом

$$c_1(t) = \int_{t_0}^t c(\tau) d\tau - \frac{a_1 \xi^2 r_0^2}{\mu} \ln \frac{R}{r_0} \left(\left(\frac{\xi r_0}{\mu} \ln \frac{R}{r_0} - t^* \right) \exp \frac{\mu(t^* - t_0)}{\xi r_0 \ln r_0^{-1} R} + \frac{\xi r_0}{\mu} \ln \frac{R}{r_0} + t_0 \right) + r_0(t_0 - t^*) \left(\frac{a_1 \xi(t_0 + t^*)}{2} + f\sigma_0 \right) + \frac{\mu a_1 (t^*)^3}{6 \ln r_0^{-1} R}. \quad (2.38)$$

Положение упругопластической границы $r = r_1(t)$ в каждый момент времени задается обыкновенным дифференциальным уравнением (2.14).

Функция $g(r)$ находится из решения системы уравнений

$$\eta r g' + \eta g - k\tau = 0, \quad \mu \tau' (a_1 t + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, r_0)) = -k \ln \frac{r_0}{R} \quad (2.39)$$

с начальными условиями

$$g(r_0) = -\frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(t_0)}{r_0} - k t_0 \right), \quad \tau(r_0) = t_0. \quad (2.40)$$

Пусть, начиная с момента времени $t = t_1 > t_0$, скорость движения внешней цилиндрической поверхности становится постоянной: $v|_{r=R} = a_1 t_1$. Теперь область вязкопластического течения ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = r_2(t)$. В области $r_2(t) \leq r \leq R$ материал деформируется обратимо.

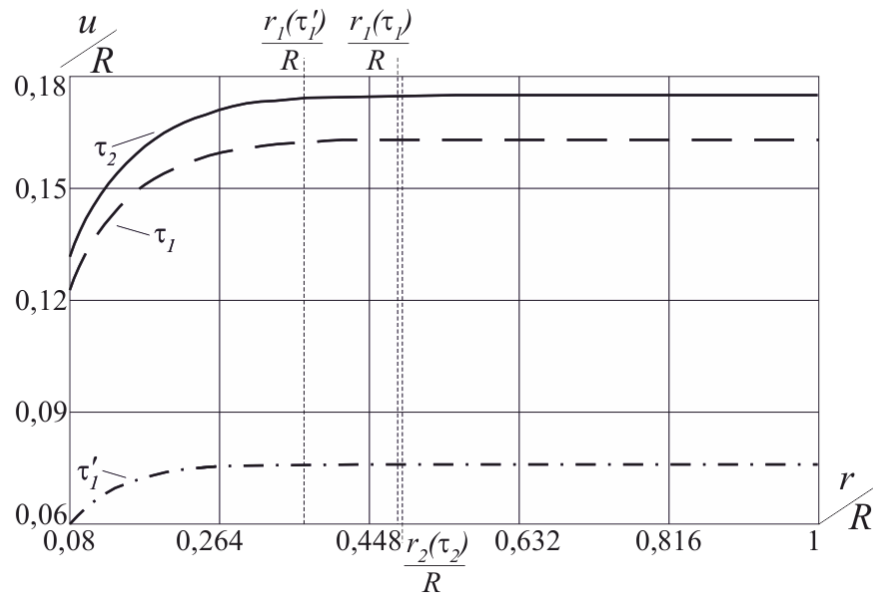


Рис. 2.18. Распределение перемещений в разные моменты времени

В области обратимого деформирования $r_2(t) \leq r \leq R$, интегрируя урав-

нения равновесия, найдем

$$u = A(c(t), r, R) + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t_1^2}{2}, \quad v = A(\dot{c}(t), r, R) + a_1 t_1.$$

В области вязкопластического течения скорости точек среды определяются по третьему соотношению (2.37). Положение упругопластической границы $r = r_2(t)$ в каждый момент времени задается дифференциальным уравнением (2.20).

Для компоненты p_{rz} тензора пластических деформаций имеем

$$p_{rz} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(t)}{r} - kt \right) + g_1(r). \quad (2.41)$$

В (2.41) функция $g_1(r)$ – неизвестная функция интегрирования. В интервале $r_0 \leq r \leq r_1(t_1)$ она совпадает с функцией $g(r)$, а в интервале $r_1(t_1) \leq r \leq r_2(t)$ для ее определения получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \eta r g_1' + \eta g_1 - k\tau = 0, \quad \mu \tau' (a_1 t_1 + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, r_0)) &= -k \ln \frac{r_0}{R}, \\ g_1(r_1) = g(r_1), \quad \tau(r_1) = t_1. \end{aligned}$$

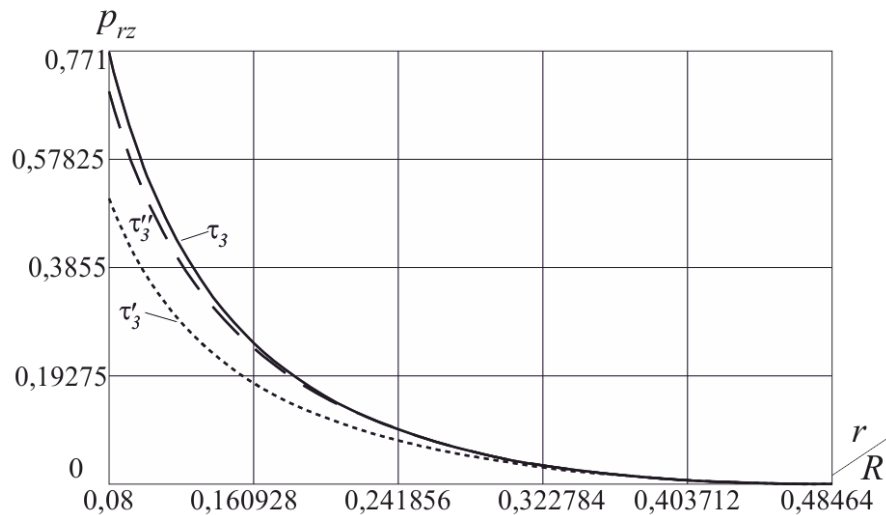


Рис. 2.19. Распределение пластической деформации p_{rz} в разные моменты времени

Перемещение в области вязкопластического течения будет иметь вид

$$u = A(c(t), r, R) - B_1(-c_1(t), r, r_2) + 2 \int_{r_2}^r g_1(x) dx + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t_1^2}{2}.$$

С некоторого момента времени $t = t_2 > t_1$ внешний цилиндр начинает двигаться равнозамедленно со скоростью $v|_{r=R} = a_1 t_1 - a_2(t - t_2)$. Деформируемая область $r_0 \leq r \leq R$ разбивается теперь на три подобласти: вязкопластическое течение продолжается в области $r_0 \leq r \leq r_3(t)$, в области $r_3(t) \leq r \leq r_2(t_2)$ компонента p_{rz} перестает изменяться, а в области $r_2(t_2) \leq r \leq R$ происходит обратимое деформирование.

Для области обратимого деформирования $r_2(t_2) \leq r \leq R$ получим

$$\begin{aligned} u &= A(c(t), r, R) + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t - t_2)^2, \\ v &= A(\dot{c}(t), r, R) + a_1 t_1 - a_2 (t - t_2). \end{aligned} \quad (2.42)$$

В области с неизменяющейся компонентой p_{rz} выполняются соотношения

$$\varepsilon_{rz}^p = 0, \quad v = A(\dot{c}(t), r, R) + a_1 t_1 - a_2 (t - t_2), \quad c(t) = k r_3(t).$$

В области вязкопластического течения для скоростей точек среды остается справедливой третья зависимость из (2.37). Движущаяся упругопластическая граница $r = r_3(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения (2.24).

В области $r_3(t) \leq r \leq r_2(t_2)$ компонента p_{rz} имеет вид

$$p_{rz} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(\tau(r))}{r} - k \tau(r) \right) + g_1(r). \quad (2.43)$$

Для определения функции $\tau(r)$ служит дифференциальное уравнение (2.26).

Перемещение в этой области определяется по формуле

$$\begin{aligned} u &= A(c(t), r, R) + \frac{2}{\eta} \int_{r_2}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} - k \tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_2}^r g_1(x) dx + \\ &+ a_1 t_1 t - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t - t_2)^2, \end{aligned}$$

а в области вязкопластического течения по соотношению

$$u = A(c(t), r, R) - B_1(-c_1(t), r, r_3) + \frac{2}{\eta} \int_{r_2}^{r_3} \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} - k\tau(x) \right) dx + \\ + 2 \int_{r_2}^r g_1(x) dx + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t - t_2)^2.$$

В некоторый момент времени $t = t_3 < t_k$ выполнится равенство: $r_3(t_3) = r_0$. Деформируемая область $r_0 \leq r \leq R$ разбивается теперь на две части: в области $r_0 \leq r \leq r_2(t_2)$ компонента p_{rz} не изменяется, в области $r_2(t_2) \leq r \leq R$ материал деформируется обратимо. С момента времени $t = t_3$ скорость становится одинаковой во всей области деформирования и вычисляется по второй формуле (2.42). Для функции $c(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\dot{c}}{\mu} \ln \frac{R}{r_0} + \frac{c}{\xi r_0} = a_1 t - a_2 (t - t_2) + \frac{f\sigma_0}{\xi}. \quad (2.44)$$

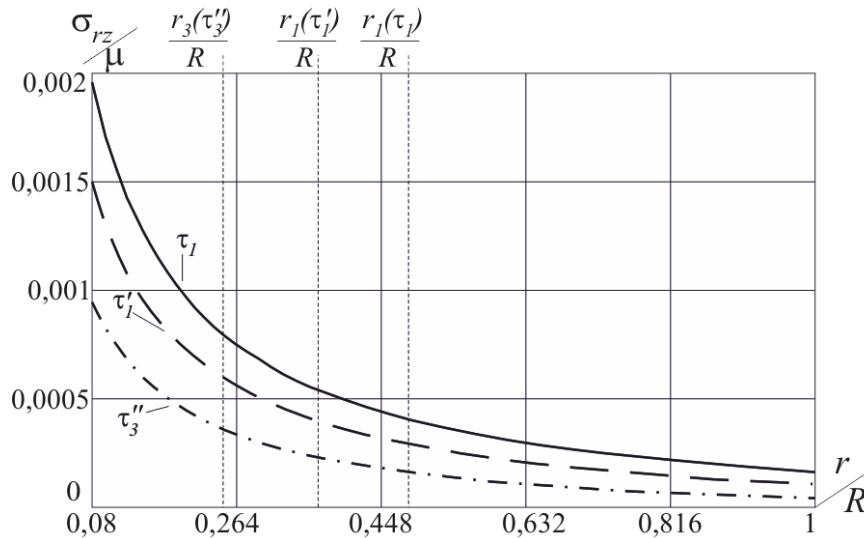


Рис. 2.20. Распределение напряжений σ_{rz} в разные моменты времени

Решением этого уравнения является функция

$$c(t) = -\xi r_0 \left(a_1 t - a_2 (t_3 - t_2) + \frac{f\sigma_0 - k}{\xi} + \frac{a_2 \xi r_0}{\mu} \ln \frac{R}{r_0} \right) \exp \frac{\mu(t_3 - t)}{\xi r_0 \ln r_0^{-1} R} + \\ + \xi r_0 \left(a_1 t - a_2 (t - t_2) + \frac{f\sigma_0}{\xi} + \frac{a_2 \xi r_0}{\mu} \ln \frac{R}{r_0} \right). \quad (2.45)$$

В момент времени $t = t_k$ внешний жесткий цилиндр останавливается.

Интегрируя уравнения равновесия в области $r_2(t_2) \leq r \leq R$, получим

$$u = A(c(t), r, R) + a_1 t_1 t_k - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t_k - t_2)^2, \quad v = \frac{\dot{c}(t)}{\mu} \ln \frac{r}{R}. \quad (2.46)$$

В области $r_0 \leq r \leq r_2(t_2)$ скорость вычисляется по второй зависимости из (2.46), а перемещения имеют вид

$$u = A(c(t), r, R) + \frac{2}{\eta} \int_{r_2}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} - k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_2}^r g_1(x) dx + a_1 t_1 t_k - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t_k - t_2)^2.$$

Дифференциальное уравнение для неизвестной функции $c(t)$ при $t > t_k$ принимает форму

$$\frac{\dot{c}}{\mu} \ln \frac{R}{r_0} + \frac{c}{\xi r_0} = \frac{f\sigma_0}{\xi}.$$

Решением этого уравнения будет функция

$$c(t) = -\xi r_0 \left(a_1 t - a_2 (t_3 - t_2) + \frac{f\sigma_0 - k}{\xi} + \frac{a_2 \xi r_0}{\mu} \ln \frac{R}{r_0} \right) \exp \frac{\mu(t_3 - t)}{\xi r_0 \ln r_0^{-1} R} + \xi r_0 \left(a_1 t - a_2 (t_k - t_2) + \frac{a_2 \xi r_0}{\mu} \ln \frac{R}{r_0} \right) \exp \frac{\mu(t_k - t)}{\xi r_0 \ln r_0^{-1} R} + f\sigma_0 r_0. \quad (2.47)$$

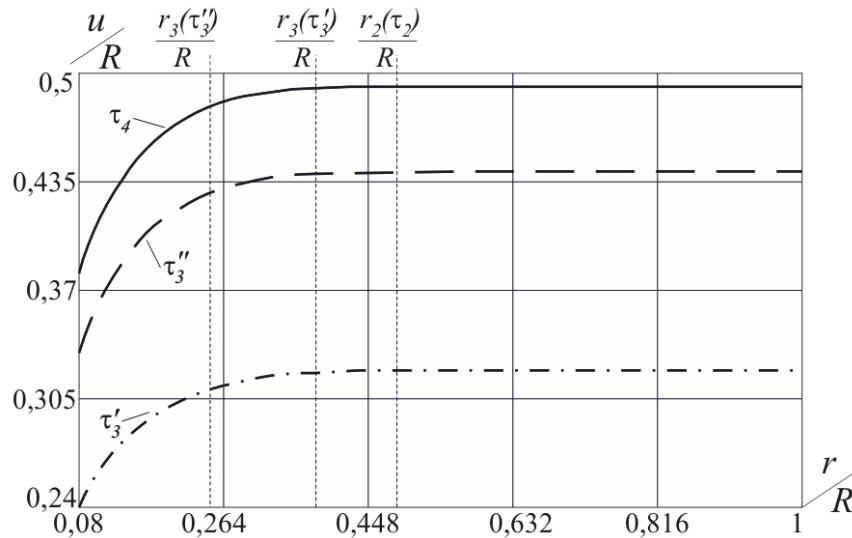


Рис. 2.21. Распределение перемещений в разные моменты времени

В момент времени $t = t_4$ на внутренней границе выполнится равенство $(|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}|)_{r=r_0} = 0$. С этого момента времени напряжения, деформации и перемещения перестают изменяться. Дальнейшая разгрузка связана с уменьшением напряжения σ_{rr} до нуля. В области обратимого деформирования для перемещений получим

$$u = a_1 t_1 t_k - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t_k - t_2)^2,$$

а в области с накопленными пластическими деформациями перемещения будут определяться формулой

$$u = \frac{2}{\eta} \int_{r_2}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} - k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_2}^r g_1(x) dx + a_1 t_1 t_k - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t_k - t_2)^2.$$

На рисунке 2.15 изображены перемещения в моменты времени $\tau = \tau^*$ (штрихпунктирная линия) и $\tau = \tau_0$ (сплошная линия), на рисунке 2.18 – в моменты времени $\tau = \tau'_1$ (штрихпунктирная линия), $\tau = \tau_1$ (штриховая линия) и $\tau = \tau_2$ (сплошная линия), а на рисунке 2.21 – в моменты времени $\tau = \tau'_3$ (штрихпунктирная линия), $\tau = \tau''_3$ (штриховая линия) и $\tau = \tau_4$ (сплошная линия). Распределения пластической деформации p_{rz} показаны на рисунке 2.16 в моменты времени $\tau = \tau'_1$ (пунктирная линия), $\tau = \tau_1$ (штриховая линия) и $\tau = \tau_2$ (сплошная линия), а на рисунке 2.19 в моменты времени $\tau = \tau'_3$ (пунктирная линия), $\tau = \tau''_3$ (штриховая линия) и $\tau = \tau_3$ (сплошная линия). Рисунок 2.17 иллюстрирует распределения напряжения σ_{rz} в моменты времени $\tau = \tau'_0$ (штрихпунктирная линия), $\tau = \tau^*$ (штриховая линия) и $\tau = \tau_0$ (сплошная линия), а рисунок 2.20 – в моменты времени $\tau = \tau'_1$ (штриховая линия), $\tau = \tau_1$ (сплошная линия) и $\tau = \tau''_3$ (штрихпунктирная линия).

2.2 Прямолинейное течение в упруговязкопластическом цилиндрическом слое в случае проскальзывания материала в окрестности внешней поверхности

2.2.1. Обратимое деформирование и вязкопластическое течение

Будем полагать, что внешний цилиндр закреплен, а внутренний равноускоренно движется

$$v^+|_{r=R} = u^+|_{r=R} = 0, \quad v|_{r=r_0} = a_1 t, \quad u|_{r=r_0} = \frac{a_1 t^2}{2}.$$

Положим $\sigma_0 = \frac{k r_0}{f R}$, тогда вязкопластическое течение материала в момент времени $t = t_0$ на внутренней границе начнется одновременно с проскальзыванием материала в окрестности внешнего цилиндра. До момента времени $t = t_0$ на границе $r = R$ выполняется условие

$$\left(|\sigma_{rz}| - f |\sigma_{rr}| \right)_{r=R} < 0. \quad (2.48)$$

Решение упругой задачи, соответствующей промежутку $0 \leq t \leq t_0$ имеет вид (2.4).

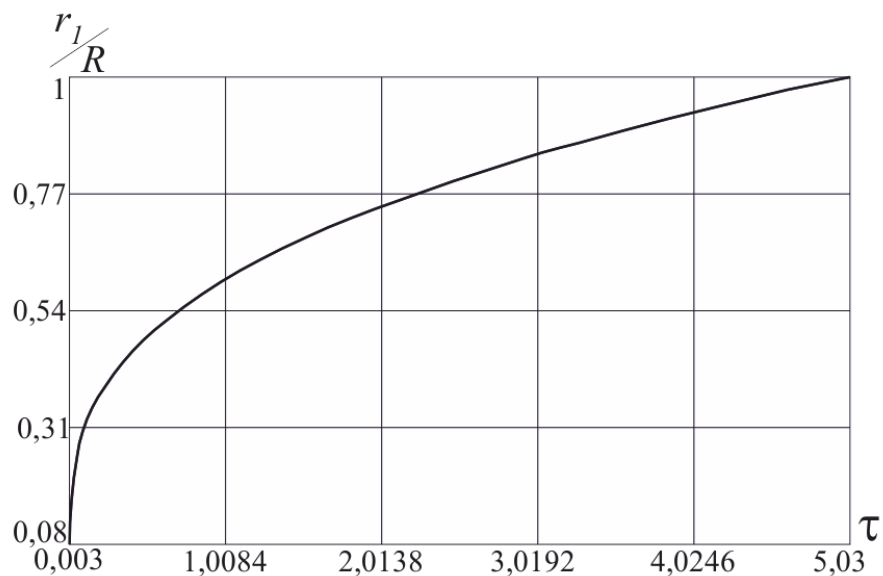


Рис. 2.22. Изменение области вязкопластического течения со временем

В момент времени $t = t_0$ на внутренней границе $r = r_0$ выполнится условие пластичности $\sigma_{rz}|_{r=r_0} = -k$, а на внешней – неравенство (2.48) обратится в равенство. В таком движении условие (2.48) заменим следующим

$$\left(|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}| - \xi v \right)_{r=R} = 0, \quad (2.49)$$

где $t > t_0 = \sqrt{\frac{2kr_0}{\mu a_1} \ln \frac{R}{r_0}}$.

Развивающаяся с момента времени $t = t_0$ область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = r_1(t)$. В области $r_1(t) \leq r \leq R$ материал по-прежнему деформируется обратимо, то есть $r_1(t)$ является движущейся границей области вязкопластического течения.

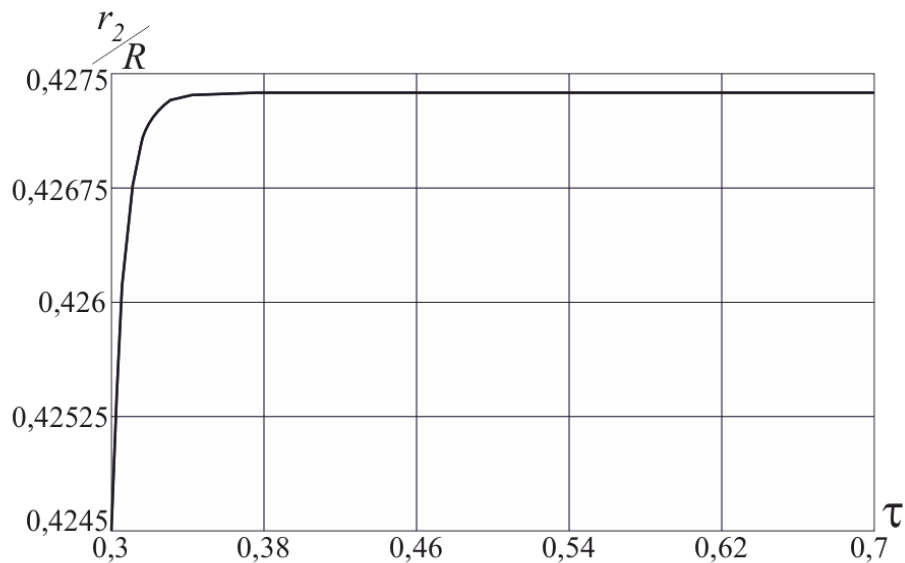


Рис. 2.23. Изменение границы r_2/R течения со временем

В области обратимого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R$ с использованием условия (2.49) найдем скорость точек среды

$$v = A(\dot{c}(t), r, R) - H(c(t), R). \quad (2.50)$$

Скорость пластических деформаций в области вязкопластического течения определяется из соотношения (2.10). Зависимости (2.12) и условие

прилипания материала к внутренней поверхности позволяют найти скорости точек в области вязкопластического течения:

$$v = A(\dot{c}(t), r, r_0) + B(c(t), r, r_0) + a_1 t.$$

Положение упругопластической границы $r = r_1(t)$ в каждый момент времени задается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$A(k\dot{r}_1, r_0, R) + B(-kr_1, r_1, r_0) + H(-kr_1, R) + a_1 t = 0. \quad (2.51)$$

Из (2.10) и (2.12) найдем компоненту пластических деформаций p_{rz}

$$p_{rz} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(t)}{r} + kt \right) + g(r), \quad c_1(t) = \int_{t_0}^t c(\tau) d\tau + \frac{\mu a_1 t_0^3}{6 \ln r_0 R^{-1}}. \quad (2.52)$$

Для определения функции $g(r)$ имеем систему дифференциальных уравнений

$$\eta r g' + \eta g + k\tau = 0, \quad \mu \tau' (a_1 t + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, R)) = -k \ln \frac{r_0}{R},$$

$$g(r_0) = -\frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(t_0)}{r_0} + kt_0 \right), \quad \tau(r_0) = t_0.$$

Учитывая (2.5), (2.17), (2.52) и условие прилипания границе $r = r_0$, для компоненты перемещений в области вязкопластического течения находим

$$u = A(c(t), r, r_0) + B_1(c_1(t), r, r_0) + 2 \int_{r_0}^r g(x) dx + \frac{a_1 t^2}{2}.$$

Тогда, учитывая непрерывность перемещений на упругопластической границе $r = r_1(t)$, в области обратимого деформирования получим

$$u = A(c(t), r, r_0) + B_1(c_1(t), r_1, r_0) + 2 \int_{r_0}^{r_1} g(x) dx + \frac{a_1 t^2}{2}.$$

Пусть, начиная с момента времени $t = t_1 > t_0$, скорость движения внутренней цилиндрической поверхности становится постоянной: $v = a_1 t_1$. Изменение в режиме нагружения приводит к появлению новой границы $r = r_2(t)$. Теперь область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_2(t)$ ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = r_2(t)$. В области $r_2(t) \leq r \leq R$ материал по-прежнему де-

формируется обратимо.

В области обратимого деформирования $r_2(t) \leq r \leq R$ для скорости выполняется зависимость (2.50), а в области вязкопластического течения получим

$$v = A(\dot{c}(t), r, r_0) + B(c(t), r, r_0) + a_1 t_1.$$

Положение упругопластической границы $r = r_2(t)$ в каждый момент времени задается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$A(k\dot{r}_2, r_0, R) + B(-kr_2, r_2, r_0) + H(-kr_2, R) + a_1 t_1 = 0. \quad (2.53)$$

Для компоненты p_{rz} тензора пластических деформаций выполняется соотношение (2.21), в котором функция $g_1(r)$ в интервале $r_0 \leq r \leq r_1(t_1)$ совпадает с функцией $g(r)$, а в интервале $r_1(t_1) \leq r \leq r_2(t)$ определяется из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \eta r g_1' + \eta g_1 + k\tau = 0, \quad \mu \tau' (a_1 t_1 + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, R)) = -k \ln \frac{r_0}{R}, \\ g_1(r_1) = g(r_1), \quad \tau(r_1) = t_1. \end{aligned}$$

Перемещения в области обратимого деформирования имеют вид

$$u = A(c(t), r, r_0) + B_1(c_1(t), r_2, r_0) + 2 \int_{r_0}^{r_2} g_1(x) dx + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t_1^2}{2},$$

в области вязкопластического течения

$$u = A(c(t), r, r_0) + B_1(c_1(t), r, r_0) + 2 \int_{r_0}^r g_1(x) dx + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t_1^2}{2}.$$

На рисунках 2.22 и 2.23 представлено изменение границ r_1/R и r_2/R в зависимости от времени τ соответственно.

2.2.2. Торможение вязкопластического течения и разгрузка среды

Положим теперь, что с некоторого момента времени $t = t_2 > t_1$ внутренний цилиндр начинает двигаться равнозамедленно со скоростью $v = a_1 t_1 - a_2(t - t_2)$. Такое изменение в режиме нагружения приводит к возникновению новой упругопластической границы $r = r_3(t)$, которая движется к центру от стационарной поверхности $r = r_2(t_2)$. Деформируемая область $r_0 \leq r \leq R$ разбивается теперь на три зоны: вязкопластическое течение продолжается в области $r_0 \leq r \leq r_3(t)$, в области $r_3(t) \leq r \leq r_2(t_2)$ компонента p_{rz} перестает изменяться, а в области $r_2(t_2) \leq r \leq R$ материал продолжает деформироваться обратимо.

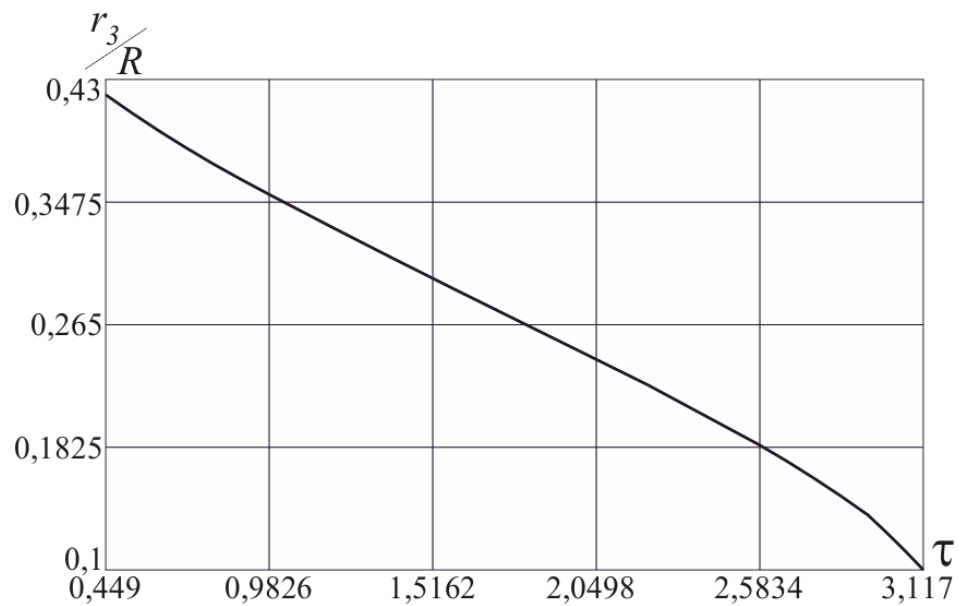


Рис. 2.24. Изменение границы r_3/R течения со временем

Для области обратимого деформирования $r_2(t_2) \leq r \leq R$ остается справедливой зависимость (2.50). В области с не изменяющейся компонентой p_{rz} скорость также вычисляется из соотношения (2.50). В области вязкопластического течения для скоростей точек среды найдем

$$v = A(\dot{c}(t), r, r_0) + B(c(t), r, r_0) + a_1 t_1 - a_2 (t - t_2).$$

Движущаяся упругопластическая граница $r = r_3(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$A(k\dot{r}_3, r_0, R) + B(-kr_3, r_3, r_0) + H(-kr_3, R) + a_1 t_1 - a_2 (t - t_2) = 0. \quad (2.54)$$

Компонента p_{rz} в области вязкопластического течения имеет вид (2.21), а в области, в которой она не изменяется, – (2.25), где функция $\tau(r)$ является решением дифференциального уравнения

$$\mu\tau'(a_1 t_1 - a_2 (\tau - t_2) + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, R)) = -k \ln \frac{r_0}{R}, \quad \tau(r_2) = t_2. \quad (2.55)$$

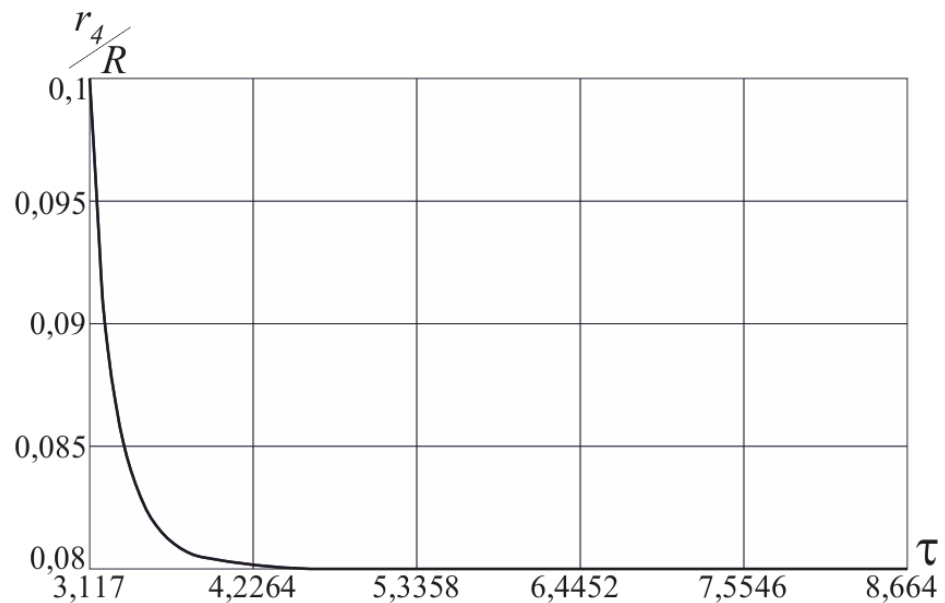


Рис. 2.25. Изменение границы r_4/R течения со временем

Для перемещений выполняются зависимости:

– в области обратимого деформирования

$$u = A(c(t), r, r_0) + B_1(c_1(t), r_3, r_0) + \frac{2}{\eta} \int_{r_3}^{r_2} \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} + k\tau(x) \right) dx + \\ + 2 \int_{r_0}^{r_2} g_1(x) dx + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t - t_2)^2,$$

– в области, где p_{rz} не изменяется,

$$u = A(c(t), r, r_0) + B_1(c_1(t), r_3, r_0) + \frac{2}{\eta} \int_{r_3}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} + k\tau(x) \right) dx + \\ + 2 \int_{r_0}^r g_1(x) dx + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t - t_2)^2,$$

– в области вязкопластического течения

$$u = A(c(t), r, r_0) + B_1(c_1(t), r, r_0) + 2 \int_{r_0}^r g_1(x) dx + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t - t_2)^2.$$

В момент времени $t = t_k$ внутренний цилиндр $r = r_0$ останавливается, но граница $r = r_3(t)$ все еще больше r_0 . Для области обратимого деформирования и области с неизменяющейся компонентой p_{rz} скорость вычисляется из соотношения (2.50), а в области вязкопластического течения для скоростей точек среды получим

$$v = A(\dot{c}(t), r, r_0) + B(c(t), r, r_0).$$

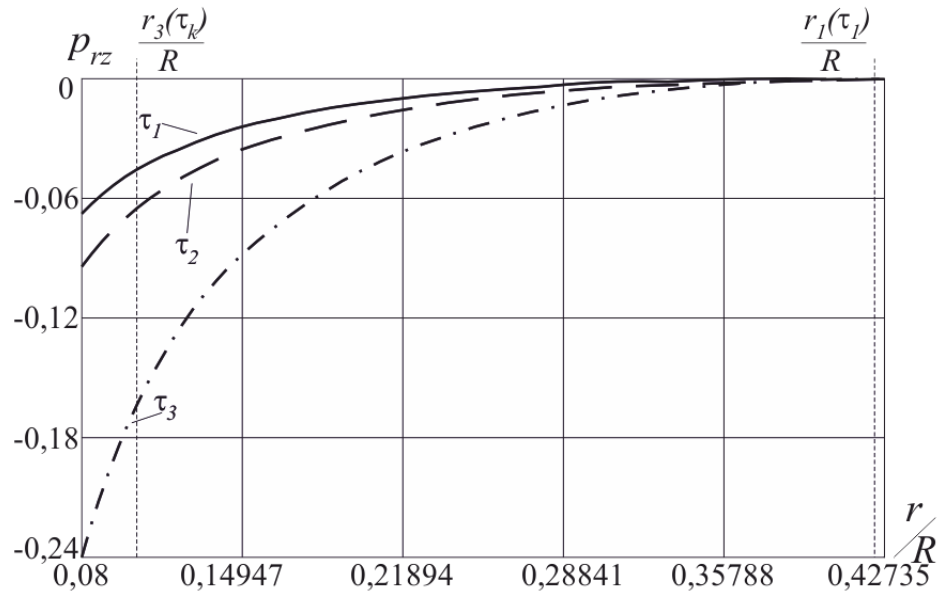


Рис. 2.26. Распределение компоненты p_{rz} в разные моменты времени

Тогда для новой упругопластической границы $r = r_4(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$A(k\dot{r}_4, r_0, R) + B(-kr_4, r_4, r_0) + H(-kr_4, R) = 0. \quad (2.56)$$

В области $r_4(t) \leq r \leq r_2(t_2)$, в которой пластические деформации не изменяются, пластическая деформация имеет вид (2.25), где функция $\tau(r)$ в интервале $r_3(t_k) \leq r \leq r_2(t_2)$ определяется из дифференциального уравнения (2.55), а в интервале $r_4(t) \leq r \leq r_3(t_k)$ для нее получим уравнение

$$\mu\tau'(B(-kr, r, r_0) + H(-kr, R)) = -k \ln \frac{r_0}{R}, \quad \tau(r_3) = t_k. \quad (2.57)$$

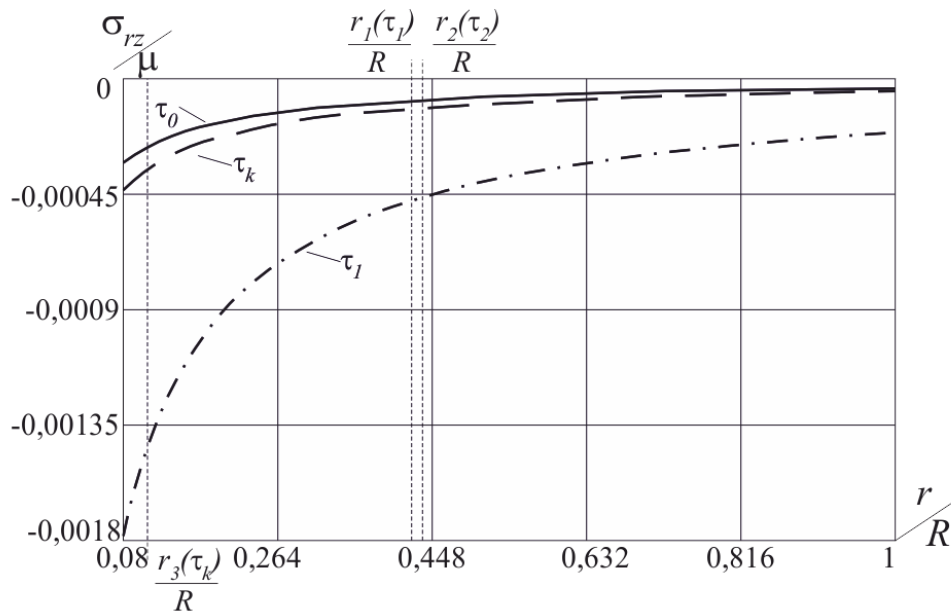


Рис. 2.27. Распределение напряжения σ_{rz} в разные моменты времени

Для перемещений выполняются зависимости:

– в области обратимого деформирования

$$u = A(c(t), r, r_0) + B_1(c_1(t), r_4, r_0) + \frac{2}{\eta} \int_{r_4}^{r_2} \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} + k\tau(x) \right) dx + \\ + 2 \int_{r_0}^{r_2} g_1(x) dx + a_1 t_1 t_k - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t_k - t_2)^2,$$

– в области, где p_{rz} не изменяется,

$$u = A(c(t), r, r_0) + B_1(c_1(t), r_4, r_0) + \frac{2}{\eta} \int_{r_4}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} + k\tau(x) \right) dx + \\ + 2 \int_{r_0}^r g_1(x) dx + a_1 t_1 t_k - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t_k - t_2)^2,$$

– в области вязкопластического течения

$$u = A(c(t), r, r_0) + B_1(c_1(t), r, r_0) + 2 \int_{r_0}^r g_1(x) dx + a_1 t_1 t_k - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t_k - t_2)^2.$$

В момент времени $t = t_3$ упругопластическая граница $r = r_4(t)$ достигает внутренней поверхности и в этот же момент на внешней поверхности неравенство (2.48) вновь обращается в равенство. Деформируемая область $r_0 \leq r \leq R$ разбивается теперь на две части: в области $r_0 \leq r \leq r_2(t_2)$ компонента p_{rz} не изменяется, в области $r_2(t_2) \leq r \leq R$ материал деформируется обратимо. Дальнейшая разгрузка связана с уменьшением напряжения σ_{rr} до нуля. В конечный момент разгрузки перемещения имеют вид

– в области обратимого деформирования

$$u = \frac{2}{\eta} \int_{r_0}^{r_2} \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} + k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_0}^{r_2} g_1(x) dx + a_1 t_1 t_k - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t_k - t_2)^2,$$

– в области с накопленными необратимыми деформациями

$$u = \frac{2}{\eta} \int_{r_0}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} + k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_0}^r g_1(x) dx + a_1 t_1 t_k - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t_k - t_2)^2.$$

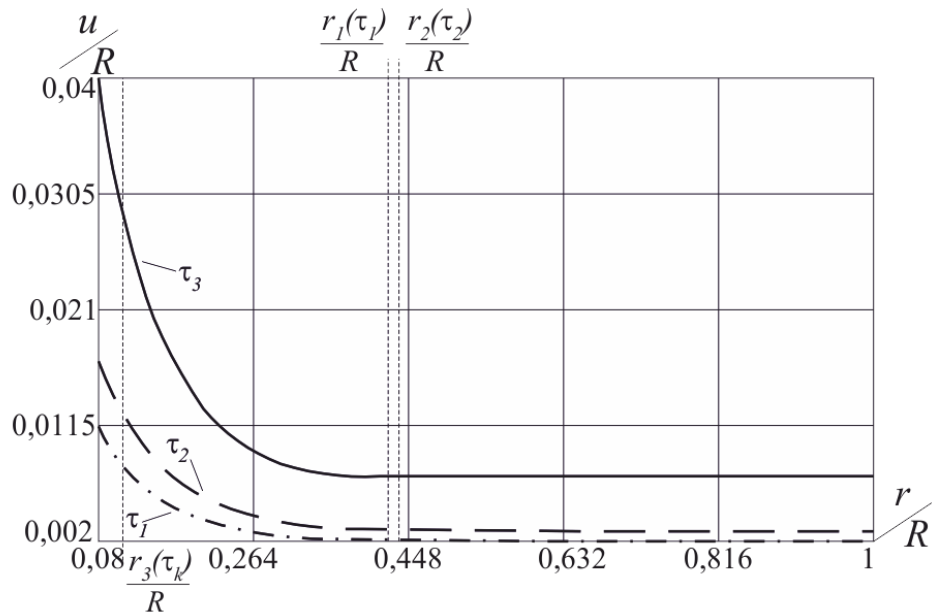


Рис. 2.28. Распределение перемещений в разные моменты времени

На рисунках 2.24 и 2.25 представлено изменение границ r_3/R и r_4/R в зависимости от времени τ соответственно. Распределение пластической деформации p_{rz} в моменты времени $\tau = \tau_1$, $\tau = \tau_2$ и $\tau = \tau_3$ представлено на рисунке 2.26 сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно. На рисунке 2.27 изображено распределение напряжения σ_{rz} в моменты времени $\tau = \tau_0$ (сплошная линия), $\tau = \tau_1$ (штрихпунктирная линия) и $\tau = \tau_k$ (штриховая линия). Рисунок 2.28 иллюстрирует перемещения в моменты времени $\tau = \tau_1$, $\tau = \tau_2$ и $\tau = \tau_3$ штрихпунктирной, штриховой и сплошной линиями соответственно.

2.2.3. Деформирование среды при движении внешнего цилиндра

Пусть теперь внешний цилиндр движется равноускоренно, а внутренний жестко закреплен

$$v|_{r=r_0} = u|_{r=r_0} = 0, \quad v^+|_{r=R} = a_1 t, \quad u^+|_{r=R} = \frac{a_1 t^2}{2}.$$

Интегрируя уравнения равновесия (2.3) и используя данные граничные условия, получим решение упругой задачи (2.33)

В момент времени $t = t_0$ на внутренней границе $r = r_0$ выполнится условие пластичности $\sigma_{rz}|_{r=r_0} = k$ и одновременно начнется проскальзывание материала в окрестности внешней жесткой стенки. Поэтому условие (2.48) заменим следующим

$$\left(\sigma_{rz} - f|\sigma_{rr} - \xi[v] \right)|_{r=R} = 0. \quad (2.58)$$

При дальнейшем движении внешней поверхности область вязкопластического течения ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = r_1(t)$. В области $r_1(t) \leq r \leq R$ деформирование материала происходит обратимо. В области обратимого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R$ с использованием условия (2.58) най-

дем скорость точек среды

$$v = A(\dot{c}(t), r, R) + H(-c(t), R) + a_1 t.$$

Скорость пластических деформаций в области вязкопластического течения определяется из первой зависимости (2.37). Из соотношений (2.12) и условия прилипания материала к внутренней поверхности найдем скорости точек среды в области вязкопластического течения:

$$v = A(\dot{c}(t), r, r_0) - B(-c(t), r, r_0). \quad (2.59)$$

Положение упругопластической границы $r = r_1(t)$ задается обыкновенным дифференциальным уравнением (2.51). Компонента пластических деформаций p_{rz} вычисляется по второй формуле (2.37), где

$$c_1(t) = \int_{t_0}^t c(\tau) d\tau + \frac{\mu a_1 t_0^3}{6 \ln r_0^{-1} R},$$

а функция $g(r)$ определяется из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\eta r g' + \eta g - k \tau = 0, \quad \mu \tau' (a_1 t + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, R)) = -k \ln \frac{r_0}{R},$$

$$g(r_0) = -\frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(t_0)}{r_0} + k t_0 \right), \quad \tau(r_0) = t_0.$$

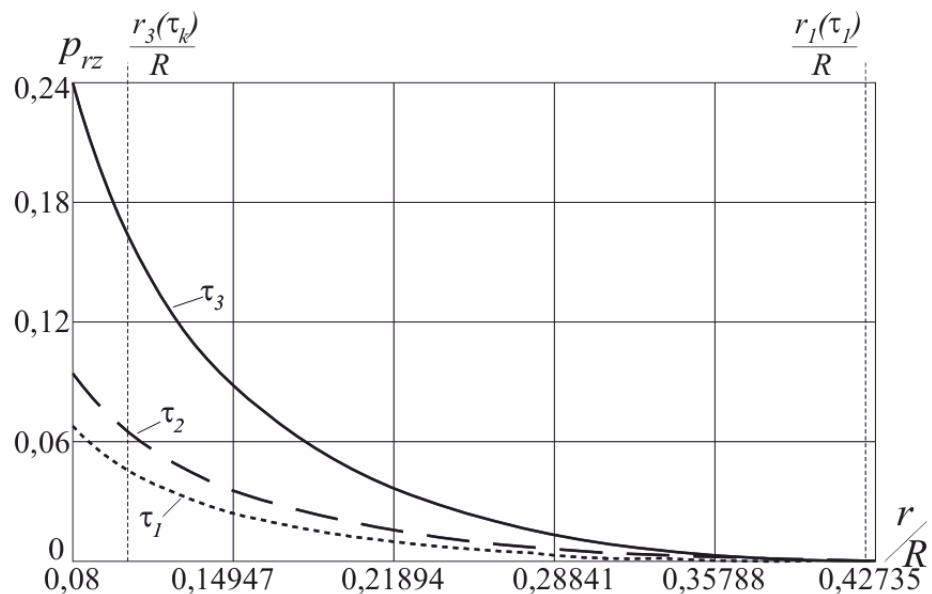


Рис. 2.29. Распределение пластической деформации p_{rz} в разные моменты времени

Для перемещений получим

– в области обратимого деформирования

$$u = A(c(t), r, r_0) - B_1(-c_1(t), r_1, r_0) + 2 \int_{r_0}^r g(x) dx,$$

– в области течения

$$u = A(c(t), r, r_0) - B_1(-c_1(t), r, r_0) + 2 \int_{r_0}^r g(x) dx.$$

В момент времени $t = t_1 > t_0$, скорость движения внешнего цилиндра становится постоянной: $v^+ = a_1 t_1$. Теперь область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_2(t)$ ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = r_2(t)$. В области $r_2(t) \leq r \leq R$ материал по-прежнему деформируется обратимо.

В области обратимого деформирования $r_2(t) \leq r \leq R$ для скорости выполняется зависимость

$$v = A(\dot{c}(t), r, R) + H(-c(t), R) + a_1 t_1,$$

а в области вязкопластического течения скорость находится по формуле (2.59). Положение упругопластической границы $r = r_2(t)$ задается обыкновенным дифференциальным уравнением (2.53). Для компоненты p_{rz} тензора пластических деформаций выполняется соотношение (2.41), в котором функция $g_1(r)$ в интервале $r_0 \leq r \leq r_1(t_1)$ совпадает с функцией $g(r)$, а в интервале $r_1(t_1) \leq r \leq r_2(t)$ для ее определения получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \eta r g_1' + \eta g_1 - k \tau = 0, \quad \mu \tau' (a_1 t_1 + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, R)) = -k \ln \frac{r_0}{R}, \\ g_1(r_1) = g(r_1), \quad \tau(r_1) = t_1. \end{aligned}$$

Для перемещений в области обратимого деформирования имеем

$$u = A(c(t), r, r_0) - B_1(-c_1(t), r_2, r_0) + 2 \int_{r_0}^{r_2} g_1(x) dx,$$

в области вязкопластического течения

$$u = A(c(t), r, r_0) - B_1(-c_1(t), r, r_0) + 2 \int_{r_0}^r g_1(x) dx.$$

В момент времени $t = t_2 > t_1$ внешний цилиндр начинает двигаться равнозамедленно со скоростью $v^+ = a_1 t_1 - a_2(t - t_2)$. Появляется новая упруго-пластическая граница $r = r_3(t)$, которая движется к центру от поверхности $r = r_2(t_2)$. Деформируемая область $r_0 \leq r \leq R$ разбивается теперь на три части: вязкопластическое течение происходит в области $r_0 \leq r \leq r_3(t)$, в области $r_3(t) \leq r \leq r_2(t_2)$ компонента p_{rz} не изменяется, а в области $r_2(t_2) \leq r \leq R$ продолжается обратимое деформирование.

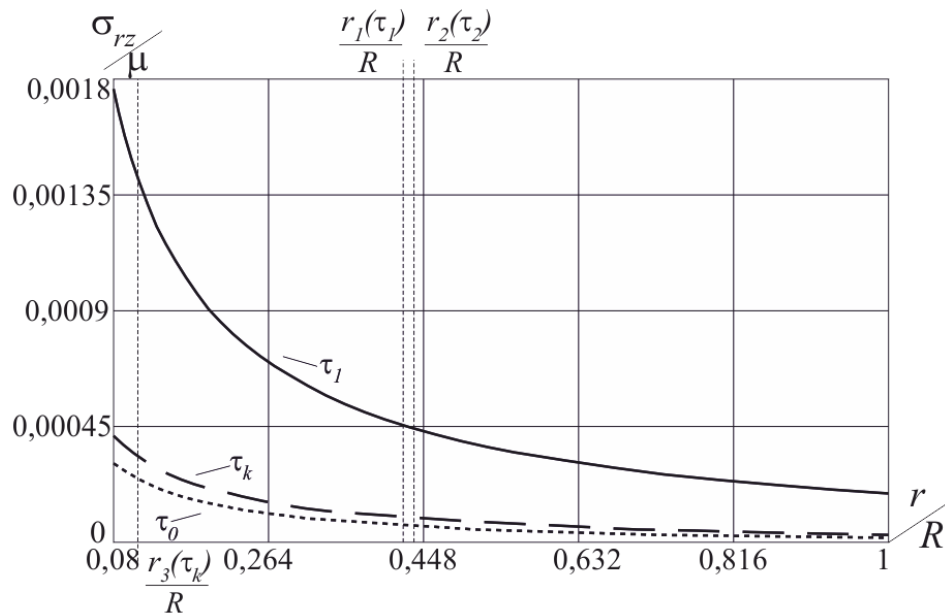


Рис. 2.30. Распределение напряжения σ_{rz} в разные моменты времени

В области обратимого деформирования $r_2(t_2) \leq r \leq R$ и области с неизменяющейся компонентой p_{rz} $r_3(t) \leq r \leq r_2(t_2)$ скорость имеет вид

$$v = A(\dot{c}(t), r, R) + H(-c(t), R) + a_1 t_1 - a_2(t - t_2).$$

В области вязкопластического течения для скоростей точек среды справедливо соотношение (2.59). Движущаяся упругопластическая граница $r = r_3(t)$ определяется из дифференциального уравнения (2.54). Компонента

p_{rz} тензора пластических деформаций определяется по формуле (2.41). В области $r_3(t) \leq r \leq r_2(t_2)$ пластическая деформация имеет вид (2.43), где функция $\tau(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.55).

Для перемещений выполняются зависимости:

– в области обратимого деформирования

$$u = A(c(t), r, r_0) - B_1(-c_1(t), r_3, r_0) + \frac{2}{\eta} \int_{r_3}^{r_2} \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} - k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_0}^{r_2} g_1(x) dx, \quad (2.60)$$

– в области, в которой p_{rz} не изменяется,

$$u = A(c(t), r, r_0) - B_1(-c_1(t), r_3, r_0) + \frac{2}{\eta} \int_{r_3}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} - k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_0}^r g_1(x) dx, \quad (2.61)$$

– в области вязкопластического течения

$$u = A(c(t), r, r_0) - B_1(-c_1(t), r, r_0) + 2 \int_{r_0}^r g_1(x) dx. \quad (2.62)$$

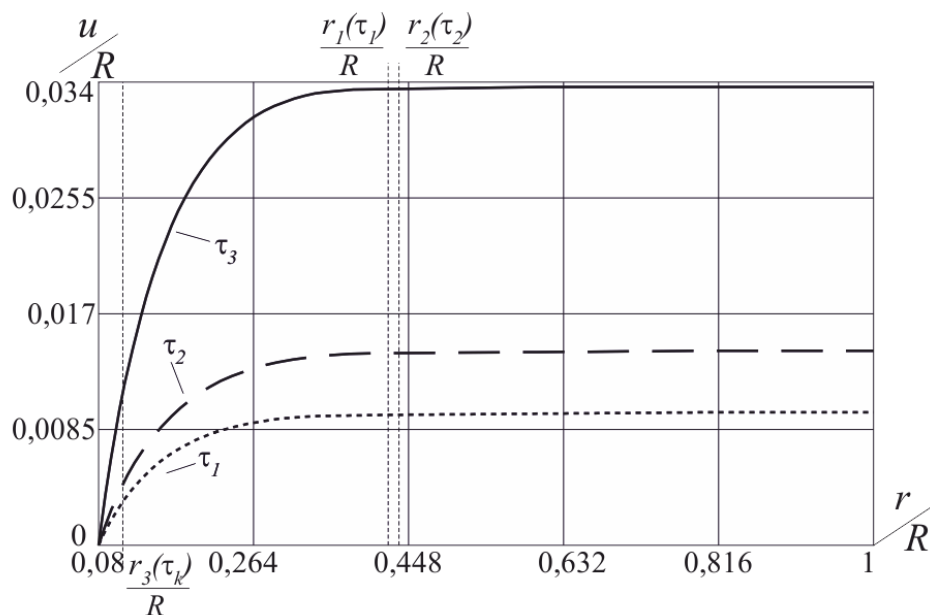


Рис. 2.31. Распределение перемещений в разные моменты времени

В момент времени $t = t_k$ внутренний цилиндр $r = r_0$ останавливается, но граница $r = r_3(t)$ все еще не достигла r_0 . Для области обратимого деформирования и области с неизменяющейся компонентой p_{rz} скорость вычисляется

из соотношения

$$v = A(\dot{c}(t), r, R) + H(-c(t), R),$$

а в области вязкопластического течения для скоростей точек среды выполняется зависимость (2.59). Для упругопластической границы $r = r_4(t)$ дифференциальное уравнение имеет вид (2.56). В области $r_4(t) \leq r \leq r_2(t_2)$ компонента p_{rz} определяется по формуле (2.43), где функция $\tau(r)$ в интервале $r_3(t_k) \leq r \leq r_2(t_2)$ является решением дифференциального уравнения (2.55), а в интервале $r_4(t) \leq r \leq r_3(t_k)$ удовлетворяет уравнению (2.57). Для перемещений остаются справедливыми зависимости (2.60)-(2.62).

В момент времени $t = t_3$ упругопластическая граница $r = r_4(t)$ достигает внутренней поверхности и в этот же момент на внешней поверхности вновь выполняется условие прилипания. Деформируемая область $r_0 \leq r \leq R$ разбивается теперь на две части: в области $r_0 \leq r \leq r_2(t_2)$ компонента p_{rz} не изменяется, в области $r_2(t_2) \leq r \leq R$ материал деформируется обратимо. Дальнейшая разгрузка связана с уменьшением напряжения σ_{rr} до нуля. В конечный момент разгрузки перемещения имеют вид

– в области обратимого деформирования

$$u = -B_1(-c_1(t), r_3, r_0) + \frac{2}{\eta} \int_{r_3}^{r_2} \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} - k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_0}^{r_2} g_1(x) dx,$$

– в области с неизменяющейся компонентой p_{rz} тензора пластических деформаций

$$u = -B_1(-c_1(t), r_3, r_0) + \frac{2}{\eta} \int_{r_3}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} - k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_0}^r g_1(x) dx.$$

На рисунке 2.29 изображено распределение компоненты p_{rz} тензора пластических деформаций, а на рисунке 2.31 – распределение перемещений в моменты времени $\tau = \tau_1$ (пунктирная линия), $\tau = \tau_2$ (штриховая линия) и $\tau = \tau_3$ (сплошная линия). Рисунок 2.30 показывает напряжение σ_{rz} в моменты

времени $\tau = \tau_0$ (пунктирная линия), $\tau = \tau_1$ (сплошная линия) и $\tau = \tau_k$ (штриховая линия).

2.3. Прямолинейное течение в упруговязкопластическом цилиндрическом слое при возможном двустороннем проскальзывании материала

2.3.1. Обратимое деформирование и вязкопластическое течение

Как и ранее, рассмотрим деформирование цилиндрического слоя несжимаемого упруговязкопластического материала, расположенного между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ ($R > r_0$). Полагаем, что внешний цилиндр закреплен, а внутренняя поверхность равноускоренно движется

$$v^+ \Big|_{r=R} = u^+ \Big|_{r=R} = 0, \quad v^+ \Big|_{r=r_0} = a_1 t, \quad u^+ \Big|_{r=r_0} = \frac{a_1 t^2}{2}.$$

На границах $r = r_0$ и $r = R$ выполняется условие прилипания:

$$\left(\sigma_{rz} - f |\sigma_{rr}| \right) < 0. \quad (2.63)$$

Решение упругой задачи имеет вид (2.4). Положим, как и в первом случае $\sigma_0 < k/f$, тогда проскальзывание на внутренней поверхности начнется до возникновения пластического течения на ней же.

В некоторый момент времени $t = t^*$ на границе $r = r_0$ неравенство (2.63) обратится в равенство и материал начнет проскальзывать в окрестности внутреннего цилиндра. Условие (2.63) для границы $r = r_0$ заменим условием (2.6), а на границе $r = R$ оно будет по-прежнему выполняться. Новое граничное условие (2.6) приведет к изменению функции $c(t)$ в соотношениях (2.4). Для нее получим дифференциальное уравнение (2.7), решением которого будет функция (2.8). Для скоростей, перемещений и напряжений частиц

деформируемой среды выполняются зависимости (2.4), в которых функция $c(t)$ определяется по формуле (2.8).

В некоторый момент времени $t = t_0$ на внутренней границе $r = r_0$ выполнится условие пластичности $\sigma_{rz}|_{r=r_0} = -k$. Момент времени $t = t_0$ начала вязкопластического течения определим из уравнения $c(t_0) = -kr_0$.

Развивающаяся с момента времени $t = t_0$ область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = r_1(t)$. В области $r_1(t) \leq r \leq R$ материал по-прежнему деформируется обратимо.

В области обратимого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R$ интегрированием уравнений равновесия (2.3) в условиях прилипания на поверхности $r = R$ получим соотношения (2.9).

В области вязкопластического течения компонента ε_{rz}^p тензора скоростей пластических деформаций определяется из зависимости (2.10), а компонента p_{rz} тензора пластических деформаций – из выражения (2.15). Скорость точек среды имеет вид (2.13). Положение упругопластической границы $r = r_1(t)$ в каждый момент времени задается обыкновенным дифференциальным уравнением (2.14). Для неизвестной функции интегрирования $g(r)$ в (2.15) также получим систему дифференциальных уравнений (2.16). Компонента перемещений в области вязкопластического течения вычисляется по формуле (2.18).

В некоторый момент времени $t = t_s$, который определяется из уравнения $c(t_s) = -f\sigma_0 R$ на границе $r = R$ неравенство (2.63) обратится в равенство, т.е. материал начнет проскальзывать и в окрестности внешнего цилиндра. В таком движении потребуем выполнения условия (2.49).

Область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_2(t)$ теперь ограничивается поверхностями $r = r_0$ и $r = r_2(t)$. В области $r_2(t) \leq r \leq R$ по-прежнему про-

исходит обратимое деформирование, $r_2(t)$ – новая движущаяся граница области вязкопластического течения.

В области обратимого деформирования, интегрируя уравнения равновесия, получим

$$\sigma_{rz} = \frac{c(t)}{r}, \quad v = A(\dot{c}(t), r, R) - H(c(t), R). \quad (2.64)$$

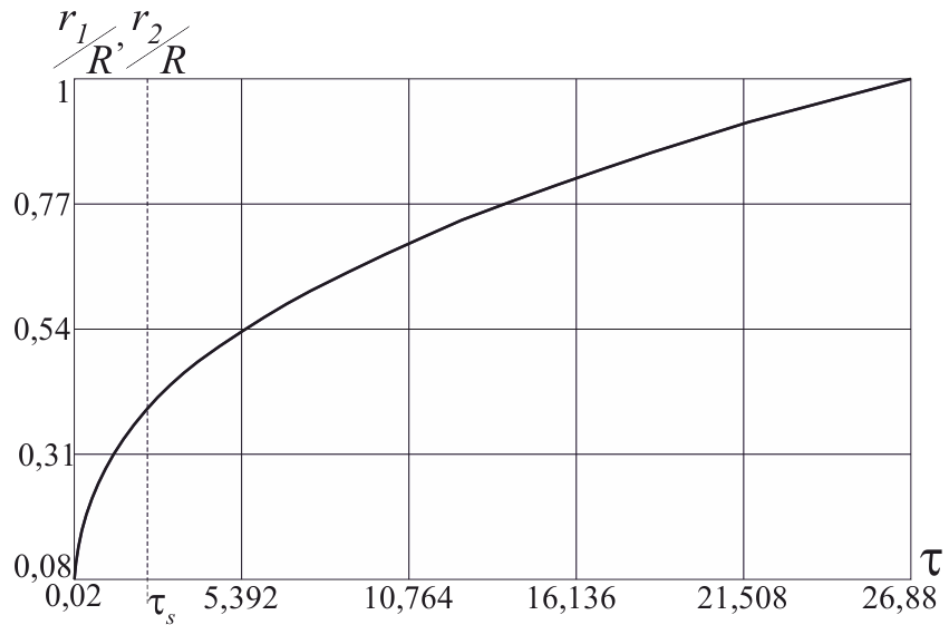


Рис. 2.32. Уругопластические границы r_1/R и r_2/R

Интегрируя второе соотношение (2.64) по времени и учитывая непрерывность перемещения в момент времени $t = t_s$, получим компоненту перемещений в области обратимого деформирования

$$u = A(c(t), r, R) - \frac{c_1(t) - c_1(t_s)}{\xi R} - \frac{f\sigma_0(t - t_s)}{\xi}. \quad (2.65)$$

В области вязкопластического течения для скорости выполняется зависимость (2.13). Из условия равенства скоростей на уругопластической границе $r = r_2(t)$ получим для нее дифференциальное уравнение

$$A(k\dot{r}_2, r_0, R) + B(-kr_2, r_2, r_0) + H(-kr_2, r_0) + H(-kr_2, R) + a_1 t = 0. \quad (2.66)$$

Для компоненты p_{rz} тензора пластических деформаций выполняется соотношение (2.21), в котором функция $g_1(r)$ в интервале $r_0 \leq r \leq r_1(t_s)$ совпадает с функцией $g(r)$, а в промежутке $r_1(t_s) \leq r \leq r_2(t)$ выражается из системы дифференциальных уравнений

$$\eta r g_1' + \eta g_1 + k\tau = 0, \quad \mu \tau' (a_1 t + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, r_0) + H(-kr, R)) = -k \ln \frac{r_0}{R}, \quad g_1(r_1) = g(r_1), \quad \tau(r_1) = t_s.$$

Из (2.5), (2.17), (2.21) и условия непрерывности компоненты вектора перемещений на упругопластической границе $r = r_2(t)$ найдем перемещение в области течения.

$$u = A(c(t), r, R) + B_1(c_1(t), r, r_2) + 2 \int_{r_2}^r g_1(x) dx - \frac{c_1(t) - c_1(t_s)}{\xi R} - \frac{f\sigma_0(t - t_s)}{\xi}.$$

Пусть, начиная с момента времени $t = t_1 > t_s$, скорость движения внутренней цилиндрической поверхности становится постоянной: $v^+ = a_1 t_1$. Теперь область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_3(t)$ ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = r_3(t)$. В области $r_3(t) \leq r \leq R$ происходит обратимое деформирование материала.

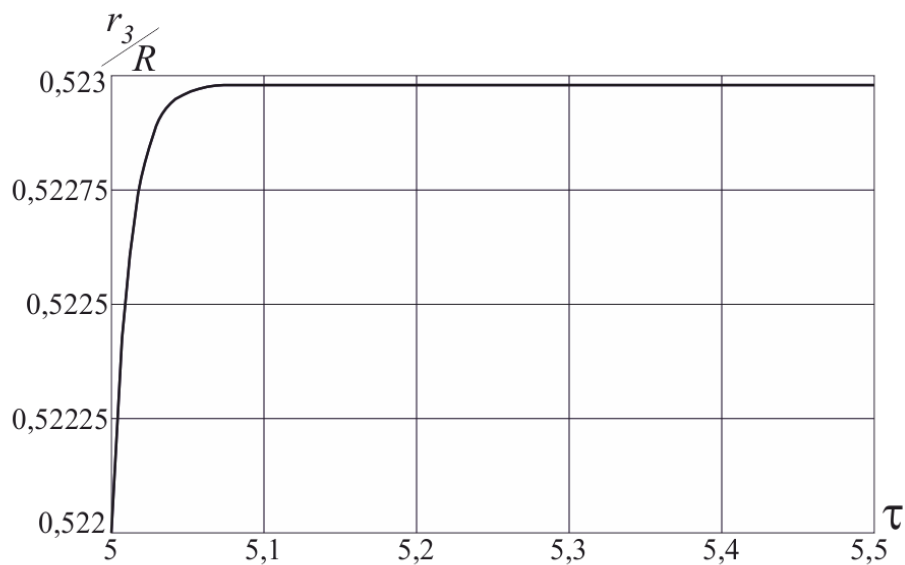


Рис. 2.33. Изменение упругопластической границы r_3/R

В области обратимого деформирования $r_3(t) \leq r \leq R$ выполняются зависимости (2.64) и (2.65). В области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_3(t)$ для скоростей точек среды получим соотношение (2.19)

Положение упругопластической границы $r = r_3(t)$ в каждый момент времени задается обыкновенным дифференциальным уравнением, следующим из условия непрерывности скоростей при $r = r_3(t)$ и равенства $c(t) = -kr_3(t)$,

$$A(k\dot{r}_3, r_0, R) + B(-kr_3, r_3, r_0) + H(-kr_3, r_0) + H(-kr_3, R) + a_1 t_1 = 0. \quad (2.67)$$

Для компоненты p_{rz} тензора пластических деформаций из (2.10) и (2.12) имеем

$$p_{rz} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(t)}{r} + kt \right) + g_2(r). \quad (2.68)$$

Здесь функция $g_2(r)$ – неизвестная функция интегрирования. В интервале $r_0 \leq r \leq r_2(t_1)$ она совпадает с функцией $g_1(r)$, а в области $r_2(t_1) \leq r \leq r_3(t)$ для ее определения получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \mu\tau'(a_1 t_1 + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, r_0) + H(-kr, R)) &= -k \ln \frac{r_0}{R}, \\ \eta r g_2' + \eta g_2 + k\tau &= 0, \quad g_2(r_2) = g_1(r_2), \quad \tau(r_2) = t_s. \end{aligned}$$

Из (2.5), (2.17), (2.68) и условия непрерывности компоненты вектора перемещений на упругопластической границе $r = r_3(t)$ найдем в области пластического течения

$$u = A(c(t), r, R) + B_1(c_1(t), r, r_3) + 2 \int_{r_3}^r g_2(x) dx - \frac{c_1(t) - c_1(t_s)}{\xi R} - \frac{f\sigma_0(t - t_s)}{\xi}.$$

После того, как движение становится равномерным ($t > t_1$), упругопластическая граница $r = r_3(t)$ асимптотически приближается к своему предельному значению и далее область течения не увеличивается.

На рисунке 2.32 изображено изменение границ r_1/R и r_2/R , а на рисунке

2.33 – изменение границы r_3/R со временем.

2.3.2. Торможение вязкопластического течения и разгрузка среды

Положим теперь, что с некоторого момента времени $t = t_2 > t_1$ внутренний цилиндр начинает двигаться равнозамедленно со скоростью $v^+ = a_1 t_1 - a_2(t - t_2)$. Торможение продолжается до полной остановки внутренней поверхности. Конечным моментом торможения является момент времени $t = t_k$ (2.22). Изменение в режиме нагружения приводит к возникновению новой упругопластической границы $r = r_4(t)$, которая движется к центру от стационарной поверхности $r = r_3(t_2)$. Деформируемая область $r_0 \leq r \leq R$ разбивается на три части: вязкопластическое течение продолжается в области $r_0 \leq r \leq r_4(t)$, в области $r_4(t) \leq r \leq r_3(t_2)$ компонента p_{rz} перестает изменяться, а в области $r_3(t_2) \leq r \leq R$ материал деформируется обратимо.

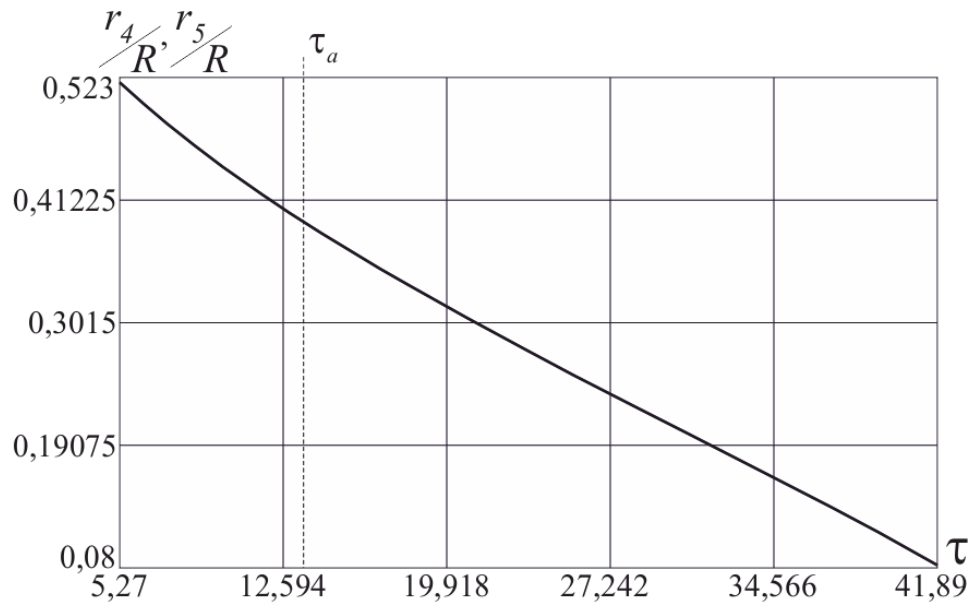


Рис. 2.34. Упругопластические границы r_4/R и r_5/R

Для области обратимого деформирования $r_3(t_2) \leq r \leq R$ остаются справедливыми зависимости (2.64) и (2.65). В области с неизменяющейся компонентой p_{rz} скорость вычисляется по второй формуле (2.64). В области вязкопластического течения для скоростей точек среды выполняется зависимость (2.23). Движущаяся упругопластическая граница $r = r_4(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$A(k\dot{r}_4, r_0, R) + B(-kr_4, r_4, r_0) + H(-kr_4, r_0) + H(-kr_4, R) + a_1 t_1 - a_2(t - t_2) = 0. \quad (2.69)$$

Для компоненты p_{rz} тензора пластических деформаций остается верным соотношение (2.68).

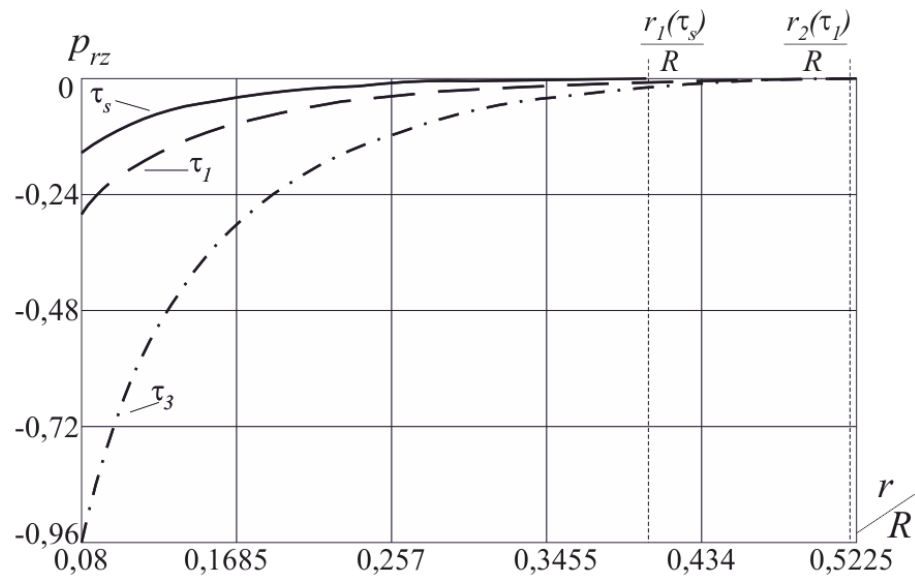


Рис. 2.35. Распределение пластической деформации p_{rz} в разные моменты времени

В области $r_4(t) \leq r \leq r_3(t_2)$ пластическая деформация p_{rz} имеет вид

$$p_{rz} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(\tau(r))}{r} + k\tau(r) \right) + g_2(r). \quad (2.70)$$

Для определения функции $\tau(r)$ из (2.69) получим дифференциальное уравнение

$$\mu\tau'(a_1 t_1 - a_2(\tau - t_2) + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, r_0) + H(-kr, R)) = -k \ln \frac{r_0}{R}, \quad (2.71)$$

$$\tau(r_3) = t_2.$$

Из первых зависимостей (2.5) и (2.64), уравнения (2.17), соотношения (2.70) и условия непрерывности перемещений на упругопластической границе $r = r_3(t_2)$ в области с неизменяющейся компонентой p_{rz} найдем

$$u = A(c(t), r, R) + \frac{2}{\eta} \int_{r_3}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} + k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_3}^r g_2(x) dx - \frac{c_1(t) - c_1(t_s)}{\xi R} - \frac{f\sigma_0(t - t_s)}{\xi}.$$

Из условия непрерывности перемещений на движущейся границе $r = r_4(t)$ в области вязкопластического течения получим

$$u = A(c(t), r, R) + B_1(c_1(t), r, r_4) + \frac{2}{\eta} \int_{r_3}^{r_4} \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} + k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_3}^r g_2(x) dx - \frac{c_1(t) - c_1(t_s)}{\xi R} - \frac{f\sigma_0(t - t_s)}{\xi}.$$

В момент времени $t = t_a$, для которого выполняется равенство $c(t_a) = -f\sigma_0 R$, на внешней границе $r = R$ вновь выполнится условие прилипания $(|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}|)_{r=R} = 0$. С этого момента времени условие (2.49) вновь следует заменить неравенством (2.63).

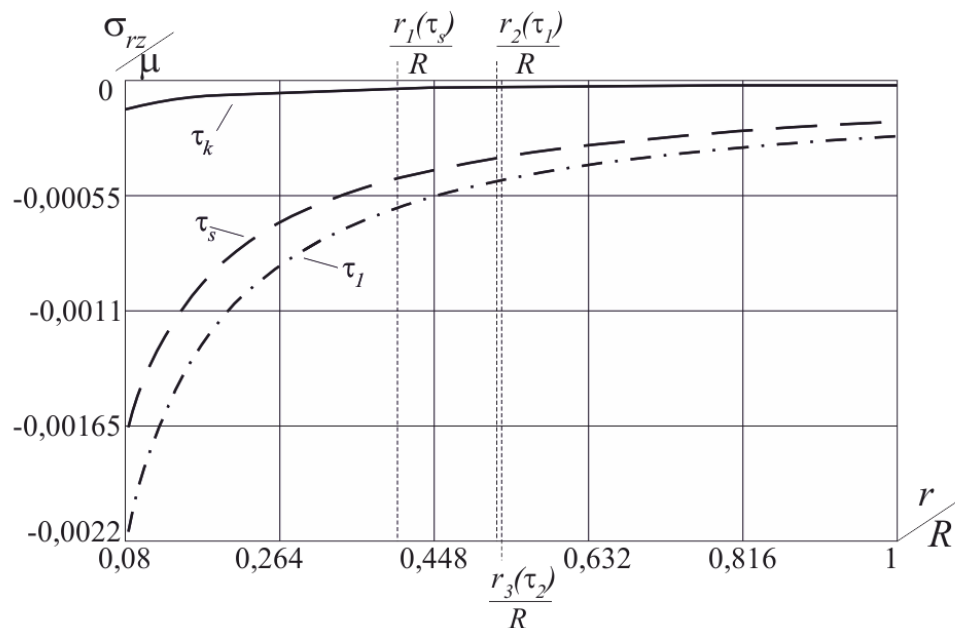


Рис. 2.36. Распределение напряжения σ_{rz} в разные моменты времени

Деформируемая область $r_0 \leq r \leq R$ состоит из трех частей: вязкопластическое течение продолжается в области $r_0 \leq r \leq r_5(t)$, в области $r_5(t) \leq r \leq r_3(t_2)$ компонента p_{rz} не изменяется, а в области $r_3(t_2) \leq r \leq R$ происходит обратимое деформирование.

Для области обратимого деформирования $r_3(t_2) \leq r \leq R$ в этом случае получим

$$v = A(\dot{c}(t), r, R), \quad u = A(c(t), r, R) - \frac{c_1(t_a) - c_1(t_s)}{\xi R} - \frac{f\sigma_0(t_a - t_s)}{\xi}. \quad (2.72)$$

В области $r_5(t) \leq r \leq r_3(t_2)$ скорость вычисляется по первой формуле (2.72). В области вязкопластического течения для скоростей точек среды выполняется зависимость (2.23). Значение движущейся упругопластической границы $r = r_5(t)$ в каждый момент времени определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$A(k\dot{r}_5, r_0, R) + B(-kr_5, r_5, r_0) + H(-kr_5, r_0) + a_1 t_1 - a_2(t - t_2) = 0. \quad (2.73)$$

Для компоненты p_{rz} тензора пластических деформаций в области вязкопластического течения остается верным соотношение (2.68). В области $r_5(t) \leq r \leq r_3(t_2)$ пластическая деформация p_{rz} имеет вид (2.70). В интервале $r_4(t_a) \leq r \leq r_3(t_2)$ для определения функции $\tau(r)$ следует использовать дифференциальное уравнение (2.71), а в интервале $r_5(t) \leq r \leq r_4(t_a)$ – уравнение (2.26) с начальным условием $\tau(r_4) = t_a$.

В области с неизменяющейся компонентой p_{rz} перемещение имеет вид

$$u = A(c(t), r, R) + \frac{2}{\eta} \int_{r_3}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} + k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_3}^r g_2(x) dx - \frac{c_1(t_a) - c_1(t_s)}{\xi R} - \frac{f\sigma_0(t_a - t_s)}{\xi}. \quad (2.74)$$

В области вязкопластического течения получим

$$u = A(c(t), r, R) + B_1(c_1(t), r, r_3) + \frac{2}{\eta} \int_{r_3}^{r_5} \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} + k\tau(x) \right) dx + \\ + 2 \int_{r_3}^r g_2(x) dx - \frac{c_1(t_a) - c_1(t_s)}{\xi R} - \frac{f\sigma_0(t_a - t_s)}{\xi}.$$

В некоторый момент времени $t = t_3 < t_k$ упругопластическая граница $r = r_3(t)$ доходит до внутренней границы $r = r_0$. Деформируемая область $r_0 \leq r \leq R$ разбивается теперь на две части: в области $r_0 \leq r \leq r_3(t_2)$ компонента p_{rz} не изменяется, в области $r_3(t_2) \leq r \leq R$ материал деформируется обратимо. С момента времени $t = t_3$ скорость становится одинаковой во всей области деформирования и вычисляется по первой зависимости (2.72). Используя эту формулу и условие (2.6) получим дифференциальное уравнение для функции $c(t)$ (2.28), решением которого будет функция (2.29). Соотношения (2.72) и (2.74) остаются справедливыми, только в этом случае для функции $c(t)$ следует использовать выражение (2.29).

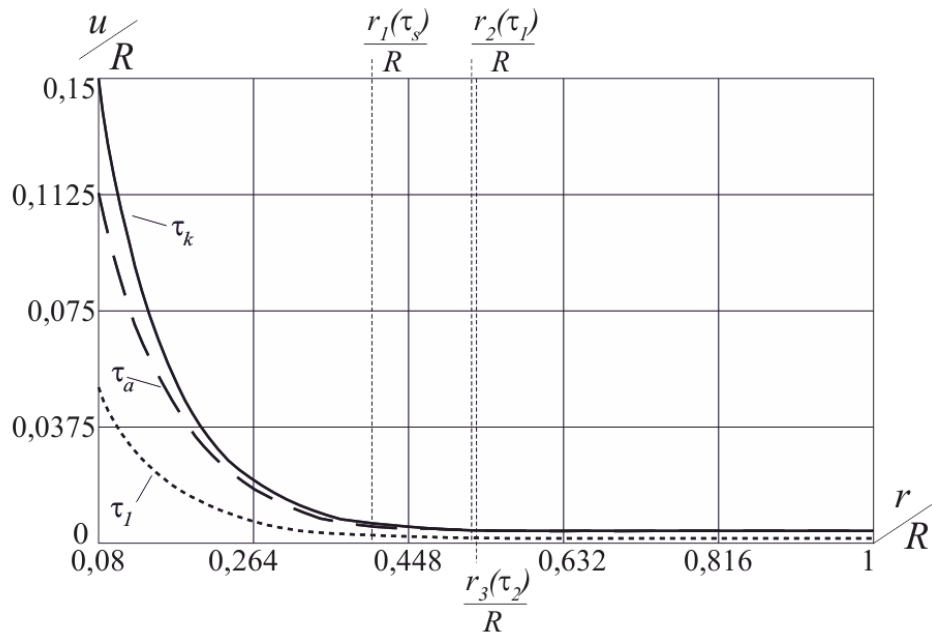


Рис. 2.37. Распределение перемещений в разные моменты времени

В момент времени $t = t_k$ внутренний жесткий цилиндр останавливается. С этого момента времени функция $c(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.30) и имеет вид (2.31).

В момент времени $t = t_4$ на внутренней границе выполнится равенство $(\sigma_{rz} - f|\sigma_{rr}|)_{r=r_0} = 0$. С этого момента времени напряжения, деформации и перемещения перестают изменяться. Дальнейшая разгрузка связана с уменьшением напряжения σ_{rr} . В конечный момент разгрузки перемещения в области обратимого деформирования примут форму

$$u = -\frac{c_1(t_a) - c_1(t_s)}{\xi R} - \frac{f\sigma_0(t_a - t_s)}{\xi}.$$

В области с накопленными пластическими деформациями перемещения будут определяться формулой

$$u = \frac{2}{\eta} \int_{r_3}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} + k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_3}^r g_2(x) dx - \frac{c_1(t_a) - c_1(t_s)}{\xi R} - \frac{f\sigma_0(t_a - t_s)}{\xi}.$$

На рисунке 2.34 изображено изменение границ r_4/R и r_5/R со временем. Распределение пластической деформации показано на рисунке 2.35 в моменты времени $\tau = \tau_s$ (сплошная линия), $\tau = \tau_1$ (штриховая линия) и $\tau = \tau_3$ (штрихпунктирная линия). Рисунок 2.36 иллюстрирует распределение напряжения в моменты времени $\tau = \tau_s$ (штриховая линия), $\tau = \tau_1$ (штрихпунктирная линия) и $\tau = \tau_k$ (сплошная линия). На рисунке 2.37 показано распределение перемещений в моменты времени $\tau = \tau_1$ (пунктирная линия), $\tau = \tau_a$ (штриховая линия) и $\tau = \tau_k$ (сплошная линия).

2.3.3. Деформирование среды при движении внешнего жесткого цилиндра

Пусть теперь внешний цилиндр движется равноускоренно, а внутренний жестко закреплен

$$v^+ \Big|_{r=r_0} = u^+ \Big|_{r=r_0} = 0, \quad v^+ \Big|_{r=R} = a_1 t, \quad u^+ \Big|_{r=R} = \frac{a_1 t^2}{2}.$$

Полагаем также, что до некоторого момента времени $t = t^*$ на границах $r = r_0$ и $r = R$ выполняется условие (2.63). Интегрируя уравнения равновесия (2.3), получим соотношения (2.33). В момент времени $t = t^*$ на границе $r = r_0$ неравенство (2.63) обратится в равенство, и материал начнет проскальзывать в окрестности внутренней жесткой стенки. Условие (2.63) заменим зависимостью (2.34), которая приведет к изменению функции $c(t)$ в (2.33). Функция $c(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.35) и имеет вид (2.36).

В момент времени $t = t_0$ на внутренней границе $r = r_0$ выполнится условие пластичности $\sigma_{rz} \Big|_{r=r_0} = k$.

При дальнейшем движении внешней поверхности область вязкопластического течения ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = r_1(t)$. В области $r_1(t) \leq r \leq R$ материал деформируется обратимо. В области обратимого деформирования интегрированием уравнений равновесия (2.3) в условиях прилипания на поверхности $r = R$ установим, что выполняются соотношения (2.33). Для области вязкопластического течения в этом случае следуют соотношения (2.37) и (2.38). Положение упругопластической границы $r = r_1(t)$ в каждый момент времени задается обыкновенным дифференциальным уравнением (2.14). Функция $g(r)$ находится из решения системы уравнений (2.39) и (2.40).

В момент времени $t = t_s$, который определяется из уравнения $c(t_s) = f\sigma_0 R$ теперь уже на границе $r = R$ неравенство (2.63) обратится в равенство, т.е. материал начнет проскальзывать и в окрестности внешнего цилиндра. В таком движении потребуем выполнения условия (2.58).

Область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_2(t)$ ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = r_2(t)$. В области $r_2(t) \leq r \leq R$ материал по-прежнему деформируется обратимо.

В области обратимого деформирования перемещение и скорость принимают форму

$$u = A(c(t), r, R) + \frac{a_1 t^2}{2} - \frac{c_1(t) - c_1(t_s)}{\xi R} + \frac{f\sigma_0(t - t_s)}{\xi},$$

$$v = A(\dot{c}(t), r, R) + H(-c(t), R) + a_1 t.$$

В области вязкопластического течения для скорости выполняется третья зависимость (2.37). Из условия равенства скоростей на упругопластической границе $r = r_2(t)$ получим для нее дифференциальное уравнение (2.66). Для компоненты p_{rz} тензора пластических деформаций выполняется второе соотношение (2.37), в котором функция $g_1(r)$ в интервале $r_0 \leq r \leq r_1(t_s)$ совпадает с функцией $g(r)$, а в интервале $r_1(t_s) \leq r \leq r_2(t)$ для ее определения служит система дифференциальных уравнений

$$\eta r g_1' + \eta g_1 - k\tau = 0, \quad \mu \tau'(a_1 t + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, r_0) + H(-kr, R)) =$$

$$= -k \ln \frac{r_0}{R}, \quad g_1(r_1) = g(r_1), \quad \tau(r_1) = t_s.$$

Из (2.5), (2.17), второй зависимости (2.37) и условия непрерывности компоненты вектора перемещений на упругопластической границе $r = r_2(t)$ найдем в области течения

$$u = A(c(t), r, R) - B_1(-c_1(t), r, r_2) + 2 \int_{r_2}^r g_1(x) dx +$$

$$+ \frac{a_1 t^2}{2} - \frac{c_1(t) - c_1(t_s)}{\xi R} + \frac{f\sigma_0(t - t_s)}{\xi}.$$

Пусть, начиная с момента времени $t = t_1 > t_0$, скорость движения внешней цилиндрической поверхности становится постоянной: $v^+|_{r=R} = a_1 t_1$. Теперь область вязкопластического течения ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = r_3(t)$. В области $r_3(t) \leq r \leq R$ материал по-прежнему деформируется обратимо.

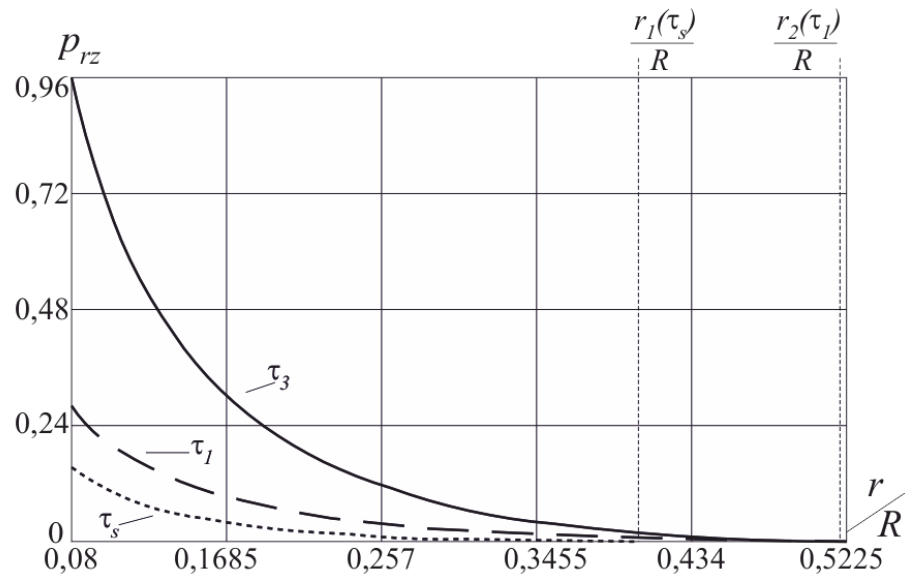


Рис. 2.38. Распределение пластической деформации в разные моменты времени

В области обратимого деформирования $r_3(t) \leq r \leq R$ перемещение и скорость имеют вид

$$u = A(c(t), r, R) + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t^2}{2} - \frac{c_1(t) - c_1(t_s)}{\xi R} + \frac{f \sigma_0 (t - t_s)}{\xi},$$

$$v = A(\dot{c}(t), r, R) + H(-c(t), R) + a_1 t_1.$$

В области вязкопластического течения для скорости точек среды выполняется третье соотношение из (2.37). Положение упругопластической границы $r = r_3(t)$ в каждый момент времени задается дифференциальным уравнением (2.67). Для компоненты p_{rz} тензора пластических деформаций имеем

$$p_{rz} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(t)}{r} - kt \right) + g_2(r). \quad (2.75)$$

Здесь функция $g_2(r)$ в интервале $r_0 \leq r \leq r_2(t_1)$ совпадает с функцией $g_1(r)$, а в интервале $r_2(t_1) \leq r \leq r_3(t)$ для ее определения получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \mu\tau'(a_1t_1 + B(-kr, r, r_0) + H(-kr, r_0) + H(-kr, R)) &= -k \ln \frac{r_0}{R}, \\ \eta r g_2' + \eta g_2 - k\tau &= 0, \quad g_2(r_2) = g_1(r_2), \quad \tau(r_2) = t_1. \end{aligned}$$

Перемещение в области вязкопластического течения определяется по формуле

$$\begin{aligned} u &= A(c(t), r, R) - B_1(-c_1(t), r, r_3) + 2 \int_{r_3}^r g_2(x) dx + \\ &+ a_1 t_1 t - \frac{a_1 t^2}{2} - \frac{c_1(t) - c_1(t_s)}{\xi R} + \frac{f\sigma_0(t - t_s)}{\xi}. \end{aligned}$$

С некоторого момента времени $t = t_2 > t_1$ внешний цилиндр начинает двигаться равнозамедленно со скоростью $v^+|_{r=R} = a_1 t_1 - a_2(t - t_2)$. Деформируемая область $r_0 \leq r \leq R$ разбивается теперь на три подобласти: вязкопластическое течение продолжается в области $r_0 \leq r \leq r_4(t)$, в области $r_4(t) \leq r \leq r_3(t_2)$ компонента p_{rz} перестает изменяться, а в области $r_3(t_2) \leq r \leq R$ происходит обратимое деформирование.

Для области обратимого деформирования $r_3(t_2) \leq r \leq R$ получим

$$\begin{aligned} u &= A(c(t), r, R) + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t - t_2)^2 - \frac{c_1(t) - c_1(t_s)}{\xi R} + \frac{f\sigma_0(t - t_s)}{\xi}, \quad (2.76) \\ v &= A(\dot{c}(t), r, R) + H(-c(t), R) + a_1 t_1 - a_2(t - t_2). \end{aligned}$$

В области с неизменяющейся компонентой p_{rz} для скорости справедливо второе соотношение (2.76). В области вязкопластического течения для скоростей точек среды выполняется третья зависимость из (2.37). Движущаяся упругопластическая граница $r = r_4(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения (2.69).

В области $r_4(t) \leq r \leq r_3(t_2)$ компонента p_{rz} имеет вид

$$p_{rz} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1(\tau(r))}{r} - k\tau(r) \right) + g_2(r). \quad (2.77)$$

Для определения функции $\tau(r)$ получим дифференциальное уравнение (2.71). В области с неизменяющейся компонентой p_{rz} перемещение определяется по формуле

$$u = A(c(t), r, R) + \frac{2}{\eta} \int_{r_3}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} - k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_3}^r g_2(x) dx + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t - t_2)^2 - \frac{c_1(t) - c_1(t_s)}{\xi R} + \frac{f\sigma_0(t - t_s)}{\xi},$$

а в области вязкопластического течения по соотношению

$$u = A(c(t), r, R) - B_1(-c_1(t), r, r_4) + \frac{2}{\eta} \int_{r_3}^{r_4} \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} - k\tau(x) \right) dx + \int_{r_3}^r g_2(x) dx + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t - t_2)^2 - \frac{c_1(t) - c_1(t_s)}{\xi R} + \frac{f\sigma_0(t - t_s)}{\xi}.$$

В момент времени $t = t_a$, для которого выполняется равенство $c(t_a) = f\sigma_0 R$, на внешней границе $r = R$ вновь выполнится условие прилипания $(\sigma_{rz} - f|\sigma_{rr}|)_{r=R} = 0$. С этого момента времени условие (2.58) вновь следует заменить неравенством (2.63).

Деформируемая область $r_0 \leq r \leq R$ состоит из трех частей: вязкопластическое течение продолжается в области $r_0 \leq r \leq r_5(t)$, в области $r_5(t) \leq r \leq r_3(t_2)$ компонента p_{rz} не изменяется, а в области $r_3(t_2) \leq r \leq R$ материал деформируется обратимо.

Для области обратимого деформирования $r_3(t_2) \leq r \leq R$ в этом случае получим

$$u = A(c(t), r, R) + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t - t_2)^2 - \frac{c_1(t_a) - c_1(t_s)}{\xi R} + \frac{f\sigma_0(t_a - t_s)}{\xi}, \quad (2.78)$$

$$v = A(\dot{c}(t), r, R) + a_1 t_1 - a_2 (t - t_2).$$

В области $r_5(t) \leq r \leq r_3(t_2)$ скорость вычисляется по второй зависимости (2.78). В области вязкопластического течения для скоростей точек среды вы-

полняется третье соотношение (2.37). Значение движущейся упругопластической границы $r = r_5(t)$ в каждый момент времени находим из обыкновенного дифференциального уравнения (2.73).

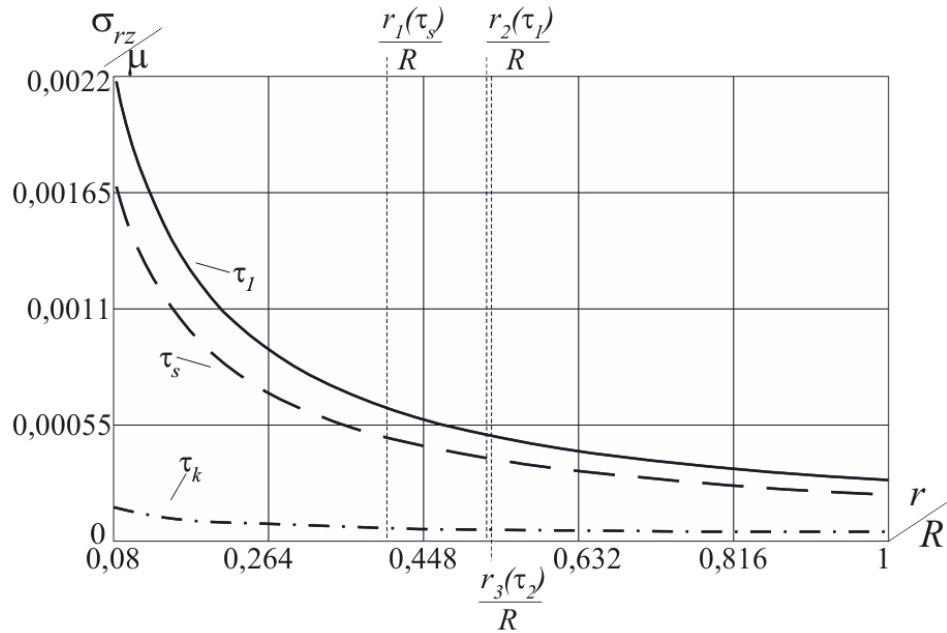


Рис. 2.39. Распределение напряжения в разные моменты времени

Для компоненты p_{rz} тензора пластических деформаций в области вязкопластического течения остается верным соотношение (2.75). В области $r_5(t) \leq r \leq r_3(t_2)$ компонента p_{rz} имеет вид (2.77). В интервале $r_4(t_a) \leq r \leq r_3(t_2)$ функция $\tau(r)$ определяется из дифференциального уравнения (2.71), а в интервале $r_5(t) \leq r \leq r_4(t_a)$ – из уравнения (2.26) с начальным условием $\tau(r_4) = t_a$.

В области с неизменяющейся компонентой p_{rz} тензора пластических деформаций перемещение имеет вид

$$u = A(c(t), r, R) + \frac{2}{\eta_{r_3}} \int_{r_3}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} - k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_3}^r g_2(x) dx + a_1 t_1 t - \frac{a_1 t^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t - t_2)^2 - \frac{c_1(t_a) - c_1(t_s)}{\xi R} + \frac{f\sigma_0(t_a - t_s)}{\xi},$$

В области вязкопластического течения получим

$$u = A(c(t), r, R) - B_1(-c_1(t), r, r_5) + \frac{2}{\eta} \int_{r_3}^{r_5} \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} - k\tau(x) \right) dx + \int_{r_3}^r g_2(x) dx +$$

$$+ a_1 t_1 t - \frac{a_1 t^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t - t_2)^2 - \frac{c_1(t_a) - c_1(t_s)}{\xi R} + \frac{f\sigma_0(t_a - t_s)}{\xi}.$$

В некоторый момент времени $t = t_3 < t_k$ выполнится равенство: $r_5(t_3) = r_0$. Деформируемая область $r_0 \leq r \leq R$ разбивается теперь на две части: в области $r_0 \leq r \leq r_3(t_2)$ компонента p_{rz} не изменяется, в области $r_3(t_2) \leq r \leq R$ материал деформируется обратимо. С момента времени $t = t_3$ скорость становится одинаковой во всей области деформирования и вычисляется по второй формуле (2.78). Для функции $c(t)$ получим дифференциальное уравнение (2.44), решением которого является функция (2.45).

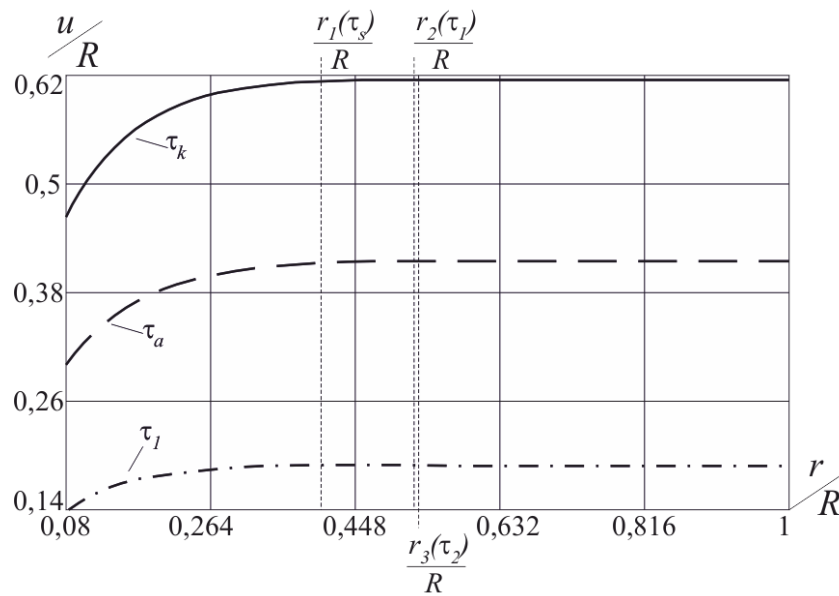


Рис. 2.40. Распределение перемещений в разные моменты времени

В момент времени $t = t_k$ внешний жесткий цилиндр останавливается. Интегрируя уравнения равновесия в области $r_3(t_2) \leq r \leq R$, получим

$$u = A(c(t), r, R) + a_1 t_1 t_k - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t_k - t_2)^2 - \frac{c_1(t_a) - c_1(t_s)}{\xi R} + \frac{f\sigma_0(t_a - t_s)}{\xi}, \quad (2.79)$$

$$v = A(\dot{c}(t), r, R).$$

В области $r_0 \leq r \leq r_3(t_2)$ скорость вычисляется по второй зависимости из (2.79), а для перемещения имеем

$$u = A(c(t), r, R) + \frac{2}{\eta_{r_3}} \int_{r_3}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} - k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_3}^r g_2(x) dx + a_1 t_1 t_k - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t_k - t_2)^2 - \frac{c_1(t_a) - c_1(t_s)}{\xi R} + \frac{f\sigma_0(t_a - t_s)}{\xi},$$

Функция $c(t)$ имеет вид (2.47).

В момент времени $t = t_4$ на внутренней границе выполнится равенство $(\sigma_{rz} - f|\sigma_{rr}|)_{r=r_0} = 0$. С этого момента времени напряжения, деформации и перемещения перестают изменяться. Дальнейшая разгрузка связана с уменьшением радиального напряжения σ_{rr} . В конечный момент разгрузки в области обратимого деформирования для перемещений получим

$$u = a_1 t_1 t_k - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t_k - t_2)^2 - \frac{c_1(t_a) - c_1(t_s)}{\xi R} + \frac{f\sigma_0(t_a - t_s)}{\xi},$$

а в области с накопленными пластическими деформациями перемещения будут определяться формулой

$$u = \frac{2}{\eta_{r_3}} \int_{r_3}^r \left(\frac{c_1(\tau(x))}{x} - k\tau(x) \right) dx + 2 \int_{r_3}^r g_2(x) dx + a_1 t_1 t_k - \frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2}{2} (t_k - t_2)^2 - \frac{c_1(t_a) - c_1(t_s)}{\xi R} + \frac{f\sigma_0(t_a - t_s)}{\xi}.$$

Распределение компоненты p_{rz} изображено на рисунке 2.38 в моменты времени $\tau = \tau_s$, $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_3$ пунктирной, штриховой и сплошной линиями соответственно. Рисунок 2.39 иллюстрирует распределение напряжений в моменты времени $\tau = \tau_s$ (штриховая линия), $\tau = \tau_1$ (сплошная линия) и $\tau = \tau_k$ (штрихпунктирная линия). Перемещения показаны на рисунке 2.40 в моменты времени $\tau = \tau_1$ (штрихпунктирная линия), $\tau = \tau_a$ (штриховая линия) и $\tau = \tau_k$ (сплошная линия).

Глава 3. Неизотермическое деформирование упруговязкопластического плоского тяжелого слоя

Деформационные и тепловые процессы всегда взаимосвязаны. Деформирование вызывает тепловыделение, а изменение температуры может вызывать деформирование тела, в том числе и необратимое. Такие процессы могут рассматриваться лишь в рамках модели больших деформаций, так как хотя бы в областях течения деформации не являются малыми. Изучение же закономерностей продвижения упругопластических границ и формирования уровня и распределения остаточных напряжений приводит к необходимости учета упругих свойств материала при его вязкопластическом течении.

Заметим, что нелинейная теория вязкопластических течений в модели Шведова - Бингама [81, 89] привела к заметному продвижению в моделировании технологий смазки, нефтедобычи и нефтепередачи, прокатки, волочения и формовки металлоизделий. Созданные на такой основе расчетные методики [81, 108] во многом опираются на полученные в рамках математической модели Шведова - Бингама точные решения [23, 82] модельных задач. Последние послужили также развитию теории вариационных неравенств [172] и созданию на такой основе алгоритмов расчетов.

Очевидно, что отказ от предположения о недеформируемости жестких ядер и застойных зон, связанный с учетом упругих свойств материалов, существенно усложняет как построение моделей [24, 109, 167], так и особенности постановок краевых задач [9]. Тем более это относится к случаю учета в рамках модели теплофизических эффектов деформирования.

Постановка краевых задач в такой существенно нелинейной теории, где область деформирования разбивается на части, в которых процессы деформирования подчинены принципиально различным системам уравнений с неизвестными заранее и продвигающимися границами, вызывает трудности, неразрешимые в общем случае. Для этого могут оказаться исключительно

полезными постановки задач в простейших модельных случаях и получаемые на такой основе решения. Точные решения в модели больших упруго-пластических деформаций без учета связанности процессов деформирования и теплопередачи получены сравнительно недавно [11, 12, 18, 20, 46].

Здесь рассмотрим простейшую связанную краевую задачу процессов теплопроводности и деформирования, когда вязкопластическое течение прямолинейно и одномерно. Таким оно оказывается в тяжелом слое упруговязкопластического материала, расположенном на наклонной плоскости и нагреваемом на его свободной поверхности. Задача решается в квазистатической постановке и, следуя подходу [11, 12, 18, 20, 46], обратимые деформации считаем малыми настолько, что при вычислении по ним напряжений можно пренебречь их кубами. Последнее равносильно тому, что не учитывается тепловое расширение в поперечном сечении слоя.

3.1. Обратимое деформирование

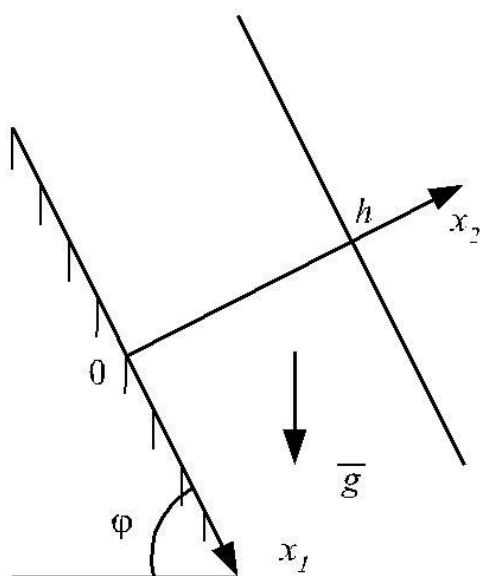


Рис. 3.1

Рассмотрим тяжелый слой высоты h несжимаемого упруговязкопластического материала, помещенный на наклонную плоскость (рис. 3.1). Полагаем, что в промежуток времени $0 < t < t^*$, пока пластическое течение отсутствует, краевые условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} u|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = 0, \quad \sigma_{12}|_{x_2=h} = 0, \\ \theta|_{x_2=h} = G(t), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2}|_{x_2=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $u = u_1(x_2)$ – единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений, $G(t)$ – задаваемая функция.

Ненулевыми компонентами тензора Альманси в рассматриваемом случае будут

$$d_{12} = \frac{1}{2}u_{1,2}, \quad d_{22} = -\frac{1}{2}u_{1,2}^2, \quad u_{1,2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (3.2)$$

Для компонент напряжений, следуя (1.42), с точностью до слагаемых второго порядка малости по $u_{1,2}$, найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= -(p + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)u_{1,2}^2 + (v + 6\mu\beta)\theta - (\kappa_1 + 3\beta v + 18\beta^2)\theta^2 = -s, \\ \sigma_{11} &= -s + \mu u_{1,2}^2, \quad \sigma_{12} = (\mu - l\theta)u_{1,2}, \quad \sigma_{22} = -s + l\theta u_{1,2}^2, \\ l &= v + \kappa_3 + 3\mu\beta. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Пренебрегая далее силами инерции (квазистатическое приближение), интегрируя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho g_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho g_2 = 0, \quad g_1 = g \sin \varphi, \quad g_2 = g \cos \varphi, \quad (3.4)$$

где ρ – плотность материала, g – ускорение свободного падения, φ – угол наклона плоскости, используя условия (3.1), получим распределение напряжений в слое

$$\sigma_{12} = \rho g_1(h - x_2), \quad \sigma_{22} = \rho g_2(h - x_2). \quad (3.5)$$

Уравнение теплопроводности (1.37), учитывая соотношения (3.2) и (3.3), принимает вид

$$\left(1 + \beta_1\theta + \frac{\beta_3}{2} \frac{\rho^2 g_1^2 l (h - x_2)^2}{(\mu - l\theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2}. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) с использованием краевых условий (3.1) и начального условия $\theta|_{t=0} = 0$ решается численно. Для расчетов использовался пакет Mathematica, функция $G(t)$ полагалась линейной: $G(t) = \gamma t$, где γ – задаваемая постоянная.

Согласно соотношению (1.44) условие пластичности в рассматриваемом случае впервые выполнится на плоскости $x_2 = 0$ в форме

$$\sigma_{12}|_{x_2=0} = k(t^*). \quad (3.7)$$

Зависимость предела текучести $k(x_2, t)$ от температуры примем в виде

$$k = k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{pl}} \right)^2 \right), \quad (3.8)$$

где k_0 – предел текучести при комнатной температуре, θ_{pl} – температура плавления. Условия (3.7) и (3.8) с известной температурой $\theta(x_2, t)$ позволяют определить момент начала пластического течения t^* из уравнения

$$\rho g_1 h = k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta(0, t^*)}{\theta_{pl}} \right)^2 \right).$$

Перемещение в слое по известной температуре $\theta(x_2, t)$ согласно (3.3) и (3.5) определяется интегрированием уравнения

$$u_{1,2} = \frac{\rho g_1 (h - x_2)}{\mu - l\theta} \quad (3.9)$$

с использованием граничного условия (3.1). Компоненты напряжений σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} вычисляются согласно формулам (3.3).

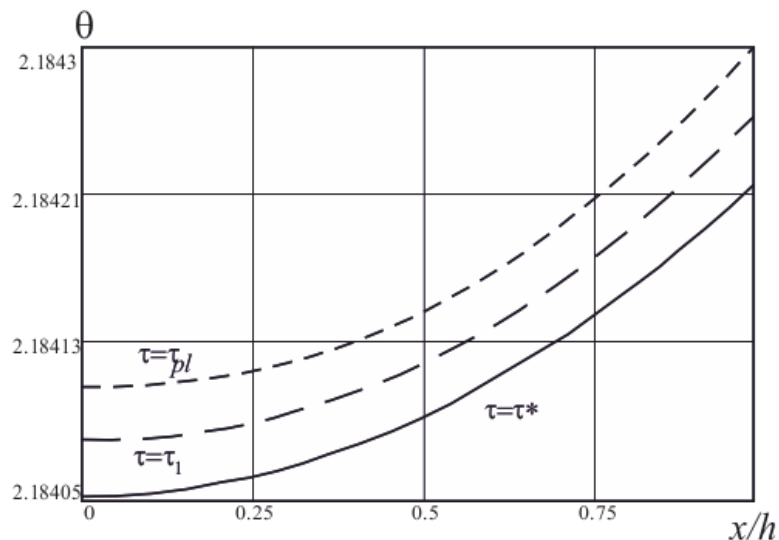


Рис. 3.2. Распределение температуры в разные моменты времени

Распределения температуры θ и перемещений $\frac{u}{h}$ по слою в момент времени $\tau^* = \gamma^*$ приведено на рис. 3.2 (сплошная линия) и 3.3 соответственно. Значения постоянных, соответствующие алюминию, принимались следующие:

$$\frac{k_0}{\mu} = 0.00229796, \quad \frac{\rho g_1 h}{\mu} = 5.4 \cdot 10^{-7}, \quad \frac{l}{\mu} = 0.01, \quad \frac{q}{\gamma h^2} = 2798.52,$$

$$\frac{\mu^2}{\eta \nu_1 \gamma} = 646.065, \quad \beta_1 = 0.0005, \quad \beta_3 = -0.0009.$$

Заметим, что если начальная высота слоя $h > \frac{k_0}{\rho g_1}$ [44], то пластическое течение происходит и без изменения температуры под действием его собственного веса, поэтому в полученном решении выбиралось $h = const < \frac{k_0}{\rho g_1}$ (тепловым расширением пренебрегаем).

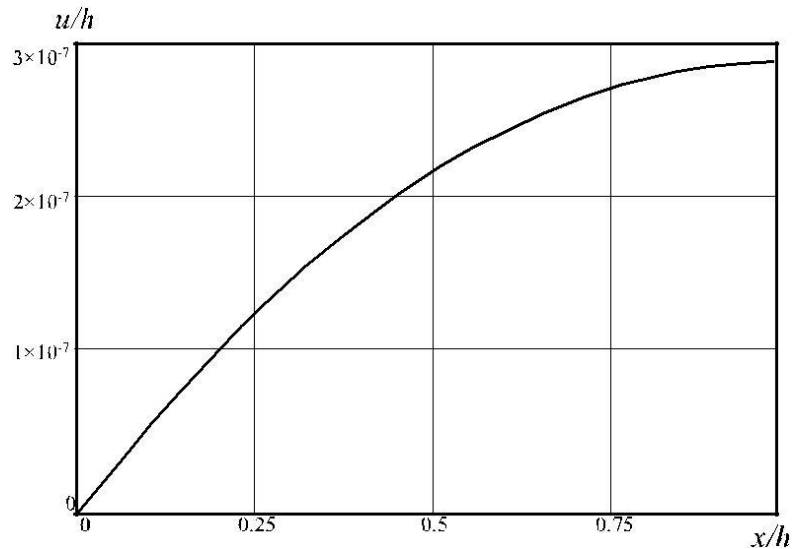


Рис. 3.3. Распределение перемещений в момент начала вязкопластического течения

Согласно формуле (1.9) для компонент деформаций выполняются соотношения

$$d_{12} = m_{12} = \frac{1}{2} u_{1,2}, \quad m_{11} = \frac{1}{2} m_{12}^2, \quad m_{22} = -\frac{3}{2} m_{12}^2. \quad (3.10)$$

3.2. Вязкопластическое течение

Начиная с момента времени $t = t^*$, от границы $x_2 = 0$ развивается область течения, которая занимает слой $0 \leq x_2 \leq r(t)$, в слое $r(t) \leq x_2 \leq h$ материал деформируется обратимо. Таким образом $x_2 = r(t)$ – движущаяся граница области вязкопластического течения. Напряжения в области обратимого деформирования и уравнение теплопроводности имеют вид (3.5) и (3.6).

В области вязкопластического течения $0 \leq x_2 \leq r(t)$, учитывая, что две последние зависимости (3.10) в силу непрерывности компонент обратимых деформаций на упругопластической границе $x_2 = r(t)$ справедливы и в слое $0 \leq x_2 \leq r(t)$, согласно формуле Мурнагана (1.32) при $p_{ij} \neq 0$ получим

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= -(p + 2\mu) - 2(b + \mu)m_{12}^2 + (v + 6\mu\beta)\theta - (\kappa_1 + 3\beta v + 18\beta^2)\theta^2 = \\ &= -s_1(t), \quad \sigma_{11} = -s_1(t) + 4\mu m_{12}^2, \quad \sigma_{12} = 2(\mu - l\theta)m_{12}, \\ \sigma_{22} &= -s_1(t) + 4l\theta m_{12}^2.\end{aligned}\quad (3.11)$$

В соотношениях (3.11) оставлены слагаемые до второго порядка m_{12} . С другой стороны, интегрируя уравнения равновесия и учитывая условие непрерывности компонент напряжений при $x_2 = r(t)$, получим, что и в области вязкопластического течения для компонент напряжений справедливы зависимости (3.5).

Используя пластический потенциал (1.44) и следуя ассоциированному закону пластического течения (1.19), получим, что в области $0 \leq x_2 \leq r(t)$ выполняется соотношение

$$\sigma_{12} = k + \eta \varepsilon_{12}^p. \quad (3.12)$$

Сравнение формул (3.5) и (3.12) позволяет найти скорость пластических деформаций

$$\varepsilon_{12}^p = \frac{1}{\eta} \left(\rho g_1 (h - x_2) - k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{pl}} \right)^2 \right) \right). \quad (3.13)$$

Учитывая равенство нулю ε_{12}^p на границе $x_2 = r(t)$, из (3.13) получим уравнение для определения данной границы:

$$\rho g_1(h - r(t)) = k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta(r(t))}{\theta_{pl}} \right)^2 \right). \quad (3.14)$$

Уравнение теплопроводности (1.40) в области течения с учетом соотношений (3.5), (3.12) и (3.13) принимает форму

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3}{2} \frac{\rho^2 g_1^2 l (h - x_2)^2}{(\mu - l\theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} - \\ & - \frac{\rho g_1 (h - x_2)}{\nu_1 \eta} \left(\rho g_1 (h - x_2) - k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{pl}} \right)^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для температуры θ выполняются граничные условия (3.1). Также прием, что при $x_2 = r(t)$ искомая функция θ и ее производная $\frac{\partial \theta}{\partial x_2}$ непрерывны. Непрерывна и температура в момент начала пластического течения $t = t^*$.

Для решения уравнений (3.6), (3.14) и (3.15) используется конечно-разностный метод. В области обратимого деформирования на пространственно-временную область $r(t) \leq x_2 \leq h$, $t^* \leq t \leq t_{pl}$, где t_{pl} – момент времени, когда температура на верхней границе слоя достигнет температуры плавления, наносится конечно-разностная сетка

$$\omega_{h_1 h_2} = \left\{ x_i = ih_1 + r^{j-1}, \quad i = \overline{0, N_1}; \quad t^j = jh_2 + t^*, \quad j = \overline{1, N_2} \right\} \quad (3.16)$$

с пространственным шагом $h_1 = \frac{(1-r^{j-1})}{N_1}$ и шагом по времени $h_2 = \frac{(t_{pl}-t^*)}{N_2}$.

Здесь величина r^{j-1} означает значение упругопластической границы на временном шаге $j-1$. В области вязкопластического течения берется следующая конечно-разностная сетка:

$$\omega_{h_3 h_2} = \left\{ x_i = ih_3, \quad i = \overline{0, N_3}; \quad t^j = jh_2 + t^*, \quad j = \overline{1, N_2} \right\} \quad (3.17)$$

с пространственным шагом $h_3 = r^{j-1}/N_3$ и тем же временным шагом h_2 .

На сетках (3.16) и (3.17) вводим сеточные функции $\theta 1_i^j$, $\theta 2_i^j$, значения которых известны и обозначают температуру на временном шаге j в областях обратимого и необратимого деформирования соответственно. Для нахождения значений этих функций $\theta 1_i^{j+1}$, $\theta 2_i^{j+1}$ на шаге $j+1$ в уравнениях (3.14) и (3.15) заменим дифференциальные операторы отношением конечных разностей [114] и получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_1 \theta 1_i^j + \frac{\beta_3 \rho^2 g_1^2 l (h - (ih_1 + r^j))^2}{2 (\mu - l \theta 1_i^j)^3} \right) \frac{\theta 1_i^{j+1} - \theta 1_i^j}{h_2} = \\ & = q \frac{\theta 1_{i+1}^{j+1} - 2\theta 1_i^{j+1} + \theta 1_{i-1}^{j+1}}{h_1^2} + O(h_1^2 + h_2), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}; \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_1 \theta 2_i^j + \frac{\beta_3 \rho^2 g_1^2 l (h - ih_3)^2}{2 (\mu - l \theta 2_i^j)^3} \right) \frac{\theta 2_i^{j+1} - \theta 2_i^j}{h_2} = q \frac{\theta 2_{i+1}^{j+1} - 2\theta 2_i^{j+1} + \theta 2_{i-1}^{j+1}}{h_3^2} - \\ & \frac{\rho g_1 (h - ih_3)}{\nu_1 \eta} \left(\rho g_1 (h - ih_3) - k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta 2_i^j}{\theta_{pl}} \right)^2 \right) \right) + O(h_3^2 + h_2), \quad i = \overline{1, N_3 - 1}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

К уравнениям (3.18) и (3.19) добавим краевые и начальные условия в форме

$$\begin{aligned} & \theta 2_1^{j+1} = \theta 2_0^{j+1}, \quad \theta 1_{N_1}^{j+1} = g_0(t^{j+1}), \quad \theta 2_{N_3}^{j+1} = \theta 1_0^{j+1}, \\ & \frac{\theta 1_1^{j+1} - \theta 1_0^{j+1}}{h_1} = \frac{\theta 2_{N_3}^{j+1} - \theta 2_{N_3-1}^{j+1}}{h_3} + O(h_1 + h_3), \quad \theta 1_i^0 = \theta(ih_1, t^*), \\ & \theta 2_i^0 = \theta(ih_3, t^*). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Уравнение для определения упругопластической границы (3.4) тогда примет вид

$$\rho g_1 (h - r^j) = k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta 2_{N_3}^j}{\theta_{pl}} \right)^2 \right), \quad r^0 = 0, \quad j = \overline{1, N_2}. \quad (3.21)$$

Система (3.18)-(3.21) далее решается в пакете Mathematica с использо-

ванием метода прогонки [114]. Таким образом, получаем распределение температуры и значение упругопластической границы на каждом j -м шаге по времени.

Построенная конечно-разностная схема для решения квазилинейных уравнений (3.6) и (3.15) является абсолютно устойчивой [114], и шаг h_2 выбирается только из соображений точности. Кроме того, сходимость данной конечно-разностной схемы проверялась прогонами модели на сужающихся сетках.

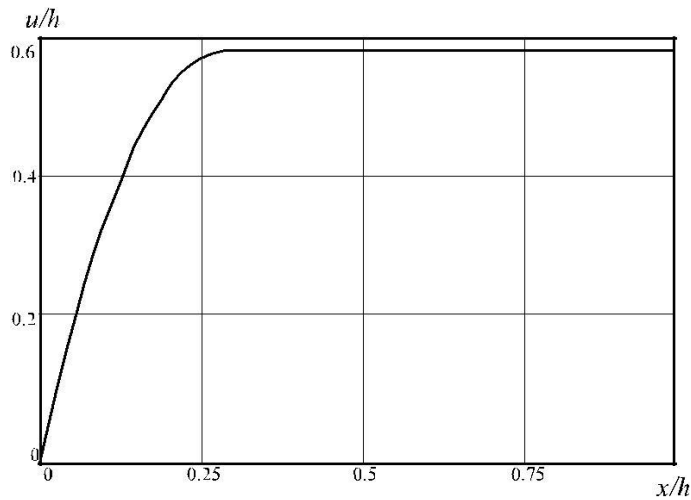


Рис. 3.4. Распределение перемещений в момент времени τ_{pl}

Кинематика среды в нашем случае задается соотношениями

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= m_{11} + p_{11} - \frac{1}{2}m_{12}^2 - 2m_{12}p_{12}, \\
 d_{22} &= m_{22} + p_{22} - \frac{1}{2}m_{12}^2 - 2m_{12}p_{12}, \\
 d_{12} &= m_{12} + p_{12}, \quad \frac{dd_{12}}{dt} = \frac{\partial d_{12}}{\partial t} = \frac{1}{2}v', \\
 r_{21} = -r_{12} &= \frac{1}{2}v', \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}v' = \varepsilon_{12}^e + \varepsilon_{12}^p = \frac{\partial m_{12}}{\partial t} + \frac{\partial p_{12}}{\partial t}, \\
 \varepsilon_{11}^p &= \frac{dp_{11}}{dt} + 2p_{12}(r_{12} + \varepsilon_{12}^p), \quad \varepsilon_{22}^p = \frac{dp_{22}}{dt} + 2p_{12}(r_{12} + \varepsilon_{12}^p), \\
 \varepsilon_{11}^p &= -\varepsilon_{22}^p = -2\varepsilon_{12}^p m_{12}
 \end{aligned}$$

Используя данные зависимости, найдем компоненту пластических де-

формаций p_{12}

$$p_{12} = \int \varepsilon_{12}^p dt,$$

принимая во внимание условие $p_{12}(t^*) = 0$.

Из (3.5) и (3.11) в области течения $0 \leq x_2 \leq r(t)$ найдем

$$m_{12} = \frac{\rho g_1 (h - x_2)}{2(\mu - l\theta)}.$$

Тогда перемещение в области вязкопластического течения с учетом первого условия из (3.1) можно вычислить из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 2(m_{12} + p_{12}).$$

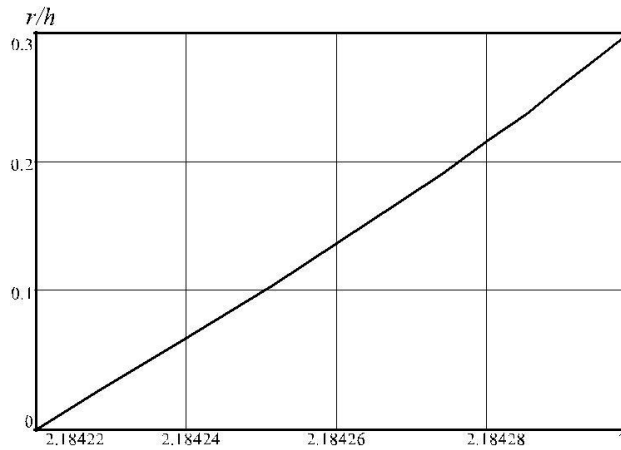


Рис. 3.5. Изменение границы области вязкопластического течения $r(t)/h$ со временем τ

В области обратимого деформирования компонента перемещения определяется из уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 2m_{12}$$

и условия ее непрерывности на упругопластической границе $x_2 = r(t)$.

Распределение температуры по слою в моменты времени $\tau_1 > \tau^*$ (штриховая линия) и $\tau = \tau_{pl}$ (штрих-пунктирная линия) представлены на рис.

3.2. Распределение перемещений в момент времени τ_{pl} приведено на рис.

3.4. Изменение границы области вязкопластического течения $r(t)/h$ со временем τ иллюстрирует рис. 3.5.

Полученное решение модельной задачи о сползании тяжелого слоя с наклонной плоскости за счет только температурного воздействия показывает, что методика расчетов формования изделий в условиях сдвиговых нагрузок на оснастку обязана учитывать связанность процессов деформирования и разогрева за счет деформирования. Особенно это относится к процессам, протекающим при повышенных температурах, когда процесс нагревания предшествует моменту приложения нагрузок. Предварительный натяг оснастки может вызвать неконтролируемый процесс приповерхностного течения формируемого материала, выводящий технологию на недопустимые режимы.

Возможность стендового осуществления модельных постановочных условий задачи предопределяет использование ее решения для обработки специальных экспериментов по определению зависимостей пределов текучести материалов от температуры. Известно, что фундаментальная механика деформирования именно в этом испытывает определенные трудности.

Найденное решение может оказаться полезным при расчетах параметров волнообразования дорожного полотна на склонах в жаркие летние месяцы, когда, как известно, нежелательное явление осуществляется даже без наличия силовых воздействий на полотно.

Глава 4. Неизотермическое деформирование упруговязкопластического плоского горизонтального слоя

В данной главе приводится численное решение задачи о неизотермическом деформировании плоского слоя, расположенного на жесткой горизонтальной поверхности. Деформирование осуществляется за счет движения слоя, к верхней границе которого прилагается сдвиговая нагрузка, а его нижний край трется о жесткую поверхность. Трение материала вызывает его разогрев, что приводит к связанной задаче процессов теплопроводности и деформирования. В рамках теории больших деформаций рассмотрено упругое равновесие материала, зарождение и развитие вязкопластического течения при увеличении сдвиговой нагрузки, развитие течения при постоянном и уменьшающемся напряжении, разгрузка и охлаждение.

4.1. Постановка задачи. Упругое деформирование

Рассмотрим задачу о проскальзывании слоя несжимаемого упруговязкопластического материала высоты h при движении его по горизонтальной

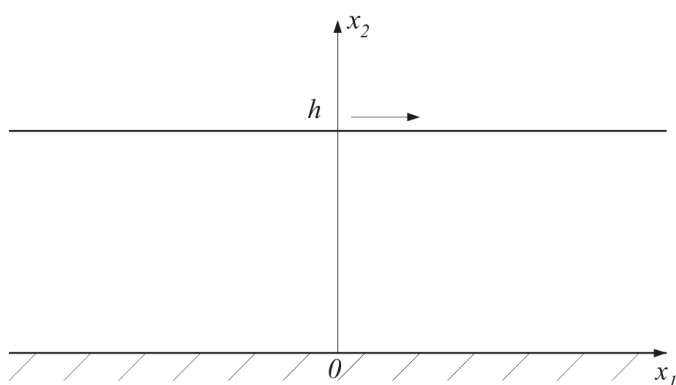


Рис. 4.1

плоскости за счет приложения сдвиговой нагрузки к верхнему краю слоя. Решение будем искать в классе функций $u = u_1(x_2, t)$, $v = v_1(x_2, t)$.

При выбранной кинематике движения отличными от нуля будут компоненты d_{12} и d_{22} тензора деформаций Альманси и компоненты σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} и σ_{33} тензора напряжений.

На верхней границе слоя заданы следующие краевые условия

$$\sigma_{12}|_{x_2=h} = \zeta_1 t, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = a_0, \quad (4.1)$$

где ζ_1 и a_0 – задаваемые постоянные.

Пока верно соотношение

$$\sigma_{12} < f\sigma_{22}, \quad (4.2)$$

где f – задаваемый коэффициент сухого трения, на нижней границе упруго-вязкопластического слоя выполняются условия прилипания

$$u|_{x_2=0} = 0, \quad v|_{x_2=0} = 0. \quad (4.3)$$

При увеличении со временем напряжения σ_{12} согласно первому соотношению (4.1) первоначально происходит только упругое деформирование материала.

Для отличных от нуля компонент тензора деформаций в рассматриваемом случае получим

$$d_{12} = \frac{1}{2}u_{1,2}, \quad d_{22} = -\frac{1}{2}u_{1,2}^2, \quad u_{1,2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (4.4)$$

Воспользовавшись зависимостью (1.42) для компонент напряжений найдем с точностью до слагаемых второго порядка малости по компонентам градиента перемещений

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = -(p + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)u_{1,2}^2 = -s, \quad \sigma_{11} = -s + \mu u_{1,2}^2, \quad \sigma_{12} = \mu u_{1,2}. \quad (4.5)$$

Пренебрегая далее силами инерции (квазистатическое приближение) из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad (4.6)$$

найдем, что компоненты напряжений σ_{12} и σ_{22} не зависят от координаты x_2 , т.е. постоянны по слою упруго-вязкопластического материала. Интегрируя уравнения равновесия (4.6) и учитывая краевые условия (4.1), находим

$$\sigma_{12} = \zeta_1 t, \quad \sigma_{22} = a_0. \quad (4.7)$$

Из третьего соотношения (4.5), выражений (4.7) и условия прилипания (4.3) имеем

$$u_{1,2} = \frac{\zeta_1 t}{\mu}, \quad u = \frac{\zeta_1 t x_2}{\mu}. \quad (4.8)$$

Для компонент напряжений из (4.5), (4.7) и (4.8) получаем

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = a_0, \quad \sigma_{11} = a_0 + \frac{\zeta_1^2 t^2}{\mu}. \quad (4.9)$$

Компоненты упругих деформаций согласно (1.9) найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} 2e_{22} - e_{12}^2 = -u_{1,2}^2, \\ 2e_{11} - e_{12}^2 = 0, \\ 2e_{12} = u_{1,2}. \end{cases}$$

Таким образом, через поле перемещений (4.8) упругие деформации выражаются зависимостями

$$e_{12} = \frac{\zeta_1 t}{2\mu}, \quad e_{11} = \frac{1}{2} e_{12}^2, \quad e_{22} = -\frac{3}{2} e_{12}^2. \quad (4.10)$$

Полученное решение (4.7)-(4.9), (4.10) при возрастающем напряжении σ_{12} остается приемлемым до момента времени $t = t^*$, пока выполняется строгое неравенство (4.2). В момент времени $t = t^*$ на жесткой стенке $x_2 = 0$ может начаться либо вязкопластическое течение, либо проскальзывание материала. Принимая для постоянных материала неравенство $a_0 < k_0/f$, где k_0 – предел текучести при комнатной температуре, будем считать, что проскальзывание материала при $x_2 = 0$ начинается раньше в момент времени $t^* = fa_0/\zeta_1$, чем вязкопластическое течение. Условия прилипания теперь не выполняются и заменяются краевым условием

$$(\sigma_{12} - f\sigma_{22} - \xi v)|_{x_2=0} = 0, \quad (4.11)$$

где ξ – коэффициент вязкого трения.

Вследствие выполнения условия проскальзывания (4.11), начиная с момента времени $t = t^*$, в материале слоя начнется разогрев за счет трения о жесткую поверхность. Принимая краевое условие

$$(\theta - \gamma) \Big|_{x_2=0} = 0, \quad (4.12)$$

где γ – задаваемая постоянная величина, рассчитаем параметры напряженно-деформированного состояния при $t \geq t^*$.

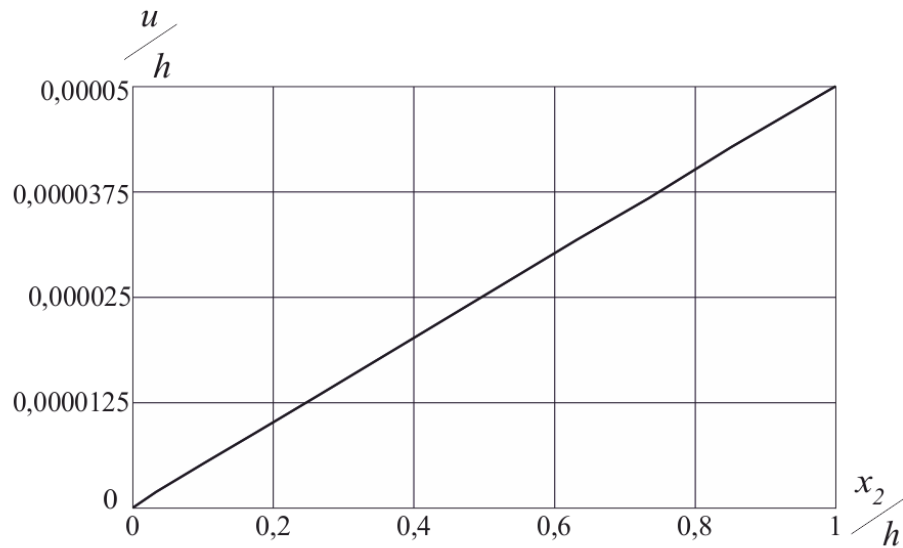


Рис. 4.2. Распределение компоненты перемещений в момент начала проскальзывания $\tau = \tau^*$

Компоненты тензора деформаций вычисляются также по соотношениям (4.4). Компоненты тензора напряжений найдем из формулы (1.42), при этом они становятся зависимыми от температуры:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= -(p + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)u_{1,2}^2 + (\nu + 6\mu\beta)\theta - (\kappa_1 + 3\beta\nu + 18\mu\beta^2)\theta^2 = -s_1, \\ \sigma_{11} &= -s_1 + \mu u_{1,2}^2, \quad \sigma_{12} = (\mu - l\theta)u_{1,2}, \quad \sigma_{22} = -s_1 + l\theta u_{1,2}^2, \\ l &= \nu + \kappa_3 + 3\mu\beta. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из (4.7) и третьего соотношения (4.13) получим градиент перемещений $u_{1,2}$

$$u_{1,2} = \frac{\zeta_1 t}{\mu - l\theta}. \quad (4.14)$$

Уравнение теплопроводности (1.37) с учетом соотношений (4.4) и (4.13) принимает вид

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l \zeta_1^2 t^2}{(\mu - l\theta)^3}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 \zeta_1^2 t}{(\mu - l\theta)^2} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2}. \quad (4.15)$$

Квазилинейное уравнение в частных производных (4.15) решается численно с использованием краевого условия (4.12) и условий

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right|_{x_2=h} = 0, \quad \theta|_{t=t^*} = 0. \quad (4.16)$$

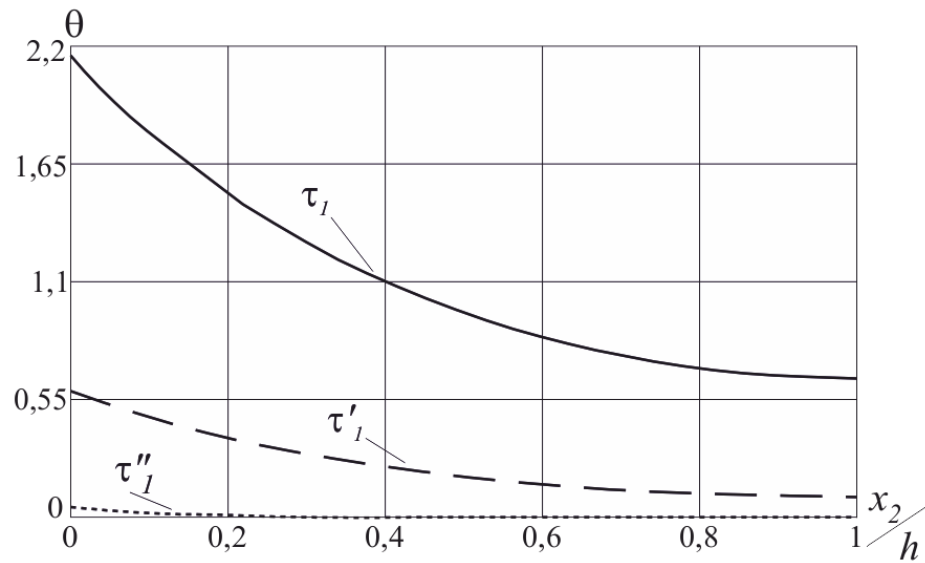


Рис. 4.3. Распределение температуры в разные моменты времени

Из соотношений (4.3), (4.7) и (4.11) можно найти скорость движения точек материала слоя на границе $x_2 = 0$

$$v|_{x_2=0} = \frac{\zeta_1 t - fa_0}{\xi}. \quad (4.17)$$

Интегрируя уравнение (4.17) по времени с учетом начального условия $u|_{x_2=0, t=t^*} = 0$ получим граничное условие для нахождения компоненты перемещений

$$u|_{x_2=0} = \frac{\zeta_1}{2\xi} (t^2 - t^{*2}) - \frac{fa_0}{\xi} (t - t^*). \quad (4.18)$$

Из условия (4.12) и соотношения (4.18) установим граничное условие для температуры в виде

$$\theta|_{x_2=0} = \frac{\gamma \zeta_1}{2\xi} (t^2 - t^{*2}) - \frac{\gamma a_0}{\xi} (t - t^*). \quad (4.19)$$

Распределение температуры $\theta(x_2, t)$ было получено из уравнения теплопроводности (4.15) и условий (4.12), (4.16) и (4.19) с использованием встроенных функций пакета Mathematica.

Перемещение в слое по известной температуре $\theta(x_2, t)$ находится интегрированием уравнения (4.14) с учетом соотношения (4.18).

Компоненты упругих деформаций согласно (1.9) найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} 2m_{22} - m_{12}^2 = -u_{1,2}^2, \\ 2m_{11} - m_{12}^2 = 0, \\ 2m_{12} = u_{1,2}. \end{cases}$$

Таким образом, через найденное поле градиента перемещений (4.14) упругие деформации выражаются зависимостями

$$m_{12} = \frac{\zeta_1 t}{2(\mu - l\theta)}, \quad m_{11} = \frac{1}{2} m_{12}^2, \quad m_{22} = -\frac{3}{2} m_{12}^2. \quad (4.20)$$

Полученное решение справедливо до момента времени $t = t_1$, в который согласно соотношению (1.19) на нижней границе слоя впервые выполнится условие пластичности в форме

$$\sigma_{12}|_{x_2=0} = k(t_1). \quad (4.21)$$

Зависимость предела текучести от температуры примем в виде

$$k = k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{pl}} \right)^2 \right), \quad (4.22)$$

где k_0 – предел текучести при комнатной температуре, θ_{pl} – температура плавления. Зависимости (4.21) и (4.22) с известной температурой $\theta(x_2, t)$ позволяют определить момент начала пластического течения t_1 из уравнения

$$\zeta_1 t_1 = k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta(0, t_1)}{\theta_{pl}} \right)^2 \right). \quad (4.23)$$

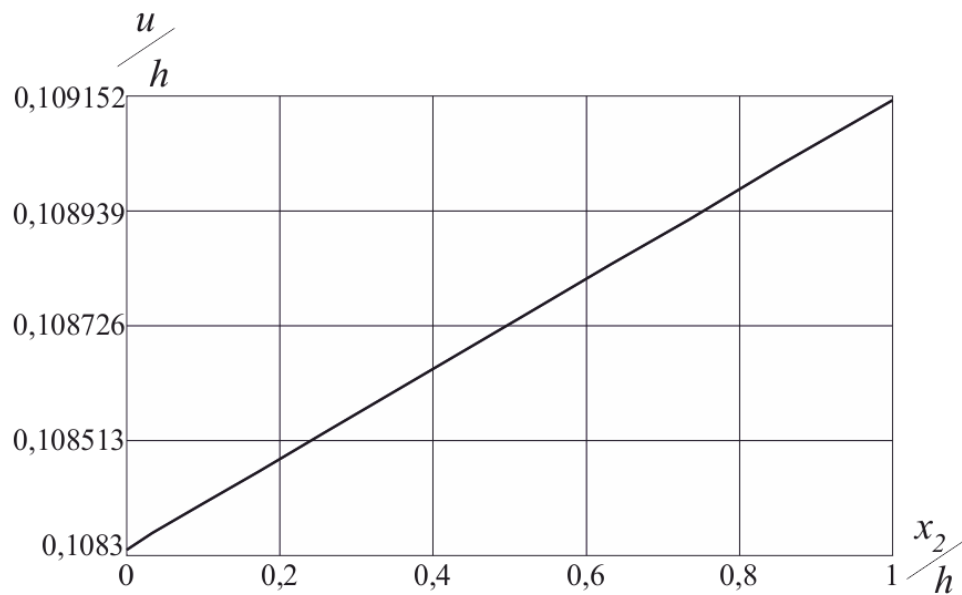
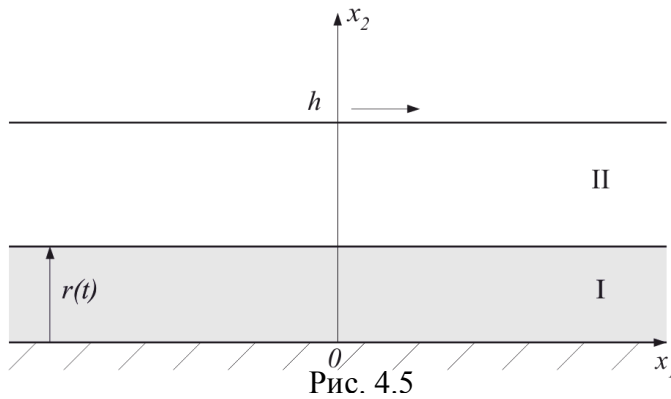


Рис. 4.4. Распределение компоненты перемещений в момент начала вязкопластического течения $\tau = \tau_1$

На рисунке 4.2 показано распределение компоненты перемещений в момент начала проскальзывания $\tau^* = \zeta_1 t^* / fa_0$, а на рисунке 4.4 – в момент начала пластического течения $\tau_1 = \zeta_1 t_1 / fa_0$. Распределения температуры в зависимости от координаты x_2/h в разные моменты времени показаны на рисунке 4.3: сплошной линией – в момент времени $\tau = \tau_1$, штриховой линией – в момент времени $\tau = \tau'_1 < \tau_1$ и пунктирной линией – в момент времени $\tau = \tau''_1 < \tau'_1$. Для расчетов использовались следующие безразмерные значения

постоянных $\beta_1 = 0,5, \quad \beta_3 = -0,5, \quad k_0/\mu = 2,29796 \cdot 10^{-3}, \quad fa_0/\mu = 5 \cdot 10^{-5},$
 $\theta_{pl} = 2,68261, \quad l/\mu = 0,01, \quad h^2 \zeta_1 / \mu q = 7,733 \cdot 10^{-4}, \quad h \xi \zeta_1 / \mu^2 = 2,67984 \cdot 10^{-6},$
 $\eta \zeta_1 / \mu^2 = 3,34979 \cdot 10^{-7}, \quad \gamma h = 20, \quad v_1 / \mu = 0.02, \quad \frac{\zeta_2}{\zeta_1} = 0,5.$

4.2. Развивающееся вязкопластическое течение



В момент времени $t = t_1$, который находится из уравнения (4.23), от границы $x_2 = 0$ начинает развиваться область течения $0 \leq x_2 \leq r(t)$ (область I на рисунке 4.5). Движущаяся граница $x_2 = r(t)$ отделяет об-

ласть вязкопластического течения от области $r(t) < x_2 \leq h$, где материал слоя по-прежнему деформируется обратимо (область II на рисунке 4.5). Пренебрегая, как и ранее, силами инерции, интегрированием уравнений равновесия (4.6) в области обратимого деформирования найдем, что напряжения вычисляются по формулам (4.7). Уравнение теплопроводности в области обратимого деформирования имеет вид (4.15).

В области вязкопластического течения напряжения определяются из соотношения (1.43). Оставляя слагаемые второго порядка малости по компонентам m_{12} и учитывая, что две последние зависимости (4.20) в силу непрерывности компонент обратимых деформаций на упругопластической границе $x_2 = r(t)$ справедливы и в слое $0 \leq x_2 \leq r(t)$, получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} &= -(p + 2\mu) - 2(b + \mu)m_{12}^2 + (v + 6\mu\beta)\theta - (\kappa_1 + 3\beta v + 18\mu\beta^2)\theta^2 = \\
&= -s_2(t), \quad \sigma_{11} = -s_2(t) + 4\mu m_{12}^2, \quad \sigma_{12} = (\mu - l\theta)m_{12}, \\
\sigma_{22} &= -s_2(t) + 4l\theta m_{12}^2.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

С другой стороны, интегрируя уравнения равновесия и учитывая условие непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе $x_2 = r(t)$, получим, что и в области вязкопластического течения для напряжений справедливы зависимости (4.7).

Условие вязкопластического течения (1.44) в нашем случае ($\sigma_{12} > 0$, $\varepsilon_{12}^p > 0$) переписывается в форме

$$F(\sigma_{12}, \varepsilon_{12}^p) = \sigma_{12}^2 - (k + \eta\varepsilon_{12}^p)^2 = 0. \tag{4.25}$$

Следуя ассоциированному закону пластического течения (1.19), из (4.25) найдем

$$\sigma_{12} = k + \eta\varepsilon_{12}^p. \tag{4.26}$$

Сравнение зависимостей (4.7) и (4.26) позволяет вычислить компоненты ε_{12}^p тензора скоростей пластических деформаций

$$\varepsilon_{12}^p = \frac{1}{\eta} \left(\zeta_1 t - k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{pl}} \right)^2 \right) \right). \tag{4.27}$$

Учитывая равенство нулю компоненты ε_{12}^p на упругопластической границе $x_2 = r(t)$, из (4.27) получим уравнение для определения ее значения в каждый момент времени t

$$\zeta_1 t = k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta(r(t), t)}{\theta_{pl}} \right)^2 \right). \tag{4.28}$$

Уравнение теплопроводности (1.40) в области течения с учетом соотношений (4.7), (4.26) и (4.27) принимает форму

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l \zeta_1^2 t^2}{(\mu - l\theta)^3}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 \zeta_1^2 t}{(\mu - l\theta)^2} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} - \frac{\zeta_1 t}{\nu_1 \eta} \left(\zeta_1 t - k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{pl}} \right)^2 \right) \right). \quad (4.29)$$

Заметим, что краевое условие (4.12) справедливо до момента времени $t = t_{pl}$, в который температура на границе слоя $x_2 = 0$ станет равной температуре плавления. Этот момент можно найти из условия (4.19)

$$t_{pl} = \frac{fa_0}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_1} \left(f^2 a_0^2 + \zeta_1 t^* (\zeta_1 t^* - 2fa_0) + \frac{2\xi \zeta_1 \theta_{pl}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Начиная с момента времени $t = t_{pl}$, условие (4.12) необходимо заменить условием

$$\theta|_{x_2=0} = \theta_{pl}. \quad (4.30)$$

Полагая, что развитие течения с ростом напряжения σ_{12} происходит до некоторого момента времени $t = t_2 < t_{pl}$, для решения уравнений теплопроводности (4.15) и (4.29) воспользуемся краевыми условиями (4.12) и (4.16), условиями непрерывности искомой функции θ и ее производной $\frac{\partial \theta}{\partial x_2}$ на упругопластической границе $x_2 = r(t)$ и условием непрерывности θ в момент времени $t = t_1$.

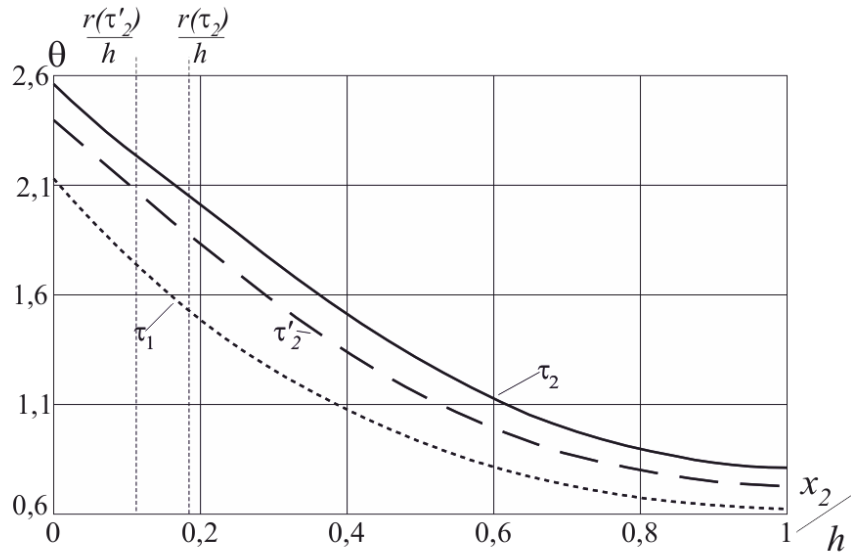


Рис. 4.6. Распределение температуры по слою в разные моменты времени

Для решения уравнений (4.15), (4.28) и (4.29) использовалась неявная конечно-разностная схема первого порядка по времени и второго – по пространству [114].

В области обратимого деформирования на пространственно-временную область $r(t) \leq x_2 \leq h$, $t_1 \leq t \leq t_2$ наносится конечно-разностная сетка

$$\omega_{h_1 h_2} = \{x_i = ih_1 + r^{j-1}, \quad i = \overline{0, N_1}; \quad t^j = jh_2 + t_1, \quad j = \overline{1, N_2}\} \quad (4.31)$$

с пространственным шагом $h_1 = (1-r^{j-1})/N_1$ и шагом по времени $h_2 = (t_2-t_1)/N_2$.

Здесь величина r^{j-1} означает значение упругопластической границы на временном шаге $j-1$. В области вязкопластического течения $0 \leq x_2 \leq r(t)$ берется следующая конечно-разностная сетка:

$$\omega_{h_3 h_2} = \{x_i = ih_3, \quad i = \overline{0, N_3}; \quad t^j = jh_2 + t_1, \quad j = \overline{1, N_2}\} \quad (4.32)$$

с пространственным шагом $h_3 = r^{j-1}/N_3$ и тем же временным шагом h_2 .

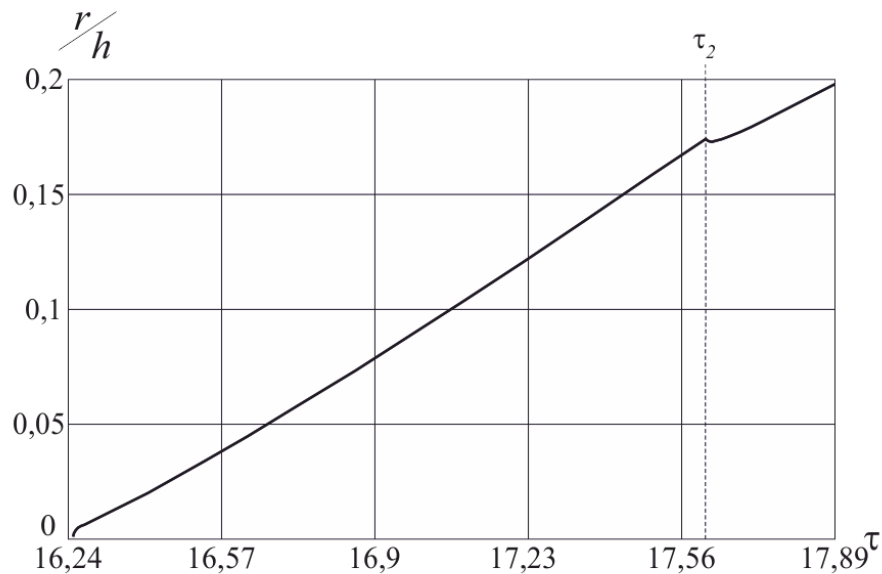


Рис. 4.7. Изменение границы области вязкопластического течения со временем от $\tau = \tau_1$ до $\tau = \tau_4$

На сетках (4.31) и (4.32) вводим сеточные функции $\theta 1_i^j$, $\theta 2_i^j$, значения которых известны и обозначают температуру на временном шаге j в облас-

тях обратимого и необратимого деформирования соответственно. Для нахождения значений этих функций $\theta_{1_i}^{j+1}$, $\theta_{2_i}^{j+1}$ на шаге $j+1$ в уравнениях (4.15) и (4.29) заменим дифференциальные операторы отношением конечных разностей [114] и получим следующие соотношения:

$$\left(1 + \beta_1 \theta_{1_i}^j + \frac{\beta_3 l \zeta_1^2 (jh_2 + t_1)^2}{(\mu - l\theta_{1_i}^j)^3}\right) \frac{\theta_{1_i}^{j+1} - \theta_{1_i}^j}{h_2} = q \frac{\theta_{1_{i+1}}^{j+1} - 2\theta_{1_i}^{j+1} + \theta_{1_{i-1}}^{j+1}}{h_1^2} - \frac{\beta_3 \zeta_1^2 (jh_2 + t_1)}{(\mu - l\theta_{1_i}^j)^2} + O(h_1^2 + h_2), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}; \quad (4.33)$$

$$\left(1 + \beta_1 \theta_{2_i}^j + \frac{\beta_3 l \zeta_1^2 (jh_2 + t_1)^2}{(\mu - l\theta_{2_i}^j)^3}\right) \frac{\theta_{2_i}^{j+1} - \theta_{2_i}^j}{h_2} = q \frac{\theta_{2_{i+1}}^{j+1} - 2\theta_{2_i}^{j+1} + \theta_{2_{i-1}}^{j+1}}{h_3^2} - \frac{\beta_3 \zeta_1^2 (jh_2 + t_1)}{(\mu - l\theta_{2_i}^j)^2} - \frac{\zeta_1 (jh_2 + t_1)}{v_1 \eta} \left(\zeta_1 (jh_2 + t_1) - k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta_{2_i}^j}{\theta_{pl}}\right)^2\right) \right) + O(h_3^2 + h_2), \quad i = \overline{1, N_3 - 1}. \quad (4.34)$$

Уравнение (4.28) при этом примет вид

$$\zeta_1 ((j+1)h_2 + t_1) = k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta_{2_{N_3}}^{j+1}}{\theta_{pl}}\right)^2\right), \quad r^0 = 0, \quad j = \overline{1, N_2}. \quad (4.35)$$

В данное уравнение значение упругопластической границы r^{j+1} явно не входит, но из него можно найти значение температуры в точке, в которой в момент времени t^{j+1} находится упругопластическая граница

$$\theta_{2_{N_3}}^{j+1} = \theta_{pl} \sqrt{1 - \frac{\zeta_1 ((j+1)h_2 + t_1)}{k_0}} \quad (4.36)$$

К уравнениям (4.33), (4.34) и (4.36) добавим краевые и начальные условия в форме

$$\begin{aligned} \theta_{1_{N_1}}^{j+1} &= \theta_{1_{N_1-1}}^{j+1}, \quad \theta_{2_{N_3}}^{j+1} = \theta_{1_0}^{j+1}, \\ \theta_{2_0}^{j+1} &= \frac{\gamma}{\xi} ((j+1)h_2 + t_1 - t^*) \left(\frac{\zeta_1}{2} ((j+1)h_2 + t_1 + t^*) - fa_0 \right), \\ \frac{\theta_{1_1}^{j+1} - \theta_{1_0}^{j+1}}{h_1} &= \frac{\theta_{2_{N_3}}^{j+1} - \theta_{2_{N_3-1}}^{j+1}}{h_3} + O(h_1 + h_3), \\ \theta_{1_i}^0 &= \theta(ih_1, t_1), \quad \theta_{2_i}^0 = \theta(ih_3, t_1). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Выражение для определения значения упругопластической границы r^{j+1} получим из (4.36) и четвертого условия (4.37) в виде

$$r^{j+1} = \frac{N_3(\theta 2_{N_3-1}^{j+1} - \theta 2_{N_3}^{j+1})}{N_1(\theta 1_0^{j+1} - \theta 1_1^{j+1}) + N_3(\theta 2_{N_3-1}^{j+1} - \theta 2_{N_3}^{j+1})} + O(h_1 + h_3). \quad (4.38)$$

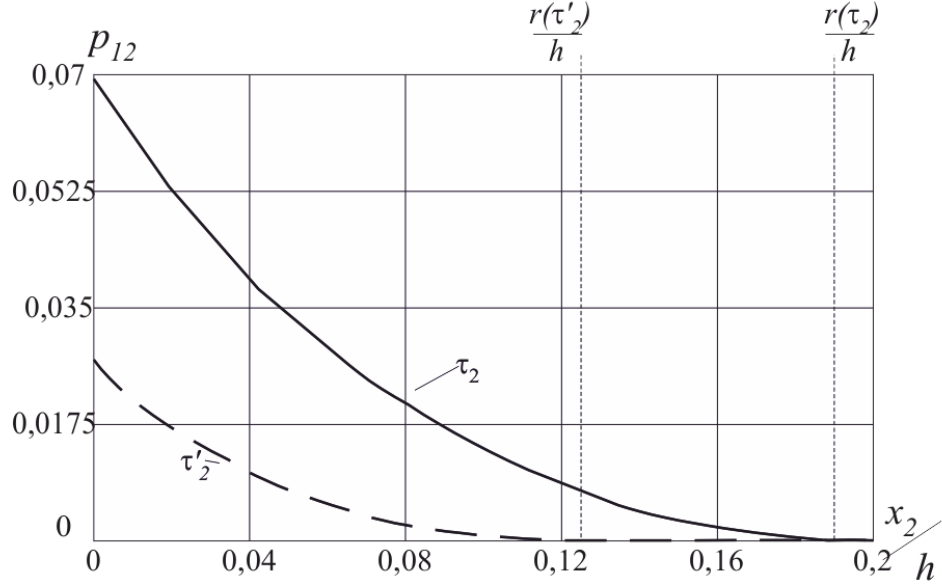


Рис. 4.8. Распределение пластических деформаций p_{12} в моменты времени $\tau = \tau'_2$ и $\tau = \tau_2$

Система (4.33)-(4.38) далее решается в пакете Mathematica с использованием метода прогонки [114]. Таким образом, получаем распределение температуры $\theta 1_i^j$ и $\theta 2_i^j$, и значение упругопластической границы r^j на каждом j -м шаге по времени в интервале от $t = t_1$ до $t = t_2$.

Кинематика среды в нашем случае задается соотношениями

$$\begin{aligned} d_{11} &= m_{11} + p_{11} - \frac{1}{2}m_{12}^2 - 2m_{12}p_{12}, & d_{22} &= m_{22} + p_{22} - \frac{1}{2}m_{12}^2 - 2m_{12}p_{12}, \\ d_{12} &= m_{12} + p_{12}, & \frac{dd_{12}}{dt} &= \frac{\partial d_{12}}{\partial t} = \frac{1}{2}v', \\ r_{21} &= -r_{12} = \frac{1}{2}v', & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}v' = \varepsilon_{12}^e + \varepsilon_{12}^p = \frac{\partial m_{12}}{\partial t} + \frac{\partial p_{12}}{\partial t}, \\ \varepsilon_{11}^p &= \frac{dp_{11}}{dt} + 2p_{12}(r_{12} + \varepsilon_{12}^p), & \varepsilon_{22}^p &= \frac{dp_{22}}{dt} + 2p_{12}(r_{12} + \varepsilon_{12}^p), \\ \varepsilon_{11}^p &= -\varepsilon_{22}^p = -2\varepsilon_{12}^p m_{12}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Используя зависимости (4.39) и начальное условие $p_{12}(t_1) = 0$, найдем компоненту p_{12} тензора пластических деформаций

$$p_{12} = \int_{t_1}^t \varepsilon_{12}^p(z) dz \quad (4.40)$$

с применением условия $p_{12}(t_1) = 0$.

Из равенств (4.7) и (4.24) установим, что в области течения $0 \leq x_2 \leq r(t)$ выполняется первое соотношение из (4.20).

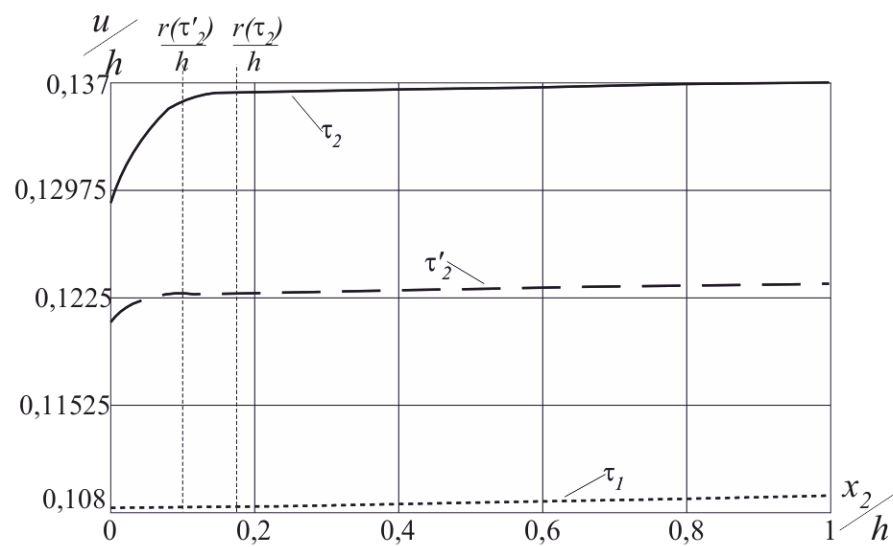


Рис. 4.9. Распределение перемещений в моменты времени $\tau = \tau_1$, $\tau = \tau'_2$ и $\tau = \tau_2$

Тогда компоненту вектора перемещений в области вязкопластического течения с учетом граничного условия (4.18) можно вычислить из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 2(m_{12} + p_{12}). \quad (4.41)$$

В области обратимого деформирования перемещение определяется из уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 2m_{12}, \quad (4.42)$$

и условия его непрерывности на упругопластической границе $x_2 = r(t)$.

На рисунке 4.6 показано распределение температуры по слою в разные моменты времени: пунктирной линией – в момент начала пластического течения $\tau = \tau_1$, штриховой - в момент времени $\tau = \tau'_2$ ($\tau_1 < \tau'_2 < \tau_2$) и сплошной – в момент времени $\tau = \tau_2$. На рисунке 4.7 показано изменение границы области вязкопластического течения $r(t)/h$ со временем от $\tau = \tau_1$ до $\tau = \tau_2$.

Рисунок 4.8 иллюстрирует распределение пластических деформаций p_{12} в моменты времени $\tau = \tau'_2$ (штриховая линия) и $\tau = \tau_2$ (сплошная линия). На рисунке 4.9 показано распределение перемещений в моменты времени $\tau = \tau_1$ (пунктирная линия), $\tau = \tau'_2$ (штриховая линия) и $\tau = \tau_2$ (сплошная линия).

4.3. Течение при постоянном напряжении

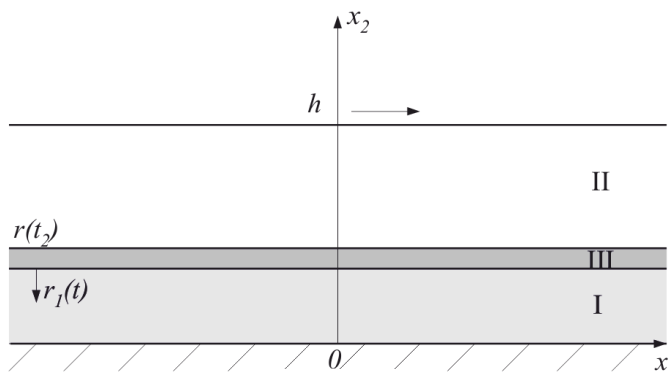


Рис. 4.10

Пусть, начиная с момента времени $t = t_2$, напряжение σ_{12} далее не изменяется, т.е.

$$\sigma_{12}|_{x_2=h} = \zeta_1 t_2.$$

Изменение в режиме нагружения приводит к возникновению

новой упругопластической границы $x_2 = r_1(t)$, которая с момента времени $t = t_2$ и до некоторого момента $t = t_3$ движется вниз от стационарной границы $x_2 = r(t_2)$ (рисунок 4.10), т.е. происходит разгрузка среды.

Начиная с момента времени $t = t_2$, деформируемая область $0 \leq x_2 \leq h$ разбивается на три части: вязкопластическое течение продолжается в области $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ (область I на рисунке 4.10), в области $r_1(t) \leq x_2 \leq r(t_2)$ компонента p_{12} тензора пластических деформаций перестает изменяться (область III

на рисунке 4.10), а в области $r(t_2) < x_2 \leq h$ по-прежнему происходит обратимое деформирование (область II на рисунке 4.10).

Интегрируя уравнения равновесия (4.6) в области обратимого деформирования $r(t_2) < x_2 \leq h$, получим

$$\sigma_{12} = \zeta_1 t_2, \quad \sigma_{22} = a_0. \quad (4.43)$$

Уравнение теплопроводности в этой области примет вид

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l \zeta_1^2 t_2^2}{(\mu - l\theta)^3}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} \quad (4.44)$$

В области вязкопластического течения $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ и в области с неизменяющейся компонентой p_{12} $r_1(t) \leq x_2 \leq r(t_2)$ напряжения определяются из зависимости (1.43) с учетом двух последних зависимостей (4.20) и имеют вид (4.24). Если же проинтегрировать уравнения равновесия, приняв во внимание условие непрерывности компонент напряжений на границах $x_2 = r(t_2)$ и $x_2 = r_1(t)$, получим, что в этих областях для напряжений справедливы соотношения (4.43).

Из зависимостей (4.26) и (4.43) можно найти скорость пластических деформаций в пластической области $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$

$$\varepsilon_{12}^p = \frac{1}{\eta} \left(\zeta_1 t_2 - k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{pl}} \right)^2 \right) \right). \quad (4.45)$$

Так как ε_{12}^p равняется нулю на упругопластической границе $x_2 = r_1(t)$, из (4.45) получим уравнение для нахождения ее значений в каждый момент времени $t \geq t_2$

$$\zeta_1 t_2 = k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta(r_1(t), t)}{\theta_{pl}} \right)^2 \right). \quad (4.46)$$

Уравнение теплопроводности (1.39) в области с неизменяющейся компонентой p_{12} $r_1(t) \leq x_2 \leq r(t_2)$ имеет вид (4.44). В области вязкопластического течения $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ уравнение (1.40) принимает форму

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l \zeta_1^2 t_2^2}{(\mu - l\theta)^3}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} - \frac{\zeta_1 t}{v_1 \eta} \left(\zeta_1 t_2 - k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{pl}}\right)^2\right) \right). \quad (4.47)$$

Как и ранее, для температуры θ выполняются соотношение (4.12) и первое условие (4.16). Также функция θ и ее производная $\frac{\partial \theta}{\partial x_2}$ непрерывны на границах $x_2 = r_1(t)$ и $x_2 = r(t_2)$. Непрерывна температура и в момент времени $t = t_2$.

Из (4.11), (4.12), (4.21) и (4.43) найдем перемещение на границе $x_2 = 0$

$$u|_{x_2=0} = \frac{\zeta_1}{2\xi} (2t_2 t - t_2^2 - t^{*2}) - \frac{f a_0}{\xi} (t - t^*). \quad (4.48)$$

Для решения уравнений (4.44), (4.46) и (4.47) также использовалась неявная конечно-разностная схема.

В области обратимого деформирования на пространственно-временную область $r(t_2) \leq x_2 \leq h$, $t_2 \leq t \leq t'$, наносится конечно-разностная сетка

$$\omega_{h_1 h_2} = \left\{ x_i = i h_1 + r(t_2), \quad i = \overline{0, N_1}; \quad t^j = j h_2 + t_2, \quad j = \overline{1, N_2} \right\} \quad (4.49)$$

с пространственным шагом $h_1 = \frac{(1-r(t_2))}{N_1}$ и шагом по времени $h_2 = \frac{(t'-t_2)}{N_2}$.

Для области вязкопластического течения $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ имеем следующую сетку

$$\omega_{h_3 h_2} = \left\{ x_i = i h_3, \quad i = \overline{0, N_3}; \quad t^j = j h_2 + t_2, \quad j = \overline{1, N_2} \right\} \quad (4.50)$$

с пространственным шагом $h_3 = \frac{r_1^j}{N_3}$.

В области $r_1(t) \leq x_2 \leq r(t_2)$, в которой не изменяется компонента p_{12} , берется следующая конечно-разностная сетка:

$$\omega_{h_4 h_2} = \left\{ x_i = i h_4 + r_1^j, \quad i = \overline{0, N_4}; \quad t^j = j h_2 + t_2, \quad j = \overline{1, N_2} \right\} \quad (4.51)$$

с пространственным шагом $h_4 = (r_1^j - r(t_2)) / N_4$.

На сетках (4.49), (4.50) и (4.51) вводим сеточные функции $\theta 1_i^j$, $\theta 2_i^j$ и $\theta 3_i^j$, значения которых известны и обозначают температуру на временном шаге j в области обратимого деформирования, области пластического течения и области с не изменяющейся компонентой p_{12} соответственно. Для нахождения значений этих функций $\theta 1_i^{j+1}$, $\theta 2_i^{j+1}$, $\theta 3_i^{j+1}$ на шаге $j+1$ в уравнениях (4.44) и (4.47) заменим дифференциальные операторы отношением конечных разностей и получим следующие соотношения:

$$\left(1 + \beta_1 \theta 1_i^j + \frac{\beta_3 l \zeta_1^2 t_2^2}{(\mu - l \theta 1_i^j)^3}\right) \frac{\theta 1_i^{j+1} - \theta 1_i^j}{h_2} = q \frac{\theta 1_{i+1}^{j+1} - 2\theta 1_i^{j+1} + \theta 1_{i-1}^{j+1}}{h_1^2} + O(h_1^2 + h_2), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}; \quad (4.52)$$

$$\left(1 + \beta_1 \theta 2_i^j + \frac{\beta_3 l \zeta_1^2 t_2^2}{(\mu - l \theta 2_i^j)^3}\right) \frac{\theta 2_i^{j+1} - \theta 2_i^j}{h_2} = q \frac{\theta 2_{i+1}^{j+1} - 2\theta 2_i^{j+1} + \theta 2_{i-1}^{j+1}}{h_3^2} - \frac{\zeta_1 t_2}{v_1 \eta} \left(\zeta_1 t_2 - k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta 2_i^j}{\theta_{pl}} \right)^2 \right) \right) + O(h_3^2 + h_2), \quad i = \overline{1, N_3 - 1}. \quad (4.53)$$

$$\left(1 + \beta_1 \theta 3_i^j + \frac{\beta_3 l \zeta_1^2 t_2^2}{(\mu - l \theta 3_i^j)^3}\right) \frac{\theta 3_i^{j+1} - \theta 3_i^j}{h_2} = q \frac{\theta 3_{i+1}^{j+1} - 2\theta 3_i^{j+1} + \theta 3_{i-1}^{j+1}}{h_4^2} + O(h_4^2 + h_2), \quad i = \overline{1, N_4 - 1}; \quad (4.54)$$

Уравнение (4.46) примет форму

$$\zeta_1 t_2 = k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta 2_{N_3}^{j+1}}{\theta_{pl}} \right)^2 \right), \quad r_1^0 = r(t_2), \quad j = \overline{1, N_2}. \quad (4.55)$$

Из этого соотношения найдем значение температуры в точке, в которой в момент времени t^{j+1} находится упругопластическая граница r_1^{j+1}

$$\theta 2_{N_3}^{j+1} = \theta_{pl} \sqrt{1 - \frac{\zeta_1 t_2}{k_0}} \quad (4.56)$$

К уравнениям (4.52)-(4.54) добавим краевые и начальные условия в форме

$$\begin{aligned} \theta_{N_1}^{j+1} &= \theta_{N_1-1}^{j+1}, \quad \theta_{N_3}^{j+1} = \theta_{N_3-1}^{j+1}, \quad \theta_{N_4}^{j+1} = \theta_0^{j+1}, \\ \theta_0^{j+1} &= \frac{\gamma \zeta_1}{2\xi} (2t_2((j+1)h_2 + t_2) - t_2^2 - t^{*2}) - \frac{\gamma a_0}{\xi} (((j+1)h_2 + t_2) - t^*), \\ \frac{\theta_{N_1}^{j+1} - \theta_0^{j+1}}{h_1} &= \frac{\theta_{N_4}^{j+1} - \theta_{N_4-1}^{j+1}}{h_4} + O(h_1 + h_4), \\ \frac{\theta_{N_3}^{j+1} - \theta_0^{j+1}}{h_4} &= \frac{\theta_{N_3}^{j+1} - \theta_{N_3-1}^{j+1}}{h_3} + O(h_3 + h_4), \\ \theta_i^0 &= \theta(ih_1 + r(t_2), t_2), \quad \theta_i^0 = \theta(ih_3, t_2), \quad \theta_i^0 = \theta(ih_4 + r(t_2), t_2). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Значение упругопластической границы r_1^{j+1} получим из (4.56) и шестого условия из (4.57) в виде

$$r_1^{j+1} = \frac{N_3(\theta_{N_3-1}^{j+1} - \theta_{N_3}^{j+1})}{N_4(\theta_{N_3-1}^{j+1} - \theta_{N_4}^{j+1}) + N_3(\theta_{N_3-1}^{j+1} - \theta_{N_3}^{j+1})} + O(h_3 + h_4). \quad (4.58)$$

После решения системы (4.52)-(4.58) в пакете Mathematica, получаем распределение температуры θ_1^j , θ_2^j и θ_3^j , и значение упругопластической границы r_1^j на каждом j -м шаге по времени.

Компонента пластических деформаций p_{12} в области $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$, как и ранее, вычисляется по соотношению (4.40) с учетом условия ее непрерывности в момент времени $t = t_2$. Компонента пластических деформаций p_{12} в какой-либо точке области $r_1(t) \leq x_2 \leq r(t_2)$ равна значению пластических деформаций, вычисляемых по уравнению (4.40) до того момента времени, когда этой точки достигнет граница $x_2 = r_1(t)$, далее компонента p_{12} в этой точке не изменяется.

Из (4.24) и (4.43) для областей $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ и $r_1(t) \leq x_2 \leq r(t_2)$ получим компоненту обратимых деформаций m_{12}

$$m_{12} = \frac{\zeta_1 t_2}{2(\mu - l\theta)}.$$

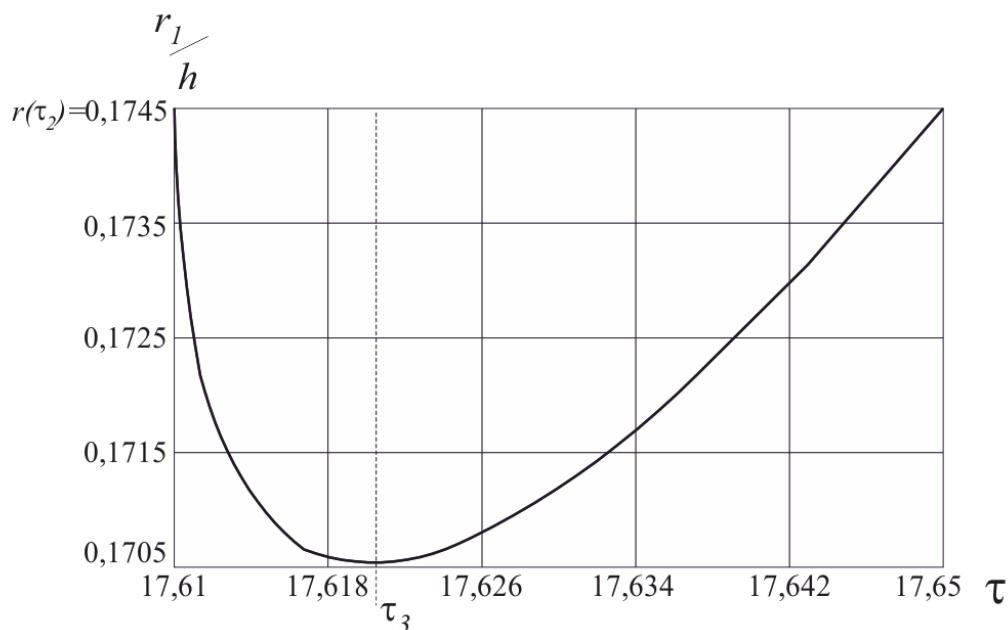


Рис. 4.11. Граница $r_1(\tau)/h$ во временном промежутке от $\tau = \tau_2$ до $\tau = \tau'$

Учитывая условие (4.48), перемещение в области вязкопластического течения можно вычислить из уравнения (4.41). В области с неизменяющейся компонентой p_{12} перемещение определится из того же уравнения (4.41), а в области обратимого деформирования – из уравнения (4.42). При нахождении перемещения учитывается, что оно непрерывно на границах $x_2 = r_1(t)$ и

$$x_2 = r(t_2).$$

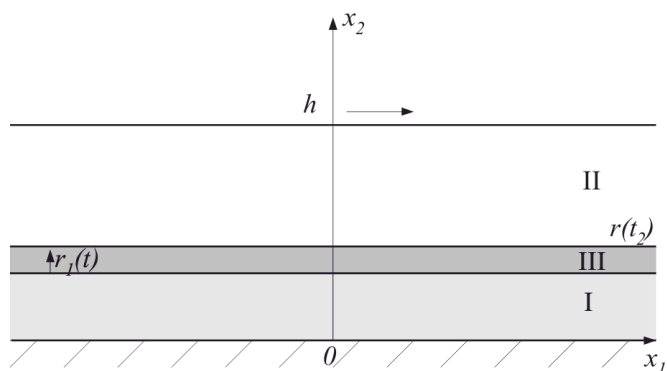


Рис. 4.12

$\tau = \tau_2$ до $\tau = \tau'$.

На рисунке 4.11 представлено изменение упругопластической границы $\frac{r_1(\tau)}{h}$ в зависимости от безразмерного времени τ в промежутке от

Согласно результатам расчетов разгрузка среды (увеличение области $r_1(t) \leq x_2 \leq r(t_2)$) продолжается до некоторого момента времени $t = t_3$ (рис. 4.11), а, начиная с этого момента времени, граница $r_1(t)$ движется в сторону

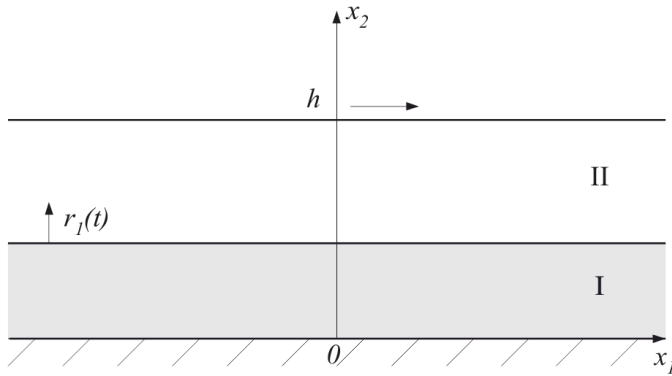


Рис. 4.13

границы $r(t_2)$, т.е. увеличивается область течения $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ (рис.4.12). В момент времени $t = t'$ граница $r_1(t)$ выходит на стационарную границу $x_2 = r(t_2)$ и в материале снова остается две области:

область I продолжающегося вязкопластического течения $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ и область II обратимого деформирования $r_1(t) < x_2 \leq h$ (рис. 4.13). Соотношения (4.43)-(4.48) в этом случае также будут выполняться.

Изменение режима нагружения с возрастающего на постоянный приводит к изменению краевого условия для перемещений с (4.18) на (4.48). Следовательно, момент времени t'_{pl} , в который температура на нижней границе слоя $x_2 = 0$ станет равной температуре плавления, находится из соотношения (4.12) и нового условия (4.48).

$$t'_{pl} = \frac{2\theta_{pl} + \gamma\zeta_1(t_2^2 + t^{*2}) - 2\gamma fa_0 t^*}{2\gamma(\zeta_1 t_2 - fa_0)} > t_{pl}.$$

Для решения уравнений (4.44), (4.46) и (4.47) во временном промежутке $t' \leq t \leq t'_{pl}$ использовалась следующая неявная конечно-разностная схема.

В области обратимого деформирования на пространственно-временную область $r_1(t) \leq x_2 \leq h$, $t' \leq t \leq t'_{pl}$, наносится конечно-разностная сетка

$$\omega_{h_1 h_2} = \{x_i = ih_1 + r_1^j, \quad i = \overline{0, N_1}; \quad t^j = jh_2 + t', \quad j = \overline{1, N_2}\} \quad (4.59)$$

с пространственным шагом $h_1 = \frac{(h - r_1^j)}{N_1}$ и шагом по времени $h_2 = \frac{(t'_{pl} - t')}{N_2}$.

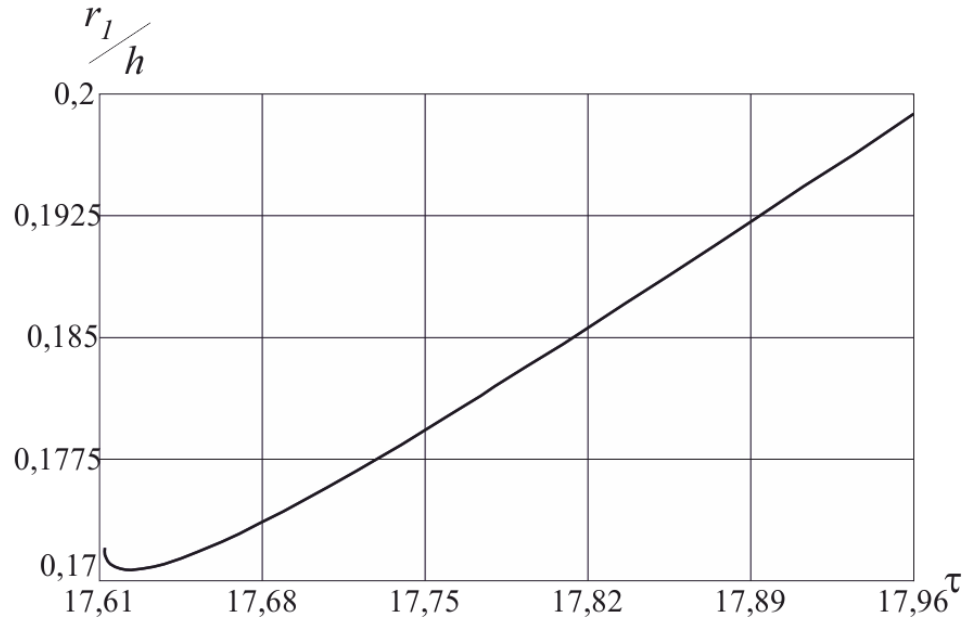


Рис. 4.14. Граница $r_1(\tau)/h$ во временном промежутке от $\tau = \tau_2$ до $\tau = \tau'_{pl}$

Для области вязкопластического течения $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ имеем следующую сетку

$$\omega_{h_3 h_2} = \{x_i = ih_3, \quad i = \overline{0, N_3}; \quad t^j = jh_2 + t', \quad j = \overline{1, N_2}\} \quad (4.60)$$

с пространственным шагом $h_3 = r_1^j / N_3$.

На сетках (4.59) и (4.60) вводим сеточные функции $\theta 1_i^j$ и $\theta 2_i^j$. Из соотношений (4.44), (4.46) и (4.47) получим уравнения (4.52), (4.53) и (4.56)

К этим уравнениям добавим следующие краевые и начальные условия

$$\begin{aligned} \theta 1_{N_1}^{j+1} &= \theta 1_{N_1-1}^{j+1}, \quad \theta 2_{N_3}^{j+1} = \theta 1_0^{j+1}, \\ \theta 2_0^{j+1} &= \frac{\gamma \zeta_1}{2\xi} (2t_2((j+1)h_2 + t') - t_2^2 - t^{*2}) - \frac{\eta a_0}{\xi} (((j+1)h_2 + t') - t^*), \\ \frac{\theta 1_1^{j+1} - \theta 1_0^{j+1}}{h_1} &= \frac{\theta 2_{N_3}^{j+1} - \theta 2_{N_3-1}^{j+1}}{h_3} + O(h_1 + h_3), \\ \theta 1_i^0 &= \theta(ih_1 + r(t_2), t'), \quad \theta 1_i^0 = \theta(ih_1, t'), \quad r_1^0 = r(t_2). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Для определения значения упругопластической границы r_1^{j+1} получим

$$r_1^{j+1} = \frac{N_3(\theta_{2_{N_3-1}}^{j+1} - \theta_{2_{N_3}}^{j+1})}{N_1(\theta_{1_0}^{j+1} - \theta_{1_1}^{j+1}) + N_3(\theta_{2_{N_3-1}}^{j+1} - \theta_{2_{N_3}}^{j+1})} + O(h_1 + h_3). \quad (4.62)$$

После решения системы (4.52), (4.53), (4.56), (4.61) и (4.62) в пакете Mathematica, получаем распределение температуры $\theta_{1_i}^j$, $\theta_{2_i}^j$ и значение упругопластической границы r_1^j на каждом j -м шаге по времени в интервале от $t = t'$ до $t = t'_{pl}$.

На рисунках 4.7 и 4.14 представлено изменение границы $\frac{r_1(\tau)}{h}$ в зависимости от времени τ в промежутке от $\tau = \tau_2$ до $\tau = \tau'_{pl}$.

4.4. Течение при уменьшающемся напряжении и разгрузка среды

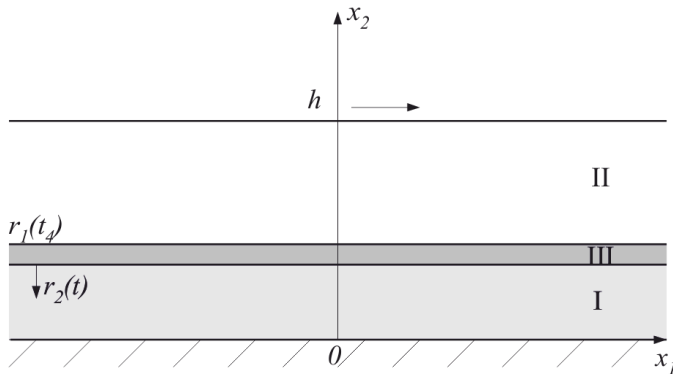


Рис. 4.15

Изменение в режиме нагружения приводит к возникновению новой упругопластической границы $x_2 = r_2(t)$. С момента времени $t = t_4$ она движется к нижней границе слоя $x_2 = 0$ (рисунок 4.15), и область деформирования снова разбивается на три части: вязкопластическое течение продолжается в области $0 \leq x_2 \leq r_2(t)$ (область I на рисунке 4.15), в области $r_2(t) \leq x_2 \leq r_1(t_4)$ компонента p_{12} не изменяется (область III на рисунке 4.15), в области $r_1(t_4) \leq x_2 \leq h$ материал деформируется обратимо (область II на рисунке 4.15).

Пусть, начиная с момента времени $t = t_4 > t_2$, напряжение на внешней границе слоя меняется по закону

$$\sigma_{12}|_{x_2=h} = \zeta_1 t_2 - \zeta_2 (t - t_4), \quad \zeta_2 > 0$$

Проинтегрировав уравнения равновесия (4.6) в области обратимого деформирования, получим

$$\sigma_{12} = \zeta_1 t_2 - \zeta_2 (t - t_4), \quad \sigma_{22} = a_0. \quad (4.63)$$

Уравнение теплопроводности в упругой области $r_1(t_4) < x_2 \leq h$ и в области $r_2(t) \leq x_2 \leq r_1(t_4)$ с неизменяющейся компонентой p_{12} примет вид

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l (\zeta_1 t_2 - \zeta_2 (t - t_4))^2}{(\mu - l \theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\beta_3 \zeta_2 (\zeta_1 t_2 - \zeta_2 (t - t_4))}{(\mu - l \theta)^2} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2}. \quad (4.64)$$

В области вязкопластического течения $0 \leq x_2 \leq r_2(t)$ и в области $r_2(t) \leq x_2 \leq r_1(t_4)$ напряжения определяются из зависимости (1.43) с учетом двух последних соотношений (4.20) и имеют вид (4.24). Если же проинтегрировать уравнения равновесия, приняв во внимание условие непрерывности компонент напряжений на границах $x_2 = r_1(t_4)$ и $x_2 = r_2(t)$, получим, что в этих областях для напряжений справедливы зависимости (4.63).

Из соотношений (4.26) и (4.63) найдем скорость пластических деформаций в области течения $0 \leq x_2 \leq r_2(t)$

$$\varepsilon_{12}^p = \frac{1}{\eta} \left(\zeta_1 t_2 - \zeta_2 (t - t_4) - k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{pl}} \right)^2 \right) \right). \quad (4.65)$$

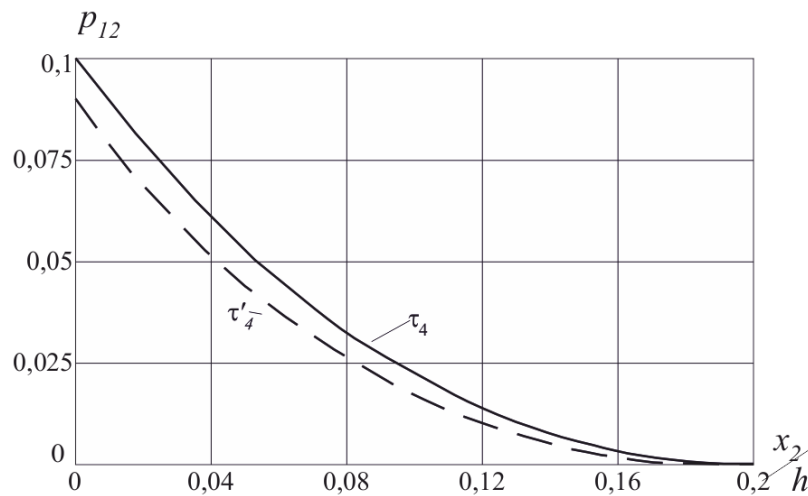


Рис. 4.16. Распределение пластических деформаций p_{12} в моменты времени $\tau = \tau'_4$ и $\tau = \tau_4$

Из (4.65) и условия $\varepsilon_{12}^p|_{x_2=r_2} = 0$ получим уравнение для нахождения значения упругопластической границы $x_2 = r_2(t)$

$$\zeta_1 t_2 - \zeta_2(t - t_4) = k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta(r_2(t), t)}{\theta_{pl}} \right)^2 \right). \quad (4.66)$$

Для области вязкопластического течения $0 \leq x_2 \leq r_2(t)$ уравнение (1.40) с учетом соотношений (4.26), (4.64) и (4.65) примет форму

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l (\zeta_1 t_2 - \zeta_2(t - t_4))^2}{(\mu - l\theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\beta_3 \zeta_2 (\zeta_1 t_2 - \zeta_2(t - t_4))}{(\mu - l\theta)^2} = \\ & = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} - \frac{\zeta_1 t_2 - \zeta_2(t - t_4)}{\nu_1 \eta} \left(\zeta_1 t_2 - \zeta_2(t - t_4) - k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{pl}} \right)^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Из (4.11) и (4.48) найдем

$$u|_{x_2=0} = \frac{t}{\xi} (\zeta_1 t_2 + \zeta_2 t_4 - f a_0) - \frac{\zeta_2 t^2 + \zeta_2 t_4^2 + \zeta_1 t_2^2 + \zeta_1 t^{*2}}{2\xi} + \frac{f a_0}{\xi} t^*. \quad (4.68)$$

Уравнения (4.64), (4.66) и (4.67) решаются при помощи конечно-разностной схемы с использованием условия (4.12) и первого условия из (4.16). Учитывается также, что температура непрерывна в момент времени $t = t_4$ и на упругопластических границах $x_2 = r_1(t_4)$ и $x_2 = r_2(t)$.

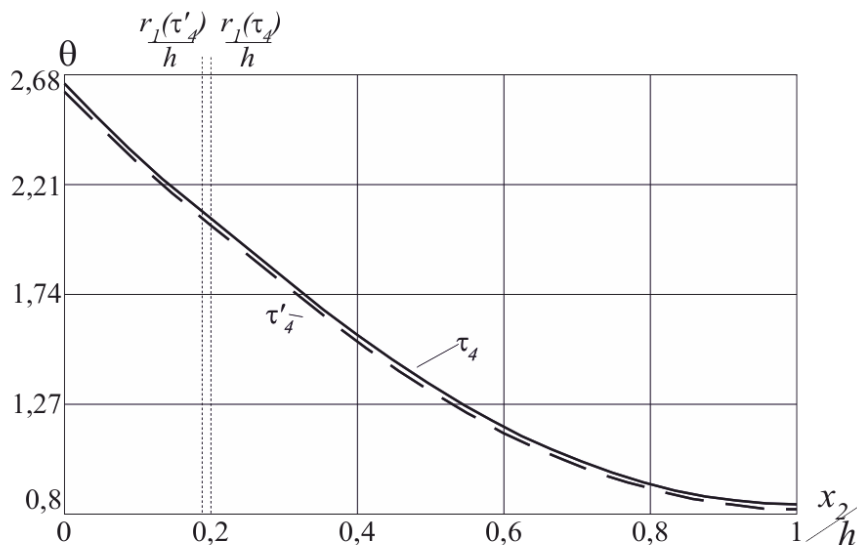


Рис. 4.17. Распределение температуры в моменты времени $\tau = \tau'_4$ и $\tau = \tau_4$

В области обратимого деформирования на пространственно-временную область $r_1(t_4) \leq x_2 \leq h$, $t_4 \leq t \leq t''$, наносится конечно-разностная сетка

$$\omega_{h_1 h_2} = \{x_i = ih_1 + r_1(t_4), \quad i = \overline{0, N_1}; \quad t^j = jh_2 + t_4, \quad j = \overline{1, N_2}\} \quad (4.69)$$

с пространственным шагом $h_1 = \frac{(t'' - t_4)}{N_1}$ и шагом по времени $h_2 = \frac{(t'' - t_4)}{N_2}$.

Для области вязкопластического течения имеем следующую сетку

$$\omega_{h_3 h_2} = \{x_i = ih_3, \quad i = \overline{0, N_3}; \quad t^j = jh_2 + t_4, \quad j = \overline{1, N_2}\} \quad (4.70)$$

с пространственным шагом $h_3 = \frac{r_2^j}{N_3}$.

В области, в которой не изменяется компонента p_{12} , берется следующая конечно-разностная сетка:

$$\omega_{h_4 h_2} = \{x_i = ih_4 + r_2^j, \quad i = \overline{0, N_4}; \quad t^j = jh_2 + t_4, \quad j = \overline{1, N_2}\} \quad (4.71)$$

с пространственным шагом $h_4 = \frac{(r_2^j - r_1(t_4))}{N_4}$.

На сетках (4.69), (4.70) и (4.71) вводим сеточные функции $\theta 1_i^j$, $\theta 2_i^j$ и $\theta 3_i^j$. Для них из уравнений (4.64) и (4.67) получим:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_1 \theta 1_i^j + \frac{\beta_3 l (\zeta_1 t_2 - \zeta_2 j h_2)^2}{(\mu - l \theta 1_i^j)^3} \right) \frac{\theta 1_i^{j+1} - \theta 1_i^j}{h_2} - \frac{\beta_3 \zeta_2 (\zeta_1 t_2 - \zeta_2 j h_2)}{(\mu - l \theta 1_i^j)^2} = \\ & = q \frac{\theta 1_{i+1}^{j+1} - 2\theta 1_i^{j+1} + \theta 1_{i-1}^{j+1}}{h_1^2} + O(h_1^2 + h_2), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}; \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_1 \theta 2_i^j + \frac{\beta_3 l (\zeta_1 t_2 - \zeta_2 j h_2)^2}{(\mu - l \theta 2_i^j)^3} \right) \frac{\theta 2_i^{j+1} - \theta 2_i^j}{h_2} - \frac{\beta_3 \zeta_2 (\zeta_1 t_2 - \zeta_2 j h_2)}{(\mu - l \theta 2_i^j)^2} = \\ & = q \frac{\theta 2_{i+1}^{j+1} - 2\theta 2_i^{j+1} + \theta 2_{i-1}^{j+1}}{h_3^2} - \frac{\zeta_1 t_2 - \zeta_2 j h_2}{\nu_1 \eta} \left(\zeta_1 t_2 - \zeta_2 j h_2 - k_0 \left(1 - \left(\frac{\theta 2_i^j}{\theta_{pl}} \right)^2 \right) \right) \\ & + O(h_3^2 + h_2), \quad i = \overline{1, N_3 - 1}; \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_1 \theta 3_i^j + \frac{\beta_3 l (\zeta_1 t_2 - \zeta_2 j h_2)^2}{(\mu - l \theta 3_i^j)^3} \right) \frac{\theta 3_i^{j+1} - \theta 3_i^j}{h_2} - \frac{\beta_3 \zeta_2 (\zeta_1 t_2 - \zeta_2 j h_2)}{(\mu - l \theta 3_i^j)^2} = \\ & = q \frac{\theta 3_{i+1}^{j+1} - 2\theta 3_i^{j+1} + \theta 3_{i-1}^{j+1}}{h_4^2} + O(h_4^2 + h_2), \quad i = \overline{1, N_4 - 1}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Из соотношения (4.66) найдем значение температуры в точке, в которой в момент времени t^{j+1} находится упругопластическая граница r_2^{j+1}

$$\theta_{2_{N_3}^{j+1}} = \theta_{pl} \sqrt{1 - \frac{\zeta_1 t_2 - \zeta_2 j h_2}{k_0}}. \quad (4.75)$$

К уравнениям (4.72)-(4.75) добавим краевые и начальные условия в форме

$$\begin{aligned} \theta_{1_{N_1}^{j+1}} &= \theta_{1_{N_1-1}^{j+1}}, \quad \theta_{3_{N_4}^{j+1}} = \theta_{1_0^{j+1}}, \quad \theta_{2_{N_3}^{j+1}} = \theta_{3_0^{j+1}}, \\ \theta_{2_0^{j+1}} &= \frac{\eta}{\xi} (\zeta_1 t_2 + \zeta_2 t_4 - f a_0) - \gamma \frac{\zeta_2 ((j+1)h_2 + t_4)^2 + \zeta_2 t_4^2 + \zeta_1 (t_2^2 + t^{*2})}{2\xi} + \frac{\eta f a_0}{\xi} t^*, \\ \frac{\theta_{1_1^{j+1}} - \theta_{1_0^{j+1}}}{h_1} &= \frac{\theta_{3_{N_4}^{j+1}} - \theta_{3_{N_4-1}^{j+1}}}{h_4} + O(h_1 + h_4), \\ \frac{\theta_{3_1^{j+1}} - \theta_{3_0^{j+1}}}{h_4} &= \frac{\theta_{2_{N_3}^{j+1}} - \theta_{2_{N_3-1}^{j+1}}}{h_3} + O(h_3 + h_4), \\ \theta_{1_i^0} &= \theta(ih_1 + r_1(t_4), t_4), \quad \theta_{2_i^0} = \theta(ih_3, t_4), \quad \theta_{3_i^0} = \theta(ih_4 + r_1(t_4), t_4), \quad r_2^0 = r_1(t_4). \end{aligned} \quad (4.76)$$

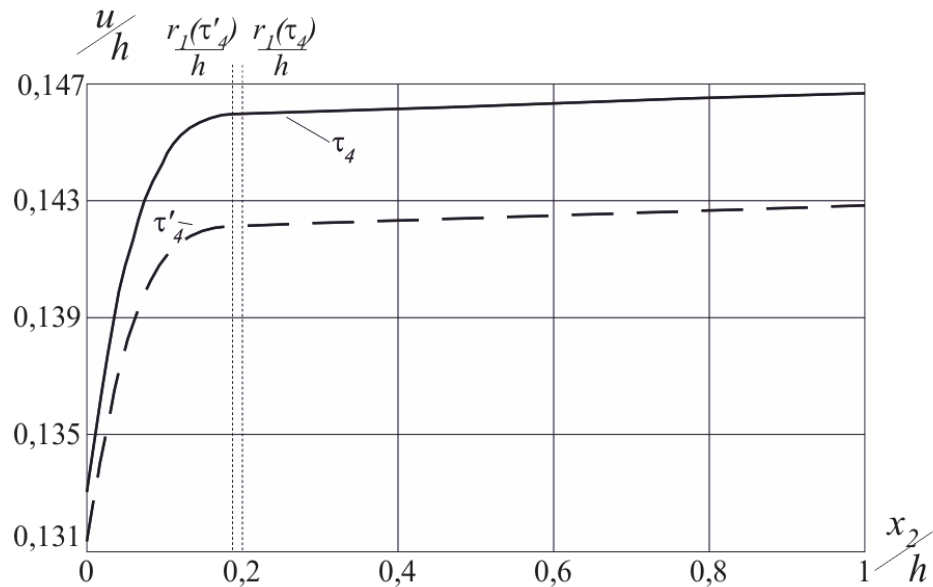


Рис. 4.18. Распределение перемещения в моменты времени $\tau = \tau'_4$ и $\tau = \tau_4$

Для значения упругопластической границы r_2^{j+1} получим

$$r_2^{j+1} = \frac{N_3(\theta 2_{N_3-1}^{j+1} - \theta 2_{N_3}^{j+1})}{N_4(\theta 3_0^{j+1} - \theta 3_1^{j+1}) + N_3(\theta 2_{N_3-1}^{j+1} - \theta 2_{N_3}^{j+1})} + O(h_3 + h_4). \quad (4.77)$$

После решения системы (4.72)-(4.77) в пакете Mathematica, получаем распределение температуры $\theta 1_i^j$, $\theta 2_i^j$ и $\theta 3_i^j$, и значение упругопластической границы r_2^j на каждом j -м шаге по времени.

Компонента пластических деформаций p_{12} в области $0 \leq x_2 \leq r_2(t)$ вычисляется из соотношения (4.40) и условия ее непрерывности в момент времени $t = t_4$. Компонента остаточных пластических деформаций p_{12} в какой-либо точке области $r_2(t) \leq x_2 \leq r_1(t_4)$ равна значению пластических деформаций, вычисляемых по уравнению (4.40) до того момента времени, когда этой точки достигнет граница $x_2 = r_2(t)$, далее компонента p_{12} в этой точке не изменяется.

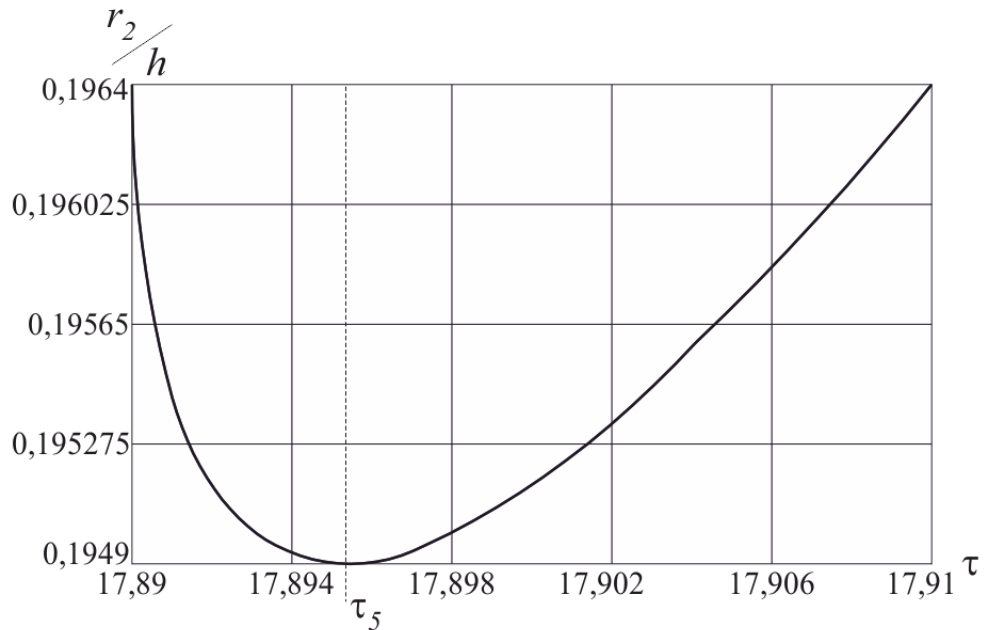


Рис. 4.19. Граница $r_2(\tau)/h$ во временном промежутке от $\tau = \tau_4$ до $\tau = \tau''$

Из (4.24) и (4.63) для областей $0 \leq x_2 \leq r_2(t)$ и $r_2(t) \leq x_2 \leq r_1(t_4)$ получим компоненту обратимых деформаций

$$m_{12} = \frac{\zeta_1 t_2 - \zeta_2 (t - t_4)}{2(\mu - l\theta)}.$$

Учитывая условие (4.68), перемещение в области вязкопластического течения можно вычислить из уравнения (4.41). В области с неизменяющейся

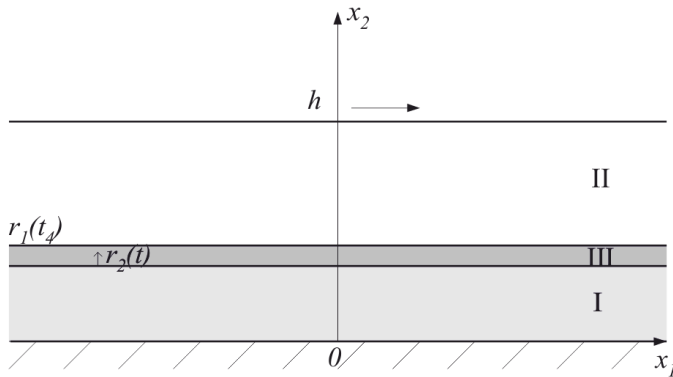


Рис. 4. 20

компонентой p_{12} перемещения также определяются из уравнения (4.41), а в области обратного деформирования – из уравнения (4.42). При нахождении перемещений также использовалось условие их непрерывности на границах

$x_2 = r_1(t_4)$ и $x_2 = r_2(t)$.

На рисунке 4.17 показано распределение пластических деформаций p_{12} , а на рисунке 4.19 распределение перемещений: штриховой линией в момент времени $\tau = \tau'_4$ ($\tau_2 < \tau'_4 < \tau_4$) и сплошной линией в момент $\tau = \tau_4$. Рисунок 4.18 иллюстрирует распределение температуры в моменты времени $\tau = \tau'_4$ (штриховая линия) и $\tau = \tau_4$ (сплошная линия). На рисунке 4.20 изображена зависимость упругопластической границы $r_2(\tau)/h$ от безразмерного времени τ .

Согласно рисунку 4.19 уменьшение области течения $0 \leq x_2 \leq r_2(t)$ про-

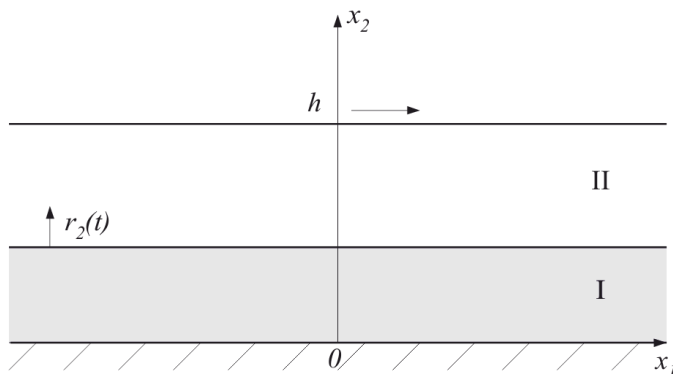


Рис. 4. 21

исходит до некоторого момента времени $t = t_5$. Начиная же с момента времени $t = t_5$, граница $r_2(t)$ движется в сторону границы $r_1(t_4)$ (рис. 4.20), в некоторый момент времени $t = t''$

эти границы совпадают, и область течения $0 \leq x_2 \leq r_2(t)$ продолжает развиваться.

Деформируемая область $0 \leq x_2 \leq h$ снова разбивается на две подобласти: пластическая область $0 \leq x_2 \leq r_2(t)$ (область I на рисунке 4.21) и область обратимого деформирования $r_2(t) < x_2 \leq h$ (область II на рисунке 4.21). Соотношения (4.63)-(4.68) в этом случае также будут выполняться. Для решения этих уравнений использовалась следующая конечно-разностная сетка.

В области обратимого деформирования

$$\omega_{ih_2} = \{x_i = ih_1 + r_2^j, \quad i = \overline{0, N_1}; \quad t^j = jh_2 + t'', \quad j = \overline{1, N_2}\}, \quad (4.78)$$

где $h_1 = \frac{(1-r_2^j)}{N_1}$, $h_2 = \frac{(t''_{pl}-t'')}{N_2}$. Здесь t''_{pl} – момент времени, когда на нижней границе слоя $x_2 = 0$ температура станет равной температуре плавления

$$t''_{pl} = \frac{1}{\zeta_1}(\zeta_1 t_2 + \zeta_2 t_4 - fa_0) + \frac{1}{\zeta_2 \gamma} \sqrt{D_1},$$

$$D_1 = \gamma^2(\zeta_1 t_2 + \zeta_2 t_4 - fa_0)^2 - \gamma^2 \zeta_2(\zeta_2 t_4^2 + \zeta_1 t_2^2 + \zeta_1 t^{*2}) + 2\gamma^2 fa_0 t^{*} - 2\gamma \zeta_2 \xi \theta_{pl}.$$

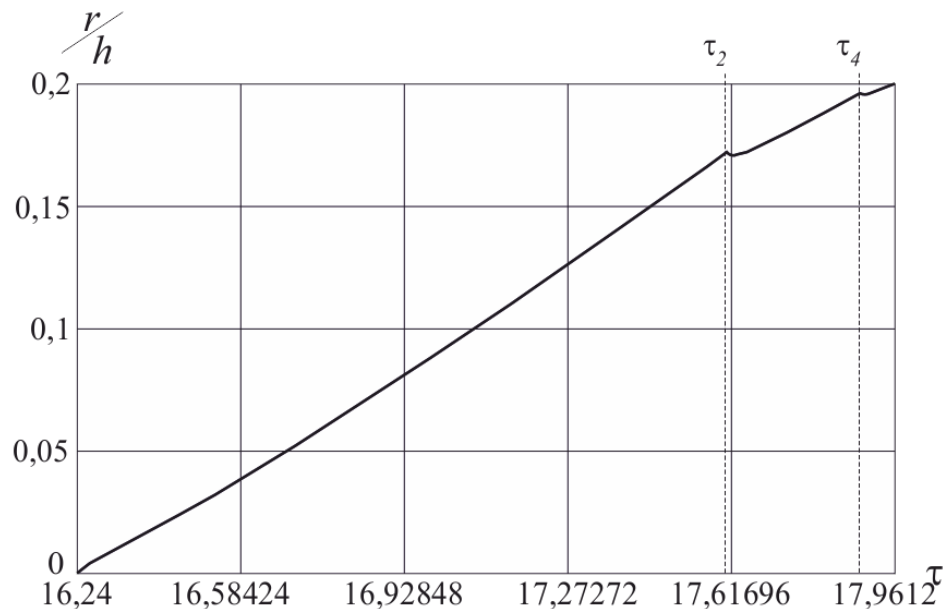


Рис. 4.22. Граница $\frac{r(\tau)}{h}$ во временном промежутке от $\tau = \tau_1$ до $\tau = \tau_2$, граница

$\frac{r_1(\tau)}{h}$ от $\tau = \tau_2$ до $\tau = \tau_4$ и граница $\frac{r_2(\tau)}{h}$ от $\tau = \tau_4$ до $\tau = \tau''_{pl}$

Для области вязкопластического течения имеем следующую сетку

$$\omega_{h_3 h_2} = \{x_i = ih_3, \quad i = \overline{0, N_3}; \quad t^j = jh_2 + t'', \quad j = \overline{1, N_2}\}, \quad (4.79)$$

где $h_3 = r_2^j / N_3$.

На сетках (4.78) и (4.79) вводим сеточные функции $\theta 1_i^j$ и $\theta 2_i^j$. Из уравнений (4.64), (4.66) и (4.67) получим соотношения (4.72), (4.73) и (4.75).

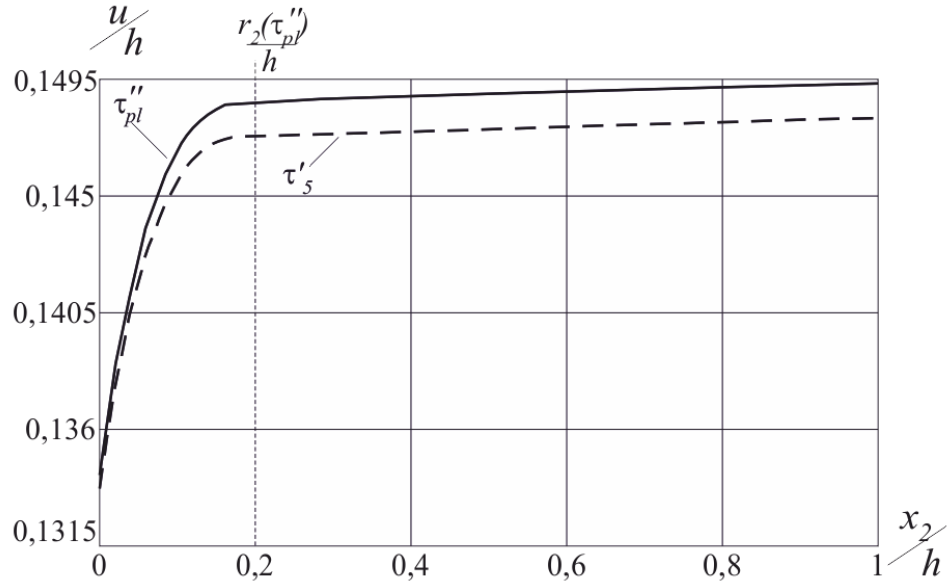


Рис. 4.23. Распределение перемещений в моменты времени $\tau = \tau'_5$ и $\tau = \tau''_{pl}$

К этим уравнениям добавим краевые и начальные условия

$$\begin{aligned} \theta 1_{N_1}^{j+1} &= \theta 1_{N_1-1}^{j+1}, \quad \theta 2_{N_3}^{j+1} = \theta 1_0^{j+1}, \\ \theta 2_0^{j+1} &= \frac{\eta}{\xi} (\zeta_1 t_2 + \zeta_2 t_4 - fa_0) - \gamma \frac{\zeta_2 ((j+1)h_2 + t_4)^2 + \zeta_2 t_4^2 + \zeta_1 t_2^2 + \zeta_1 t^*{}^2}{2\xi} + \\ &+ \frac{\eta fa_0}{\xi} t^*, \quad \frac{\theta 1_1^{j+1} - \theta 1_0^{j+1}}{h_1} = \frac{\theta 2_{N_3}^{j+1} - \theta 2_{N_3-1}^{j+1}}{h_3} + O(h_1 + h_3), \\ \theta 1_i^0 &= \theta(ih_1 + r_1(t_4), t''), \quad \theta 2_i^0 = \theta(ih_3, t''), \quad r_2^0 = r_1(t_4). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Для значения упругопластической границы r_2^{j+1} получим

$$r_2^{j+1} = \frac{N_3 (\theta 2_{N_3-1}^{j+1} - \theta 2_{N_3}^{j+1})}{N_1 (\theta 1_0^{j+1} - \theta 1_1^{j+1}) + N_3 (\theta 2_{N_3-1}^{j+1} - \theta 2_{N_3}^{j+1})} + O(h_1 + h_3). \quad (4.81)$$

После решения системы (4.72), (4.73), (4.75), (4.80) и (4.81) в пакете

Mathematica, получаем распределение температуры $\theta 1_i^j$, $\theta 2_i^j$ и значение упругопластической границы r_2^j на каждом j -м шаге по времени.

На рисунке 4.22 иллюстрируется изменение упругопластической границы $r(\tau)/h$ в зависимости от времени τ в промежутке от $\tau = \tau_1$ до $\tau = \tau_2$, изменение упругопластической границы $r_1(\tau)/h$ в промежутке от $\tau = \tau_2$ до $\tau = \tau_4$ и изменение упругопластической границы $r_2(\tau)/h$ в промежутке от $\tau = \tau_4$ до $\tau = \tau_{pl}''$.

Рисунок 4.23 иллюстрирует распределение перемещений: штриховой линией в момент времени $\tau = \tau_5'$ ($\tau_4 < \tau_5' < \tau_{pl}''$) и сплошной линией в момент времени $\tau = \tau_{pl}''$.

В момент времени $t = t_{pl}''$ температура на нижней границе слоя $x_2 = 0$ станет равной температуре плавления и далее выполняется условие (4.30) вместо условия (4.12), что приведет к изменению конечно-разностной схемы.

В области обратимого деформирования

$$\omega_{h_1 h_2} = \left\{ x_i = i h_1 + r_2^j, \quad i = \overline{0, N_1}; \quad t^j = j h_2 + t_{pl}'', \quad j = \overline{1, N_2} \right\}, \quad (4.82)$$

где $h_1 = (1 - r_2^j)/N_1$, $h_2 = (t_6 - t_{pl}'')/N_2$, $t = t_6 > t_{pl}''$ – момент времени, когда область течения перестанет увеличиваться. Момент времени $t = t_6$ получается численно

из условия выполнения соотношения $\frac{r_2^{j+1} - r_2^j}{h_2} + O(h_2) = 0$.

Для области вязкопластического течения имеем следующую сетку

$$\omega_{h_3 h_2} = \left\{ x_i = i h_3, \quad i = \overline{0, N_3}; \quad t^j = j h_2 + t_{pl}'', \quad j = \overline{1, N_2} \right\}, \quad (4.83)$$

где $h_3 = r_2^j/N_3$.

На сетках (4.82) и (4.83) вводим сеточные функции $\theta 1_i^j$ и $\theta 2_i^j$. Уравнения (4.72), (4.73), (4.75) и (4.81) останутся прежними. Второе краевое условие

(4.80) изменится на следующее

$$\theta 2_0^{j+1} = \theta_{pl}, \quad (4.84)$$

К системе (4.72), (4.73), (4.75), (4.80), (4.81) и (4.84) добавим также начальные условия

$$\theta 1_i^0 = \theta(ih_1 + r_2(t''_{pl}), t''_{pl}), \quad \theta 2_i^0 = \theta(ih_3, t''_{pl}), \quad r_2^0 = r_2(t''_{pl}).$$

Граница $x_2 = r_2(t)$ будет увеличиваться до момента времени $t = t_6$. Далее, с этого момента времени, начнется разгрузка, и появится новая упруго-пластическая граница $x_2 = r_3(t)$, отделяющая область продолжающегося вязкопластического течения от области, в которой компонента тензора необратимых деформаций p_{12} не изменяется. Слой материала $0 \leq x_2 \leq h$ будет разделен на три области: в области $0 \leq x_2 \leq r_3(t)$ продолжается пластическое течение (область I на рисунке 4.24), в области $r_3(t) \leq x_2 \leq r_2(t_6)$ не изменяется компонента p_{12} (область III на рисунке 4.24), а в области $r_2(t_6) \leq x_2 \leq h$ материал деформируется обратимо (область II на рисунке 4.24).

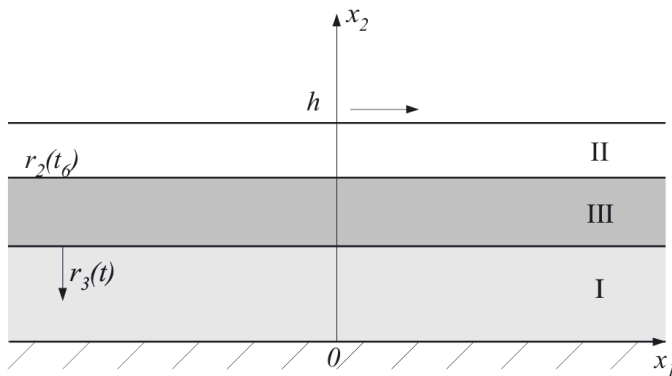


Рис. 4. 24

Уравнение для нахождения положения упругопластической границы $x_2 = r_3(t)$ имеет вид (4.66), где вместо границы $x_2 = r_2(t)$ нужно подставить $x_2 = r_3(t)$. Уравнение теплопроводности в области обратимого деформирования $r_2(t_6) < x_2 \leq h$ и в области с неизменяющейся компонентой p_{12} $r_3(t) < x_2 \leq r_2(t_6)$ имеет вид (4.64), а в области вязкопластического течения $0 < x_2 \leq r_3(t)$ – (4.67). Решение этих уравнений проводилось с использованием неявной конечно-разностной схемы.

В области обратимого деформирования на пространственно-временную область $r_2(t_6) \leq x_2 \leq h$, $t_6 \leq t \leq t_{pr}$, где t_{pr} – момент времени, когда на нижней

границе слоя выполнится условие прилипания $\sigma_{12}|_{x_2=0} = f\sigma_{22}|_{x_2=0}$, наносится конечно-разностная сетка

$$\omega_{h_1 h_2} = \{x_i = ih_1 + r_2(t_6), \quad i = \overline{0, N_1}; \quad t^j = jh_2 + t_6, \quad j = \overline{1, N_2}\} \quad (4.85)$$

с пространственным шагом $h_1 = (1-r_2(t_6))/N_1$ и шагом по времени $h_2 = (t_{pr}-t_6)/N_2$.

Для области вязкопластического течения $0 \leq x_2 \leq r_3(t)$ имеем следующую сетку

$$\omega_{h_3 h_2} = \{x_i = ih_3, \quad i = \overline{0, N_3}; \quad t^j = jh_2 + t_6, \quad j = \overline{1, N_2}\} \quad (4.86)$$

с пространственным шагом $h_3 = r_3^j/N_3$.

В области, в которой не изменяется p_{12} , берется следующая конечно-разностная сетка:

$$\omega_{h_4 h_2} = \{x_i = ih_4 + r_3^j, \quad i = \overline{0, N_4}; \quad t^j = jh_2 + t_6, \quad j = \overline{1, N_2}\} \quad (4.87)$$

с пространственным шагом $h_4 = (r_3^j - r_2(t_6))/N_4$.

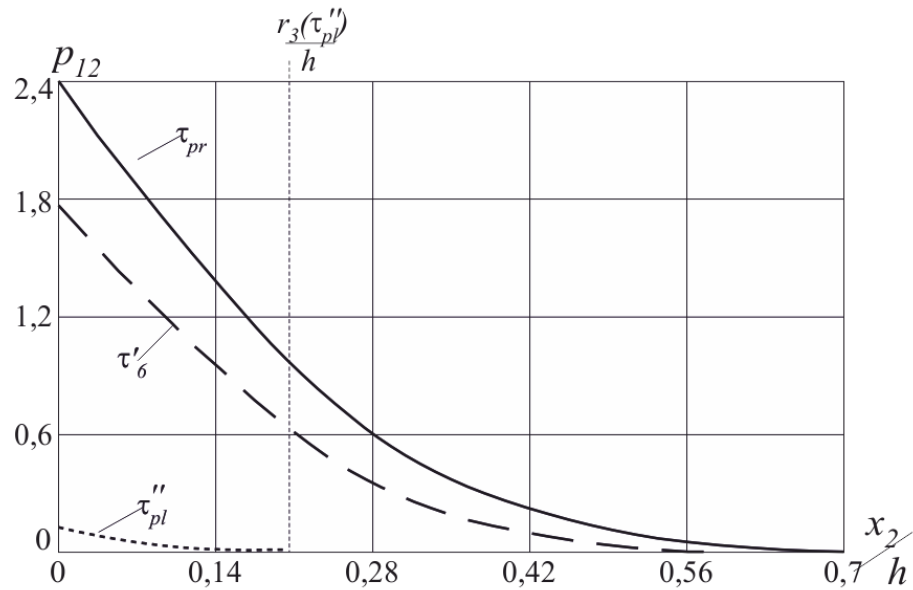


Рис. 4.25. Распределение пластических деформаций p_{12} в моменты времени

$$\tau = \tau''_{pl}, \quad \tau = \tau'_6 \quad \text{и} \quad \tau = \tau_{pr}$$

На сетках (4.85), (4.86) и (4.87) вводим сеточные функции $\theta 1_i^j$, $\theta 2_i^j$ и $\theta 3_i^j$. Уравнения (4.72)-(4.75) будут также выполняться. Краевые условия из

(4.76) кроме четвертого не изменяются. А четвертое условие из (4.76) заменим на следующее

$$\theta_2^{j+1} = \theta_{pl}.$$

Добавим также начальные условия

$$\begin{aligned} \theta 1_i^0 &= \theta(ih_1 + r_2(t_6), t_6), & \theta 2_i^0 &= \theta(ih_3, t_6), \\ \theta 3_i^0 &= \theta(ih_4 + r_2(t_6), t_6), & r_3^0 &= r_2(t_6). \end{aligned} \quad (4.88)$$

После решения системы (4.72)-(4.76), (4.88) в пакете Mathematica, получаем распределение температуры $\theta 1_i^j$, $\theta 2_i^j$ и $\theta 3_i^j$, и значение упругопластической границы r_3^j на каждом j -м шаге по времени.

Пластическую деформацию p_{12} в области вязкопластического течения $0 \leq x_2 \leq r_3(t)$ также находим по формуле (4.40) с учетом ее непрерывности в момент времени $t = t_6$. Остаточные пластические деформации p_{12} в какой-либо точке области $r_3(t) \leq x_2 \leq r_2(t_6)$ равны значению пластических деформаций, вычисляемых по уравнению (4.40) до того момента времени, когда этой точки достигнет граница $x_2 = r_3(t)$.

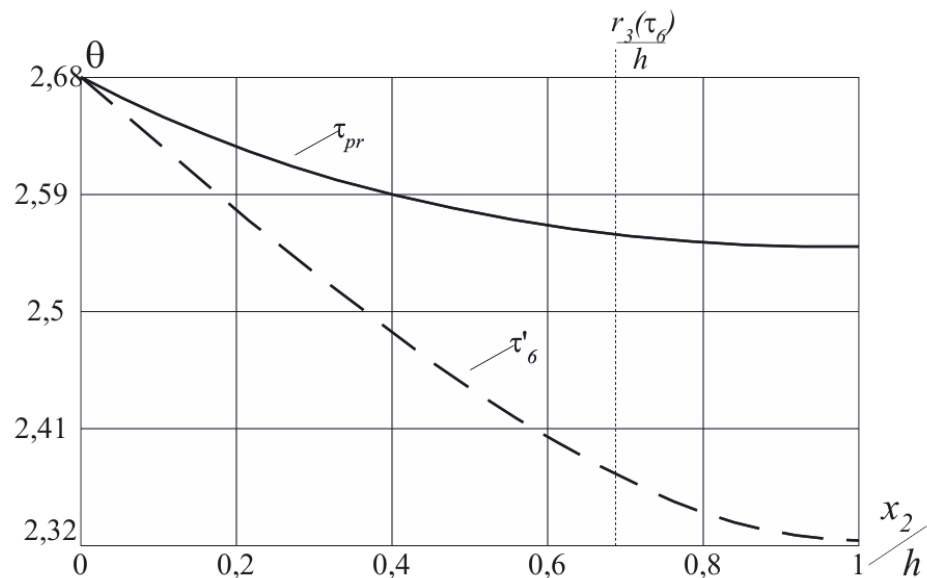


Рис. 4.26. Распределение температуры по слою в моменты времени $\tau = \tau'_6$ и $\tau = \tau_{pr}$

Учитывая (4.68), перемещение в области вязкопластического течения можно найти из уравнения (4.41). В области с накопленными необратимыми деформациями компонента перемещений определится из того же уравнения (4.41), а в области обратимого деформирования – из уравнения (4.42). При этом перемещение непрерывно на границах $x_2 = r_2(t_6)$ и $x_2 = r_3(t)$.

Как уже отмечалось, в момент времени

$$t_{pr} = t_4 + \frac{\zeta_1}{\zeta_2} t_2 - \frac{fa_0}{\zeta_2}$$

напряжение σ_{12} в слое станет равным $f\sigma_{22}$ и на нижней границе слоя выполнится условие прилипания

$$u|_{x_2=0} = \frac{t_{pr}}{\xi} (\zeta_1 t_2 + \zeta_2 t_4 - fa_0) - \frac{\zeta_2 t_{pr}^2 + \zeta_2 t_4^2 + \zeta_1 t_2^2 + \zeta_1 t^{*2}}{2\xi} + \frac{fa_0}{\xi} t^*. \quad (4.89)$$

При дальнейшем уменьшении напряжения материал начнет остывать. Краевое условие для температуры (4.30) изменится на следующее

$$\theta|_{x_2=0} = \theta_{pl} (1 - \gamma_1 (t - t_{pr})), \quad (4.90)$$

где γ_1 – задаваемая постоянная.

Согласно (4.66) и (4.90) в момент времени $t = t_7 > t_{pr}$, который можно вычислить из уравнения

$$\zeta_1 t_2 - \zeta_2 (t_7 - t_4) = k_0 \left(1 - \left(\frac{1 - \gamma_1 (t_7 - t_{pr})}{\xi} \right)^2 \right),$$

граница $x_2 = r_3(t)$ достигнет нижнего края слоя, т.е. $r_3(t_7) = 0$.

Для нахождения распределения температуры $\theta(x_2, t)$ и значений упругопластической границы $r_3(t)$ построим следующую конечно-разностную схему. В области обратимого деформирования на пространственно-временную область $r_2(t_6) \leq x_2 \leq h$, $t_{pr} \leq t \leq t_7$, наносится конечно-разностная сетка

$$\omega_{h_1 h_2} = \left\{ x_i = ih_1 + r_2(t_6), \quad i = \overline{0, N_1}; \quad t^j = jh_2 + t_{pr}, \quad j = \overline{1, N_2} \right\} \quad (4.91)$$

с пространственным шагом $h_1 = \frac{(1-r_2(t_6))}{N_1}$ и шагом по времени $h_2 = \frac{(t_7-t_{pr})}{N_2}$.

Для области вязкопластического течения имеем следующую сетку

$$\omega_{h_3 h_2} = \{x_i = ih_3, \quad i = \overline{0, N_3}; \quad t^j = jh_2 + t_{pr}, \quad j = \overline{1, N_2}\} \quad (4.92)$$

с пространственным шагом $h_3 = \frac{r_3^j}{N_3}$.

В области, в которой не изменяется компонента p_{12} , берется следующая конечно-разностная сетка:

$$\omega_{h_4 h_2} = \{x_i = ih_4 + r_3^j, \quad i = \overline{0, N_4}; \quad t^j = jh_2 + t_{pr}, \quad j = \overline{1, N_2}\} \quad (4.93)$$

с пространственным шагом $h_4 = \frac{(r_3^j - r_2(t_6))}{N_4}$.

На сетках (4.91), (4.92) и (4.93) вводим сеточные функции $\theta 1_i^j$, $\theta 2_i^j$ и $\theta 3_i^j$. Уравнения (4.72)-(4.75) будут также выполняться. Краевые условия из (4.76) кроме четвертого не изменяются, а четвертое условие заменим на следующее

$$\theta 2_0^{j+1} = \theta_{pl} (1 - \gamma_1 j h_2).$$

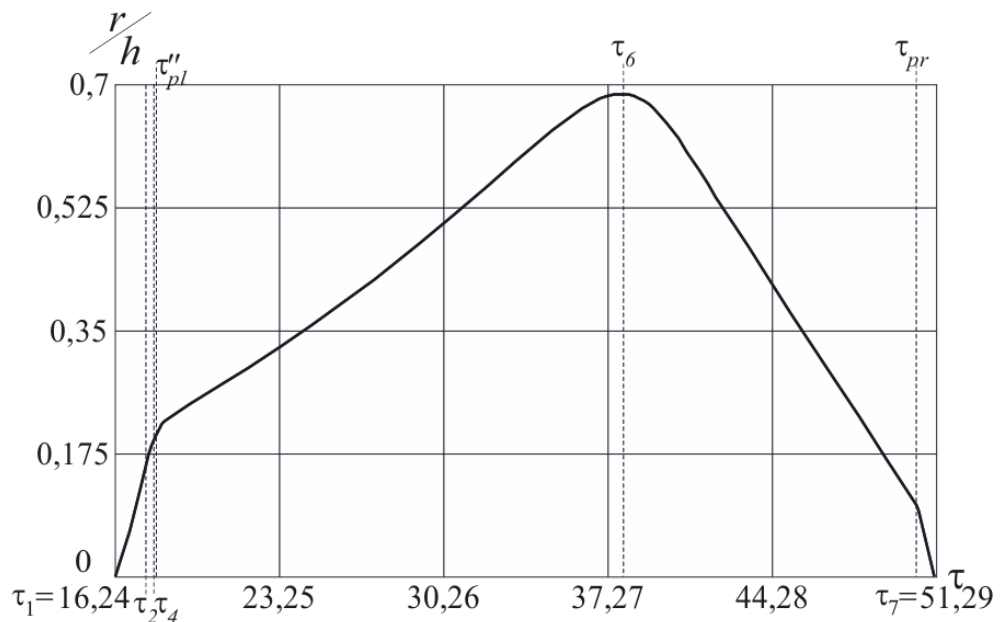


Рис. 4.27. Изменение упругопластической границы во временном промежутке от $\tau = \tau_1$ до $\tau = \tau_7$

Начальные условия в этом случае примут вид

$$\begin{aligned} \theta 1_i^0 &= \theta(ih_1 + r_2(t_6), t_{pr}), & \theta 2_i^0 &= \theta(ih_3, t_{pr}), \\ \theta 3_i^0 &= \theta(ih_4 + r_3(t_{pr}), t_{pr}), & r_3^0 &= r_3(t_{pr}). \end{aligned} \quad (4.94)$$

После решения системы (4.72)-(4.76), (4.94) получаем распределение температуры $\theta 1_i^j$, $\theta 2_i^j$ и $\theta 3_i^j$, и значение упругопластической границы r_3^j на каждом j -м шаге по времени.

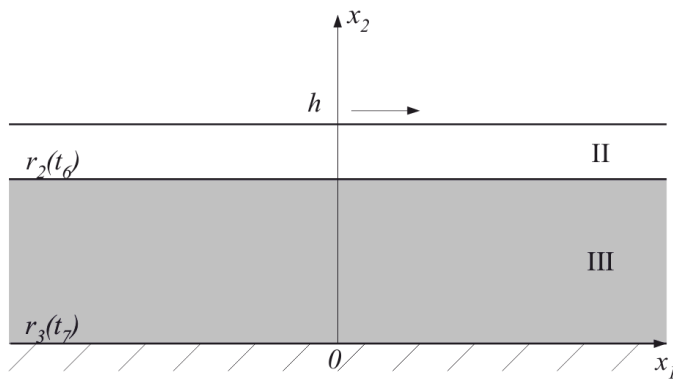


Рис. 4. 28

Начиная с момента времени $t = t_7$ в слое останется две области – область обратимого деформирования $r_2(t_6) < x_2 \leq h$ (область II на рисунке 4.28) и область с накопленными пластическими деформациями

$0 \leq x_2 \leq r_2(t_6)$ (область III на рисунке 4.28).

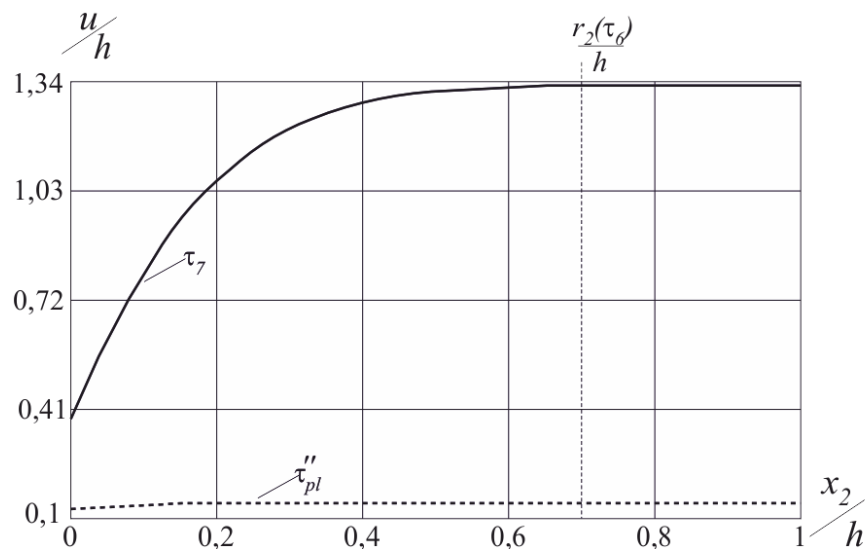


Рис. 4.29. Распределение перемещений в моменты времени $\tau = \tau_{pl}''$ и $\tau = \tau_7$

Учитывая (4.89), перемещение в области с накопленными необратимыми деформациями определится из уравнения (4.41), а в области обратимого

деформирования – из уравнения (4.42). При этом перемещение непрерывно на границе $x_2 = r_2(t_6)$.

На рисунке 4.25 показано распределение пластической деформации p_{12} в моменты времени $\tau = \tau_{pl}''$, $\tau = \tau_6'$ ($\tau_{pl}'' < \tau_6' < \tau_{pr}$) и $\tau = \tau_{pr}$ пунктирной, штриховой и сплошной линиями соответственно. Рисунок 4.26 иллюстрирует распределение температуры по слою в моменты времени τ_6' и τ_{pr} штриховой и сплошной линиями соответственно. На рисунке 4.27 продемонстрировано движение упругопластической границы во временном промежутке от $\tau = \tau_1$ до $\tau = \tau_7$. Рисунок 4.29 показывает распределение перемещений в моменты времени $\tau = \tau_{pl}^2$ (пунктирная линия) и $\tau = \tau_7$ (сплошная линия).

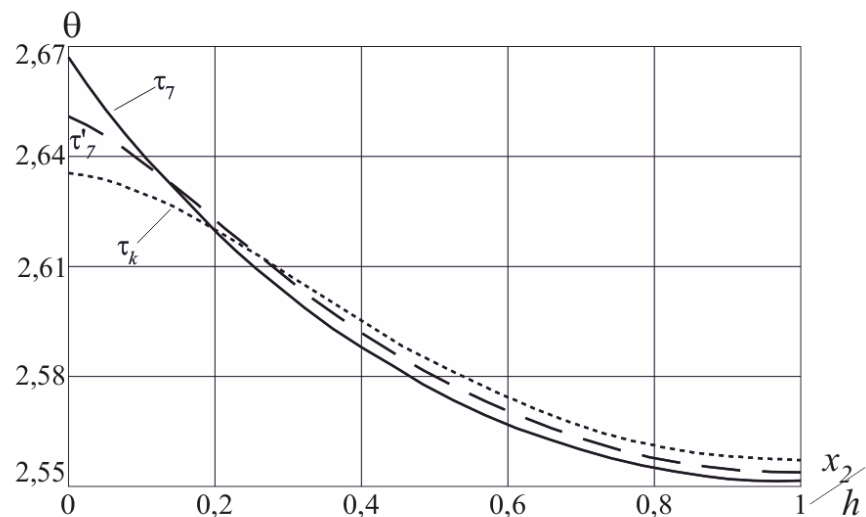


Рис. 4.30. Распределение температуры по слою в моменты времени $\tau = \tau_7$, $\tau = \tau_7'$ и $\tau = \tau_k$

В момент времени

$$t_k = t_4 + \frac{\zeta_1}{\zeta_2} t_2$$

компонента тензора напряжений σ_{12} станет равной нулю. Следовательно, разгрузка материала связана с уменьшением компоненты σ_{22} до нуля.

Уравнение теплопроводности во всем слое $0 \leq x_2 \leq h$ примет вид

$$(1 + \beta_1 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2}.$$

Это уравнение решалось с помощью встроенных функций пакета Mathematica.

Условие (4.89) изменится на следующее

$$u|_{x_2=0} = \frac{t_{pr}}{\xi} (\zeta_1 t_2 + \zeta_2 t_4) - \frac{\zeta_2 t_{pr}^2 + \zeta_2 t_4^2 + \zeta_1 t_2^2 + \zeta_1 t^{*2}}{2\xi}. \quad (4.95)$$

Перемещение в области с накопленными необратимыми деформациями определится из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 2p_{12} \quad (4.96)$$

и условия (4.95), а в области обратимого деформирования перемещение будет иметь вид

$$u = \frac{t_{pr}}{\xi} (\zeta_1 t_2 + \zeta_2 t_4) - \frac{\zeta_2 t_{pr}^2 + \zeta_2 t_4^2 + \zeta_1 t_2^2 + \zeta_1 t^{*2}}{2\xi}. \quad (4.97)$$

На рисунке 4.30 показано распределение температуры по слою в моменты времени $\tau = \tau_7$, $\tau = \tau'_7$ ($\tau_7 < \tau'_7 < \tau_k$) и $\tau = \tau_k$ сплошной, штриховой и пунктирной линиями соответственно

4.5. Охлаждение

В момент времени

$$t_{ohl} = t_{pr} + \frac{1}{\gamma_1}$$

на нижней границе слоя температура станет равной нулю, но в материале останется еще некоторое ее распределение.

Дальнейшее понижение температуры связано с заданием потока тепла на верхней границе слоя

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right|_{x_2=h} = \gamma_2 t,$$

где γ_2 – известная постоянная величина.

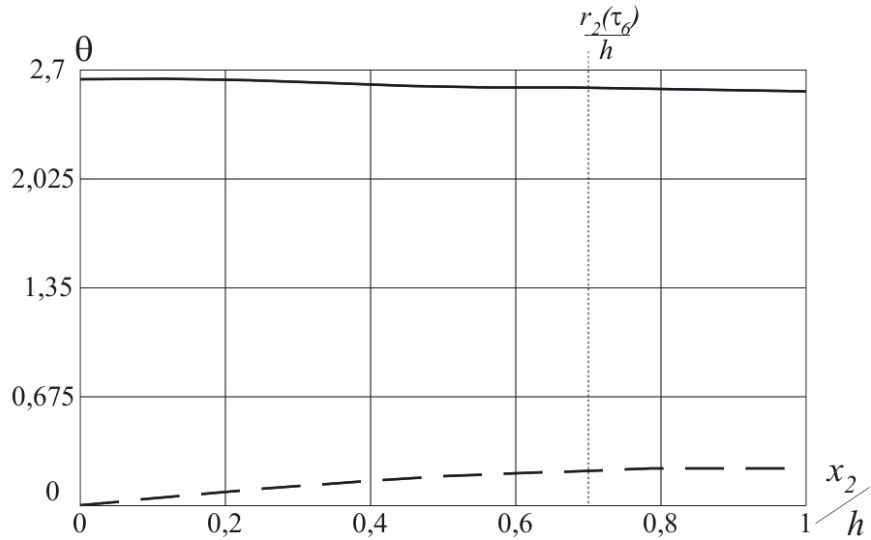


Рис. 4.31. Распределение температуры по слою в моменты времени $\tau = \tau_k$ и $\tau = \tau_{ohl}$

Перемещение в области с накопленными необратимыми деформациями также определяется из (4.95) и (4.96), а в области обратимого деформирования вычисляется по формуле (4.97).

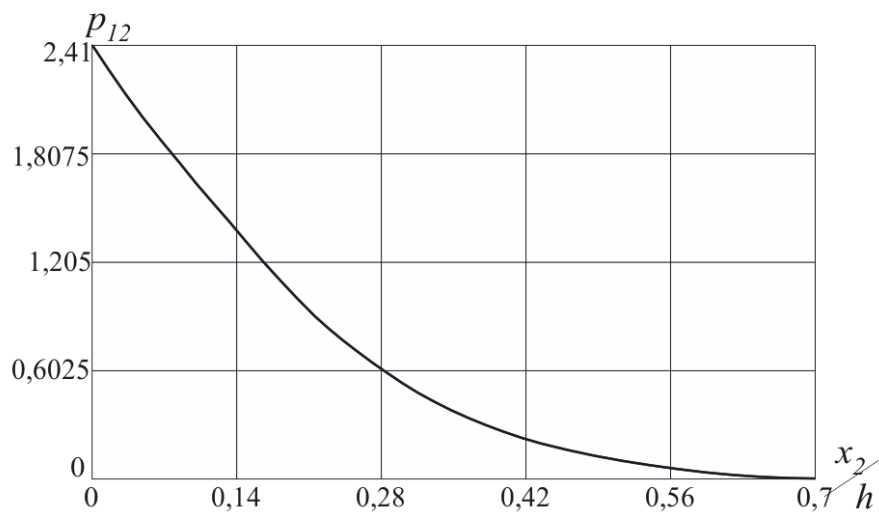


Рис. 4.32. Распределение пластических деформаций p_{12} в конечный момент времени $\tau = \tau_8$

В конечный момент времени $t = t_8$, который определяется из численных расчетов, слой полностью остынет.

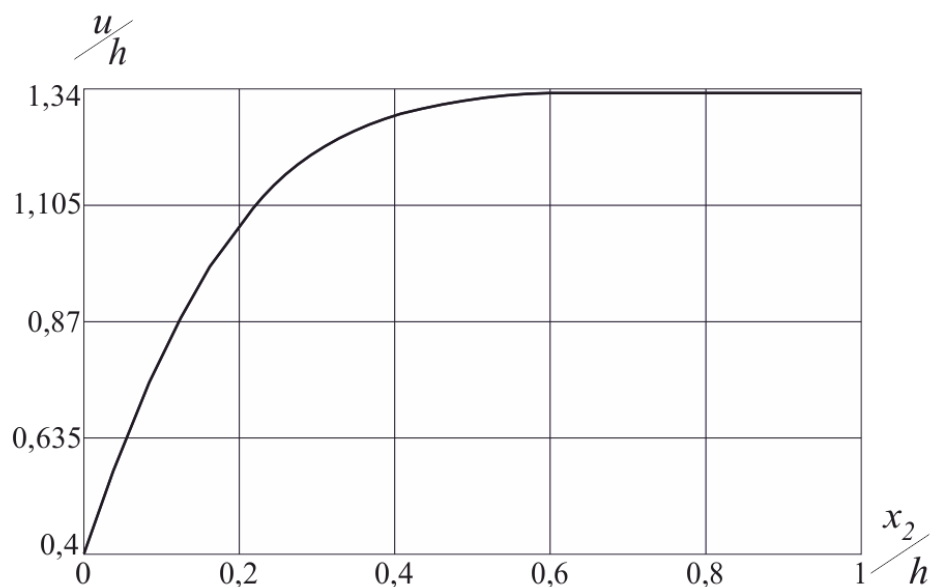


Рис. 4.33. Распределение перемещений в конечный момент времени $\tau = \tau_8$

На рисунке 4.31 показано распределение температуры в моменты времени $\tau = \tau_k$ и $\tau = \tau_{ohl}$ сплошной и штриховой линиями соответственно. Рисунки 4.32 и 4.33 иллюстрируют распределение пластических деформаций p_{12} и перемещений в конечный момент времени $\tau = \tau_8$.

Заключение

В настоящей диссертационной работе в рамках теории больших упругопластических деформаций, обобщенной на случай учета вязких свойств материала на стадии пластического течения, строятся решения ряда краевых задач.

- Во второй главе диссертации получены точные решения краевых задач теории больших упруговязкопластических деформаций о прямолинейных течениях несжимаемого упруговязкопластического материала в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями в случаях, когда одна из поверхностей (внутренняя или внешняя) движется. Движение материала, находящегося между поверхностями, связано с возможностью проскальзывания с сухим и вязким трением на внешней или внутренней поверхности или на обеих сразу. Рассмотрены все шесть постановочных возможностей: В первом случае движется внутренняя поверхность, на ней же выполняется условие проскальзывания, в то время как на внешней поверхности задано условие жесткой спайки. Во втором случае движется внешняя поверхность, на которой выполняется условие жесткой спайки, а на внутренней поверхности возможно проскальзывание материала. Третья и четвертая задачи – условие проскальзывания выполняется на внешней поверхности, а на внутренней задано условие жесткой спайки. В третьем случае движется внутренний цилиндр, а в четвертом – внешний. В последних двух вариантах – движется внутренняя или внешняя поверхность, проскальзывание возможно в окрестностях обеих граничных поверхностей. Рассмотрены упругое деформирование материала, развивающееся вязкопластическое течение при равноускоренном и равномерном движениях граничных поверхностей, торможение и процесс разгрузки при равнозамедленном движении поверхностей.

- Указаны условия зарождения и закономерности развития вязкопластических течений. Показано, что пластическое течение всегда начинается в окрестности внутреннего цилиндра, и области пластического течения развиваются одинаково, как при движении внутреннего цилиндра, так и при движении внешнего. Получены законы продвижения упругопластических границ, рассчитаны поля деформаций, напряжений, скоростей и перемещений, как в областях течения, так и в областях обратимого деформирования.
- В третьей главе получено решение краевой задачи термоупругопластичности о сползании тяжелого слоя с наклонной плоскости при его нагреве. Эффект сползания обусловлен развитием вязкопластического течения за счет зависимости предела текучести материала слоя от температуры. В рамках теории больших деформаций указана закономерность продвижения упругопластической границы, а также вычислены напряжения, деформации и скорости деформаций, как в области термоупругого деформирования, так и в области течения. Для численного решения уравнений теплопроводности использовалась конечно-разностная схема. С ее помощью удалось получить распределение температуры в области обратимого деформирования и области вязкопластического течения, а также получить закономерность изменения неизвестной заранее упругопластической границы. По найденным полям температуры рассчитаны деформации, скорости деформаций и перемещения точек слоя.
- В четвертой главе получено решение последовательности связанных задач термоупруговязкопластичности о развитии течения в слое материала, находящегося в условиях нарастающего чистого сдвига, когда неоднородность напряженного состояния слоя вызывается тепловыделением за счет трения о его граничную поверхность; о течении материала слоя при постоянной нагрузке, о торможении течения и его остановке при уменьшающейся нагрузке вплоть до полной разгрузки и охлаждении материала слоя до

комнатной температуры. В рамках теории больших деформаций указаны закономерности продвижения упругопластических границ, найдены напряжения, деформации и скорости деформаций. Поля температур, а также положения упругопластических границ получены с помощью конечно-разностных схем в области обратимого деформирования, области течения и области с не изменяющимися пластическими деформациями. По найденным полям температуры рассчитаны деформации, скорости деформаций и перемещения точек материала слоя.

- Для решения неизотермических задач были разработаны неявные конечно-разностные схемы для неравномерных сеток с неизвестными движущимися упругопластическими границами. Данные схемы позволяют получить распределение температуры в области течения, в области обратимого деформирования и в области разгрузки, а также положение неизвестной упругопластической границы на каждом шаге по времени. Сходимость конечно-разностных схем была проверена прогонами модели на сужающихся сетках.

Список литературы

1. Аннин Б.Д., Коробейников С.Н. Допустимые формы упругих законов деформирования в определяющих соотношениях упругопластичности // Сиб. журн. индустр. матем. – 1998. – Т 1, № 1. – С. 21–34.
2. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача. – Новосибирск: Наука. – 1983. – 240 с.
3. Астапов В.Ф. Математическое моделирование экспериментов по конечному деформированию // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды 8-й Научной межвузовской конференции. – Самара: Изд-во СамГТУ. – 1998. – С. 3–4.
4. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир. – 1978. – 309 с.
5. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. АН СССР. – 1996. – Т. 347, № 2. – С. 199–201.
6. Буренин А.А., Гончарова М.В., Ковтанюк Л.В. О пластическом течении материала около сферического концентратора напряжений при конечных обратимых и необратимых деформациях // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 4. – С. 150–156.
7. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Остаточные напряжения у цилиндрической полости в идеальной упругопластической среде // Проблемы механики неупругих деформаций. – Сборник статей, посвященный 70-летию Д.Д. Ивлева. – Москва: Физматлит. – 2001. – С. 74–94.
8. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Об упругих деформациях и вязкопластическом течении в тяжелом слое, помещенном на наклонной плоскости // Известия РАН. – МГТ. – 2010. – № 4. – С. 107–121.
9. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Упругие эффекты при интенсивном необратимом деформировании. – Владивосток: изд-во ДВГТУ (ДВФУ), 2011.

10. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Лушпей А.В. Переходный процесс торможения прямолинейного вязкопластического течения при мгновенном снятии нагружающих усилий // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73. – Вып. 3. – С. 494–500.
11. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мазелис А.Л. Продавливание упруговязкопластического материала между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями // Прикл. математика и механика. – 2006. – Т. 70. – Вып. 3. – С. 481 – 489.
12. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мазелис А.Л. Развитие и торможение прямолинейного осесимметричного вязкопластического течения и упругое последствие после его остановки // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51, № 2. – С. 140–147.
13. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мурашкин Е.В. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупруго-пластического материала // Прикл. механика и техн. физика. – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 110–119.
14. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. К моделированию больших упруговязкопластических деформаций с учетом теплофизических эффектов // Известия АН. Механика твердого тела. – 2010. – № 4. – С. 107–120.
15. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // ДАН. – 2000. – Т. 375, № 6. – С. 767–769.
16. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т. 67, вып. 2. – С. 316–325.
17. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Устинова А.С. Вискозиметрическое течение упруговязкопластического материала между жесткими коаксиаль-

- ными цилиндрическими поверхностями // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 18–25.
18. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Устинова А.С. Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // ПМТФ. – 2008. – Т. 49, № 2. – С. 143–151.
 19. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Устинова А.С. Вискозиметрическое течение упруговязкопластической среды, ослабленной слоем более податливого материала // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – Серия: Механика предельного состояния. – «Проблемы нелинейной механики и неупругого деформирования твердых тел». – 2010. – № 2(8). – С. 83–99.
 20. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Устинова А.С. Вискозиметрическое течение несжимаемого упруговязкопластического материала при наличии смазки на граничных поверхностях // Сиб. журн. индустр. математики. – 2012. – Т. 15, № 2(50). – С. 43–55.
 21. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука. – 1998. – 528 с.
 22. Быковцев Г.И., Семькина Т.Д. О вязкопластическом течении круглых пластин и оболочек вращения // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. – № 4. – С. 68–76.
 23. Быковцев Г.И., Чернышов А.Д. О вязкопластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления // ПМТФ. – 1964. – № 4. – С. 94–96.
 24. Быковцев Г.И., Шитиков А.В. Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 311, № 1. – С. 59–62.
 25. Васин Р.А., Моссаковский П.А. Теория упругопластических процессов при конечных деформациях: обобщение постулата изотропии // Совр. пробл. мех.: Тез. докл. Юбил. науч. конф., посвящ. 40-летию Ин-та мех. МГУ. – 1999. – С. 219–220.

26. Гатчек Э. Вязкость жидкостей. – М. – Л.: ОНТИ 1935. – 312 с.
27. Горелов В.И. Исследование влияний высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов // Прикл. механика и техн. физика. 1984. № 5. С. 157 – 158.
28. Горовой В.А., Асатурян А.Ш. Теория пластичности пористых сред с конечными деформациями // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1981. – № 5. – С. 39 – 42.
29. Знаменский В.А., Ивлев Д.Д. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. – ОТН. – Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 114 – 118.
30. Ивлев Д.Д. Об определении перемещений в задаче Л.А. Галина // Прикл. математика и механика. 1957. – Т. XXI, вып. 5.
31. Ивлев Д.Д. К определению перемещений в задаче Л.А. Галина // Прикл. математика и механика. – 1957. – Т. XXIII, вып. 5.
32. Ивлев Д.Д. Об определении перемещений в упругопластических задачах теории идеальной пластичности // В кн. Успехи механики деформируемых сред (к 100-летию со дня рождения академика Б.Г. Галеркина). – Москва. – 1975. – С. 236–240.
33. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. – М.: Наука. – 1966. – 232 с.
34. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. – М.: Наука. – 1971. – 232 с.
35. Ильюшин А.А. Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН УССР. – 1961. – С. 3–29.
36. Ильюшин А.А. О постулате пластичности // Прикл. математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 3. – С. 503–507.
37. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.; Л.: ГИТТЛ. – 1948. – 376 с.
38. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Изд-во АН СССР. – 1963. – 272 с.

39. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука. – 1970. – 280 с.
40. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука. – 1969. – 420 с.
41. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. – М.: Изд-во МГУ. – 1979. – 208 с.
42. Ключников В.Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория // Прикл. математика и механика. – 1959. – Т. 23, № 4. – С. 722–731.
43. Ключников В.Д. О допустимых формах соотношений пластичности // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 225, № 1. – С. 57–59.
44. Ковтанюк Л.В. Вязкопластическое течение в основании тяжелого растущего упруговязкопластического слоя на наклонной плоскости // Моделирование и механика. – Красноярск: изд. Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та, 2012. – С. 50–55.
45. Ковтанюк Л.В. Моделирование больших деформаций в неизотермическом случае // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т. 5, № 1. – С. 107–117.
46. Ковтанюк Л.В. О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу // ДАН. – 2005. – Т. 400, № 6. – С. 764–767.
47. Ковтанюк Л.В. О конечном продвижении упруговязкопластической пробки по цилиндрической трубе // Вестник Чувашского гос. Университета им. И.Я. Яковлева. Сборник, посвященный юбилею Ивлева Д.Д. – 2006. – № 1. – С. 68–75.
48. Ковтанюк Л.В., Мурашкин Е.В. Формирование полей остаточных напряжений у одиночных сферических включений в идеальной упругопластической среде // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 1. – С. 94–104.

49. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Влияние трения на прямолинейные осесимметрические течения. // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной конференции. – 22–24 июня, 2010 г. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского госуниверситета. – 2010. – С. 181–182.
50. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Вязкопластическое течение при нагреве упруговязкопластического плоского тяжелого слоя // Восемнадцатая Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам. – Алушта, 2013. – С. 379–380.
51. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Неизотермическое деформирование упруговязкопластического плоского тяжелого слоя // Сиб. журн. индустр. матем. – 2013. – 16:1. – С. 56–65.
52. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Упругие и теплофизические эффекты, сопровождающие антиплоское вязкопластическое течение // Механика сплошных сред как основа современных технологий // XVI Зимняя школа по механике сплошных сред, Пермь, 24–27 февраля 2009 г. – Тезисы докладов. – Изд-во ИМСС УрО РАН. – С. 194.
53. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Устинова А.С. Прямолинейные и вискозиметрические течения упруговязкопластических материалов и возможность учета в них теплофизических эффектов // Вестник Нижегородского университета. – 2011. – №4. – Часть 5. – С. 2244 – 2246.
54. Ковтанюк Л.В., Шитиков А.В. О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестник ДВО РАН. – 2006. – № 4. – С. 87–93.
55. Кондауров В.И. Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // Журн. прикл. механики и технической физики. – 1982. – № 4. – С. 133–139.

56. Кондауров В.И. Численный метод решения многомерных задач динамики неупругих тел с конечными деформациями: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – М. – 1974. – 13 с.
57. Кондауров В.И., Никитин Л.В. Распространение волн напряжений и некоторые дополнительные неравенства теории упруговязкопластических сред с конечными деформациями // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. – 1985. – № 1. – С. 128–133.
58. Коробейников С.Н. Модификация вариационного принципа Нила в теории конечных упруго-пластических деформаций // Динамика сплошной среды: Сб. Науч. Тр. / Ин-т гидродинамики. – АН СССР. – Сиб. отд-ние. – Новосибирск. – 1975. – Вып. 22. – С. 206–215.
59. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН. – 2000. – 262 с.
60. Кузнецова В.Г., Роговой А.А. Эффект учета слабой сжимаемости материала в упругих задачах с конечными деформациями // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 4. – С. 64–77.
61. Кукуджанов В.Н. Неустановившиеся задачи динамики упруго-пластических сред: Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. – М. – 1981. – 35 с.
62. Кукуджанов В.Н., Кондауров В.И. Численное решение неодномерных задач динамики твердого деформируемого тела // Проблемы динамики упруго-пластических сред. – М.: Мир. – 1975. – С. 38–84.
63. Куликов В.С., Мардимасова Т.Н. Моделирование процессов образования остаточных напряжений при сложном нагружении и упругопластической разгрузке // Вестник УГАТУ. – 2002. – Т. 3, № 2. – С. 99–109.
64. Левин В.А., Зингерман К.М. О построении эффективных определяющих соотношений для пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении // Докл. РАН. – 2002. – Т. 382, № 4. – С. 482–487.
65. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при

- высоком давлении. – Киев.: Наукова думка. – 1987. – 232 с.
66. Левитас В.И. К теории больших упругопластических деформаций // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1983. – № 11. – С. 48–53.
 67. Левитас В.И. О методе построения теории пластичности // Проблемы прочности. – 1980. – № 4. – С. 85–90.
 68. Левитас В.И. Определяющие уравнения в скоростях для изотропных и анизотропных упругопластических материалов при конечных деформациях // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1986. – № 6. – С. 35–38.
 69. Левитас В.И. Теория больших упругопластических деформаций при высоком давлении // Проблемы прочности. – 1986. – № 8. – С. 6–94.
 70. Левитас В.И., Идесман А.В., Шестаков С.И. Алгоритм решения контактных термоупругопластических задач // Вопросы прочности и пластичности металлов. – Минск: Наука и техника. – 1983. – С. 16.
 71. Левитас В.И., Шестаков С.И., Душинская Г.В. Исследование несущей способности элементов аппарата высокого давления цилиндрического типа // Физика и техника высоких давлений. – 1984. – № 15. – С. 43–46.
 72. Леманн Т. О теории неизотермических упругопластических и упруговязкопластических деформаций // Проблемы теории пластичности. – М.: Мир. – 1976. – С. 69–90.
 73. Ленский В.С. Гипотеза локальной определенности в теории пластичности // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Сер. Механика и машиностроение. – 1962. – № 5. – С. 154–158.
 74. Ленский В.С. Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах // Упругость и неупругость. – 1978. – Вып. 5. – С. 65–96.
 75. Лурье А.И. Дифференцирование по тензорному аргументу // В сб. Вопросы математической физики. – Л.: Наука. – 1976. – С. 48–57.
 76. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука. – 1980. – 512 с.

77. Маркин А.А. Термомеханика процессов конечного деформирования // 8 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. – Пермь: Изд-во Ин-та мех. сплош. сред УрО РАН. – 2001. – С. 418 – 419.
78. Маркин А.А., Оленич С.И. О связи между процессом внешнего нагружения и его образами в пространстве Ильюшина при конечных деформациях // Проблемы прочности. – 1999. – № 2. – С. 85–93.
79. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханические модели необратимого конечного деформирования анизотропных тел // Проблемы прочности. – 2002. – № 6. – С. 5–13.
80. Мосолов П.П., Мясников В.П. Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических сред. – М.: Изд-во МГУ. – 1971. – 163 с.
81. Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред. – М.: Наука. – 1981. – 208 с.
82. Мясников В.П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды // ПМТФ. – 1961. – № 2. – С. 79–86.
83. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. – 1996. – № 4. – С. 8–13.
84. Новиков Н.В., Левитас В.И. Моделирование термопластического течения материалов в аппаратах высокого давления // Вестн. АН УССР. – 1985. – № 8. – С. 7 – 17.
85. Новиков Н.В., Левитас В.И., Лещук А.А. Численное моделирование зон стабильности материалов в рабочем объеме АВД // Сверхтвердые материалы. – 1984. – № 4. – С. 3–8.
86. Новиков Н.В., Левитас В.И., Полотняк С.Б., Золотарев Р.А. Напряженно-деформированное состояние элементов АВД с алмазными наковальнями // Влияние высоких давлений на структуру и свойства сверхтвердых материалов. – Киев: ИСМ АН УССР. – 1985. – С. 65–70.

87. Новиков Н.В., Левитас В.И., Шестаков С.И. Исследование напряженного состояния силовых элементов аппаратов высокого давления // Проблемы прочности. – 1984. – № 11. – С. 43–48.
88. Новокшанов Р.С., Роговой А.А. О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 4. – С. 77–95.
89. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластических сред. – М: Изд-во Московского университета. – 1970. – 415 с.
90. Остапенко В.А. Варианты теории больших деформаций // Придніпр. наук. вісн. – 1996. – № 4. – С. 21.
91. Пальмов В.А., Штайн Е. Разложение конечной упругопластической деформации на упругую и пластическую составляющие // Мат. Моделиров. систем и процессов. – 2001. – № 9. – С. 109–126.
92. Панченко Г.Л. О прямолинейном течении в упруговязкопластическом цилиндрическом слое в условиях одностороннего прилипания // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4. – № 4. – С. 86–96.
93. Панченко Г.Л. Вязкопластическое течение среды, расположенной в зазоре между коаксиальными цилиндрическими поверхностями // XXXV Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова, 31 авг. – 5 сент. 2010 г., Владивосток: сб. докл. (Электронный ресурс). – Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2010. – С. 601–607.
94. Панченко Г.Л. Прямолинейное неизотермическое течение в цилиндрическом слое при условии одностороннего прилипания // Материалы XI Международного Форума студентов, аспирантов и молодых ученых стран Азиатско-Тихоокеанского региона. – Владивосток, май. – 2012.
95. Панченко Г.Л. Учет теплофизических эффектов при интенсивном необратимом деформировании материала // Материалы конференции-семинара «Актуальные направления в механике сплошных сред». 02–06

июля 2012. – Санкт-Петербург.

96. Панченко Г.Л., Ковтанюк Л.В. Развитие прямолинейного неизотермического вязкопластического течения. Молодежь и научно-технический прогресс: Материалы региональной научно-практической конференции, Владивосток, апрель – июль 2010, Издательство ДВГТУ, 2010. – Часть 2. – Секция 6: Фундаментальные механико-математические науки и их приложения. – С. 11–16.
97. Победря Б.Е. Понятие простого процесса при конечных деформациях // Прочность и пластичность. – М.: Наука. – 1971. – С. 129–135.
98. Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В. Остаточные напряжения: теория и приложения. – М.: Наука. – 1982. – 112 с.
99. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука. – 1986. – 232 с.
100. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. – М.: Изд-во иностр. лит. – 1963. – 312 с.
101. Прагер В. Конечные пластические деформации // Реология/ под ред. Эйриха. – М. Изд-во иностр. лит. – 1962. – С. 86–126.
102. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально пластических тел. – М.: Изд-во иностр. лит. – 398 с.
103. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. – М.: Мир. – 1968. – 176 с.
104. Пэжина П., Савчук А. Проблемы термопластичности // Проблемы теории пластичности и ползучести. – М.: Мир. – 1979. – С. 94–202.
105. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука. – 1979. – 744 с.
106. Работягов Д.Д. Механика материалов при больших деформациях. – Кишинев: Штиинца. – 1975. – 168 с.
107. Рейнер М. Реология. – М.: Наука, 1965. – 224 с.

108. Резунов А.В., Чернышев А.Д. Задача о чистом сдвиге вязкопластического материала между двумя цилиндрическими поверхностями // Механика деформируемого твердого тела. – Межвузовский сборник. – Куйбышев: Изд-во Волжская коммуна. – 1975. – С. 32–36.
109. Роговой А.А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // Прикл. мех. и техн. физ. – 2005. – Т. 46, № 5. – С. 138–149.
110. Роговой А.А. Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // Прикл. мех. и техн. физ. – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 144–152.
111. Роговой А.А. Кинематика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // Прикл. мех. и техн. физ. – 2008. – Т. 49, №1. – С. 165–172.
112. Роговой А.А. Кинематика и термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // «Физико-химическая кинетика в газовой динамике», 2008, № 7. – С. 20–28.
113. Роговой А.А. Конечные деформации со структурными изменениями // «Физико-химическая кинетика в газовой динамике», 2011, Т. 152, № 4. – С. 210–224.
114. Самарский А.А. Теория разностных схем. – 3-е изд., испр. – М.: Наука. – 1989. – 616 с.
115. Сапченко И.Г., Жилин С.Г., Комаров О.Н. Управление структурой и свойствами пористых комбинированных удаляемых моделей. Владивосток: Дальнаука. 2007. 138 с.
116. Сафрончик А.И. Неустановившееся течение вязко-пластичного материала в круглой трубе // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 1.
117. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. – М.: Физматгиз. – 1962. – 284 с.

118. Соколовский В.В. Теория пластичности. – М.: Высш. шк. – 1969. – 608 с.
119. Голоконников Л.А. Механика деформируемого твердого тела. – М.: высш. шк. – 1979. – 318 с.
120. Голоконников О.Л., Маркин А.А., Астапов В.Ф. Свойства материалов при конечном пластическом деформировании // Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии: тез. докл. – Киев. – 1984. – Ч. 2. – С. 57–58.
121. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. – М.: Мир, 1964. – 308 с.
122. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. – М.: Изд-во иностр. лит. – 1962. – 432 с.
123. Хаар А., Карман Т. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности. – М.: Изд-во иностр. лит. – 1948. – С. 41–56.
124. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: Мир. – 1956. – 407 с.
125. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механики сплошной среды. – М.: Мир. – 1966. – 135 с.
126. Чернышов А.Д. Модель термопластического тела при конечных деформациях // Изв. АН СССР. – Механика твердого тела. – 1980. – № 1. – С. 110–115.
127. Чернышов А.Д. Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 1. – С. 120–128.
128. Шевченко Ю.Н. Об определяющих уравнениях теории пластического течения при неизотермических процессах нагружения // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1978. – Вып. 18. – С. 17–23.
129. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагружениях. – Киев: Наук. Думка. – 1970. – 288 с.

130. Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г. Физические уравнения термовязкопластичности. – Киев: Наук. думка. – 1982. – 240 с.
131. Шевченко Ю.Н., Тормахов Н.Н. Постулат изотропии для конечных деформаций // Прикл. мех. (Киев). – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 14–27.
132. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Пискун В.В., Савченко В.Г. П Пространственные задачи термопластичности. Киев, Наук, думка, 1980. – 262 с.
133. Шевченко Ю.Н., Белевцова Н.Л., Савченко В.Г., Сахацкая И. К. Численные методы и ЭВМ в решении проблем термовязкопластичности. В кн.: III Республ. конф. "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе", Киев, 1982, 1с.
134. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г., Пискун В.В. Термоупругопластическое напряженное состояние тел вращения с учетом истории нагружения. В кн.: Нелинейные задачи строительной механики. Оптимизация конструкций. – Киев: Изд-во Киев, строит, ин-та, 1978, С. 3–7.
135. Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г., Баш В.Я., Захаров С.М. Проверка гипотез теории малых упругопластических деформаций при неизотермических процессах нагружения. Тепловые напряжения в элементах конструкций. – Киев: Наук.думка, вып.17, 1977. – С.25–29.
136. Шестериков С.А. К построению теории идеально пластического тела // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 3. – С. 412–415.
137. Шитиков А.В. О вариационном принципе построения уравнений упругопластичности при конечных деформациях // Прикл. математика и механика. – 1995. – Т. 59, № 1. – С. 158–161.
138. Шрамм Г. Основы практической реологии и реометрии / Пер. с англ. И.А. Лавыгина. – М.: КолосС, 2003. – 321 с.
139. Эглит М.Э. О тензорных характеристиках конечных деформаций // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 5. – С. 947–950.

140. Alturi N. On constitutive relations at the finite strain: hypoelasticity and elastoplasticity with isotropic or kinematic hardening // *Comput. Mech. and Eng.* – 1984. – 43, № 2. – P. 137–171.
141. Bazant Zdenek P. Finite strain generalisation of smallstrain constitutive relations for any finite strain tensor and additive volumetric-deviatoric split // *Int. J. Solids and Struct.* – 33, 20–22. – P. 2959–2968.
142. Bergander H. Finite plastic constitutive laws for finite deformations // *Acta mech.* – 1995. – 109, № 1–4. – P. 79–99.
143. Bertram A. Intrinsische Beschreibung finiter plastischer Deformationen // *Math. Forschungsinst., Oberwolfach*, 1994. – № 33. – P. 2.
144. Bertram A., Kraska M. Beschreibung finiter plastischer Deformationen von Einkristallen mittels materieller Isomorphismen // *Z. angew. Math. und Mech.* – 1995. – 75, Suppl. – № 1. – P. 179–180.
145. Bertram A., Kraska M. Description of the finite plastic deformations in single crystals by material isomorphism // *IUTAM Symp. Anisotropy. Inhomogen. and Non-linear. Solid Mech.*: 1995. – P. 77–90.
146. Bingham E.C. *Fluidity and plasticity* Mc. N.Y.: Crow-Hill. – 1922. – № 4. – P. 215–218.
147. Bruhns Otto.T. A consistent description of finite elastoplasticity // *20th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Chicago.* – 2000. – P. 31.
148. Burenin A.A., Kovtanyuk L.V. To the Construction of the Elastic-Plastic Medium Model under Finite deformations // *Mathematical Modelling and Cryptography. Pacific international conference. Vladivostok.* 1995. P. 25.
149. Clifton R.J. On the equivalence of $F^p \cdot F^e$ and $F^e \cdot F^p$ // *Trans. ASME.: J. Appl. Mech.* – 1972. – 39. – P. 287–289.
150. Dafalias Y.F. Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations // *Trans. ASME.: J. Appl. Mech.* – 1983. – 50, № 3. – P. 561–565.

151. Dafalias Y.F. The plastic spin concept and a simple illustration of its role in finite plastic transformations // *Mech. Mater.* – 1984. – 3, № 3. – P. 223–233.
152. Eve R.A., Reddy B.D. The variational formulation and solution of problems of finite-strain elastoplasticity based on the use of a dissipation function // *Int. J. Numer. Mech. Eng.* – 1994. – 37, № 10. – P. 1673–1695.
153. Freund L.B. Constitutive equations for elastic-plastic materials at finite strain // *Int. J. Solids and Struct.* – 1970. – 6, № 8. – P. 1193–1209.
154. Galishin A.Z., Merzlyakov V.A., Shevchenko YU.N. Application of the newton method for calculating the axisymmetric thermoelastoplastic state of flexible laminar branched shells using the shear model // *Mechanics of composite materials.* – 2001. – 37. – № 3. – P. 189–200.
155. Green A.E., Naghdi P.M. A general theory at an elastic-plastic continuum // *Arch. Ration Mech. and Anal.* – 1965. – 18, № 4. – P. 251–281.
156. Green A.E., Naghdi P.M. Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain // *Int. J. Eng. Sci.* – 1971. – 9, № 12. – P. 1219–1229.
157. Guo Z., Watanabe O. Effects of hypoelastic model and plastic hardening in numerical simulation. (Shear deformation of 2-dimensional plane block) // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A.* – 1993. – 59, № 562. – P. 1458–1466.
158. Hackenberg H. Large deformation finite element analysis with inelastic constitutive models including damage // *P. Comput. Mech.* – 1995. – 16, № 5. – P. 315–327.
159. Heng Xiao, Bruhns O.T., Meyers A. Elastoplasticity beyond small deformations // *Acta Mechanica.* 2006. 182. P. 31 – 111.
160. Heng Xiao, Bruhns O.T., Meyers A. Thermodynamic laws and consistent Eulerian formulation of finite elastoplasticity with thermal effects // *J. Mech. Phys. of solids.* 2007. 55. P. 338 – 365.
161. Hill R. On constitutive inequalities for simple materials // *J. Mech. and Phys. Solids.* – 1968. – 16, № 4. – P. 229–242.

162. Hill R. Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time // *J. Mech. and Phys. Solids.* – 1959. – № 3. – P. 75–93.
163. Hu Ping, Lian Jianshe, Li Junxing. Quasi-flow theory of elastic-plastic finite deformation // *Acta mech. sin.* – 1994. – 26, № 3. – P. 275–283.
164. Hu P., Lian J., Liu Y.Q., Li Y.X. A quasi-flow corner theory of elastic-plastic finite deformation // *Int. J. Solids and Struct.* – 1998. – 35, № 15. – P. 1827–1845.
165. Ibrahimbegovic A., Chorfi Lotfi. Covariant principal axis formulation of associated coupled thermoplasticity at finite strains its numerical implementation // *Int. J. Solids and Struct.* – 2002. – 39, № 2. – P. 499–528.
166. Kratochvil J. Finite-strain theory of inelastic behaviour of crystalline solids // *Foundations of plasticity* // Ed. A. Sawczuk.-Leiden: Noordhoff, 1973. – P. 401–415.
167. Le K.C., Stumpf H. Finite elastoplasticity with microstructure // *Mitt. Inst. Mech. Ruhr-Univ., Bochum.* – 1994. – № 92. – P. 1–77.
168. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // *Trans ASME: J. Appl. Mech.* – 1969. – 36, № 1. – P. 1–6.
169. Lee E.H., Mallett R.L. Stress analysis for anisotropic hardening in finite deformation plasticity // *Trans. ASME: J. Appl. Mech.* – 1983. – 50, № 3. – P. 554–560.
170. Lee E.H., McMeeking R.M. Concerning elastic and plastic components of deformation // *Int. J. Solids and Struct.* – 1980. – 16, № 8. – P. 715–721.
171. Levitas V.I. On the theory of large elastoplastic deformations // *Mitt. Inst. Mech. Ruhr.-Univ., Bochum,* 1994. – № 93. – P. 34–37.
172. Lions J.L., StamPacchia G. Variational inequalities // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1967. – V.20. – P. 493–519.
173. Lu S.C.H., Pister K.S. Decomposition of deformation and representation of the free energy function for isotropic thermoelastic solids // *Int. J. Solids and Struct.* – 1975. – 11, № 7–8. – P. 927–934.

174. Lubarda V.A. Simple shear of a strainhardening elasto-plastic hollow circular cylinder // *Int. J. Plasticity*. – 1988. – 4. – 934.
175. Lubarda V.A. Elastoplastic constitutive analysis with the yield surface in strain space // *J. Mech. and Phys. Solids*. – 1994. – 42, № 6. – P. 931–952.
176. Lubarda V.A., Benson D.J. On the partitioning of the rate of deformation gradient in phenomenological plasticity // *Int. J. Solids and struct.* – 2001. – 38, № 38 – 39. – P. 6805–6814.
177. Lubarda V.A., Lee E.H. A correct definition elastic and plastic deformation and its computational significance // *Trans. ASME: J. Appl. Mech.* – 1981. – 48, № 1. – P. 35–40.
178. Lubarda V.A., Shin C.F. Plastic spin and related issues in phenomenological plasticity // *Trans. ASME: J. Appl. Mech.* – 1994. – 61, № 3. – P. 524–529.
179. Mandel J. Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques // *Int. J. Solids and struct.* – 1973. – 9, № 6. – P. 725–740.
180. Merzlyakov V.A., Shevchenko YU.N. Nonaxisymmetric thermoviscoelastoplastic deformation of shells of revolution // *International Applied Mechanics*. – 2001. – 37. – № 12. – P. 1509–1538.
181. Miehe Christian. A constitutive frame of elastoplasticity at large strains based on the notion of a plastic metric // *Int. J. Solids and struct.* – 1998. – 35, № 30. – P. 3859–3897.
182. Naghdi P.M. Recent development in finite deformation plasticity // *Plasticity Today: Modeling, Methods and Applications: London*. – 1985. – P. 75–83.
183. Nemat-Nasser S. Decomposition of strain measures and their rates in finite deformation elastoplasticity // *Int. J. Solids and struct.* – 1979. – 15, № 2. – P. 155–166.
184. Nemat-Nasser S. Micromechanically Based Finite Plasticity // *Plasticity Today: Modeling, Methods and Applications: London*. – 1985. – P. 85–95.
185. Nemat-Nasser S. On finite deformation elasto-plasticity // *Int. J. Solids and struct.* – 1982. – 18, № 10. – P. 857–872.

186. Nicholson David W. Finite strain thermoplasticity theory with kinematic hardening // 4th Int. Conf. Constitut. Laws Eng. Mater., Troy, N. Y. – 1999. – P. 176–179.
187. Paglietti A. Universal deformations of thermoelastic-plastic materials // Arch. mech. stosow. – 1975. – 27, № 5/6. – P. 773–789.
188. Savchenko V.G., Shevchenko YU. N. Spatial thermoviscoplastic problems // International Applied Mechanics. – 2000. – 36. - № 11. – P. 1399–1433.
189. Shevchenko YU. N. Deformation theory of thermoviscoelastoplastic deformation of orthotropic bodies taking into account the loading history // Strength of materials. – 2000. – 32. – № 5. P. 454–461.
190. Shevchenko YU.N., Babeshko M.E. The thermoviscoelastoplastic state of shells of revolution under axisymmetric deformation along various flat paths // International Applied Mechanics. – 2001. – 37. – № 8. – P. 967–997.
191. Shevchenko YU.N., Terekhov R.G. Studying the laws of the thermoviscoplastic deformation of a solid under nonisothermal complex loading. Part 1 // International Applied Mechanics. – 2001. – 37. – № 3. – P. 287–316.
192. Shevchenko YU.N., Terekhov R.G. Studying the laws of the thermoviscoplastic deformation of a solid under nonisothermal complex loading. Part 2 // International Applied Mechanics. – 2001. – 37. – № 6. – P. 701–727.
193. Show M.C. Strain hardening of large plastic strain // Numer. Mech. Form. Processes. Swansea. – 1982. – P. 471–479.
194. Sidoroff F. Incremental constitutive equation for large strain elasto-plasticity // Int. J. Eng. Sci. – 1982. – 20, № 1. – P. 19–26.
195. Sidoroff F. The geometrical concept of intermediate configuration and elastic-plastic finite strain // Arch. Mech. Stosow. – 1973. – 25, № 2. – P. 299–308.
196. Sidoroff F., Dogui A. Some issues about anisotropic elastic-plastic models at finite strain // Int. J. Solids and Struct. – 2001. – 38, № 52. – P. 9569–9578.

197. Song Fan, Sun Yi, Wang Duo. A geometrical model for finite elastic-plastic deformation // *Lixue xuebao=Acta mech. sin.* – 1999. – 31, № 2. – P. 208–212.
198. Trusov P., Nyashin Y. On the constitutive Ilushin's theory relations for the case of large deformations. Pt.I. // *J. Theor. and Appl. Mech.* – 1992. – 23, № 3. – P. 65–74.
199. Trusov P., Nyashin Y. On the constitutive Ilushin's theory relations II // *J. Theor. and Appl. Mech.* – 1992. – 23, № 4. – P. 63–86.
200. Valanis K.C. A theory of viscoplasticity without a yield surface // *Arch. Mech. Stosow.* – 1971. – 23, № 4. – P. 517–551.