УДК 539.374

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

А. С. Бегун[1,2]

[1]*Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН*
[2]*Владивостокский государственный университет*

Аннотация. В рамках модели больших упругопластических деформаций рассматривается процесс деформирования несжимаемой пластины при возрастающем изгибающем моменте. Предполагается, что изгиб происходит в условиях плоской деформации. Считается, что каждая линия в поперечном сечении пластины переходит в соответствующую дугу окружности. Для описания недеформированного и деформированного состояний пластины используются декартова прямоугольная и цилиндрическая системы координат соответственно. Найдены условия начала пластического течения и закономерности его развития, рассчитаны поля напряжений и деформаций.
Ключевые слова: цилиндрический изгиб, большие деформации, упругопластический материал.

Введение

Изгиб упругопластической пластины представляет теоретический и практический интерес, поэтому рассматривался неоднократно [1-4 и др.]. Классические решения основаны на теории Кирхгофа-Лява и описывают поведение пластин при малых перемещениях и деформациях. Одного современные технологии требуют расчета, учитывающего большие деформации, как обратимые, так и необратимые. Решения для чисто упругого конечного изгиба в условиях плоского деформированного состояния представлены в [1-2]. В работе [3] получены решения для изгиба упругопластических пластин в рамках эйлеровой модели конечных деформаций, основанной на логарифмической скорости. В [4] представлен обзор решений для жесткопластических и упругопластических материалов при использовании лагранжевого подхода.

1. Модельные соотношения

Для описания процесса деформирования будем использовать модель больших деформаций [5]. В эйлеровой системе координат обратимые и необратимые деформации определяюся дифференциальными уравнениями переноса:

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik} e_{kj} - e_{ik} p_{kj} - p_{ik} e_{kj} + e_{ik} p_{ks} e_{sj},$$

$$\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2}\big((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik}) e_{kj} + e_{ik}(\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj})\big), \quad \frac{Dp_{ij}}{Dt} = \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik} p_{kj},$$

$$\frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik} n_{kj} + n_{ik} r_{kj}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right), \quad r_{ij} = w_{ij} + z_{ij}\left(e_{ij}, \varepsilon_{ij}\right), \quad w_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} - v_{j,i}\right),$$

где u_i и v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды, d_{ij}, e_{ij}, p_{ij} – компоненты тензоров полных, обратимых и пластических деформаций соответственно, r_{ij} – тензор вращений, ε_{ij} и γ_{ij} – компоненты скоростей полных и пластических деформаций.

Считаем, что напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями, и связаны зависимостями:

$$\sigma_{ij} = -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}),$$

$$W = (a-\mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - kJ_1J_2 - \chi J_1^3, \quad J_1 = s_{jj}, \quad J_2 = s_{ik}s_{kj}, \quad s_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj}$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, p_1 – добавочное гидростатическое давление, $W = W(e_{ij})$ – упругий потенциал (плотность распределения свободной энергии) , μ – модуль сдвига исследуемого материала, b, χ – упругие модули более высокого порядка.

Связь скоростей пластических деформаций ε_{ij}^p с напряжениями в условиях принимаемого принципа максимума Мизеса устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \qquad \lambda > 0.$$

В качестве условия пластичности используется условие

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k,$$

где σ_i, ε_k^p – главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, k – предел текучести.

2. Постановка задачи, основные кинематические соотношения.

Пусть недеформируемая прямоугольная пластина занимает область $-h/2 \le x_1 \le h/2$, $-l \le x_2 \le l$, $-b \le x_3 \le b$ (рис. 1). Считаем, что под действием приложенного изгибающего момента M пластина деформируется так, что плоскости $x_1 = const$, переходят в сектора цилиндрических поверхностей $r = const$, а плоскости $x_2 = const$ в плоскости $\theta = const$.

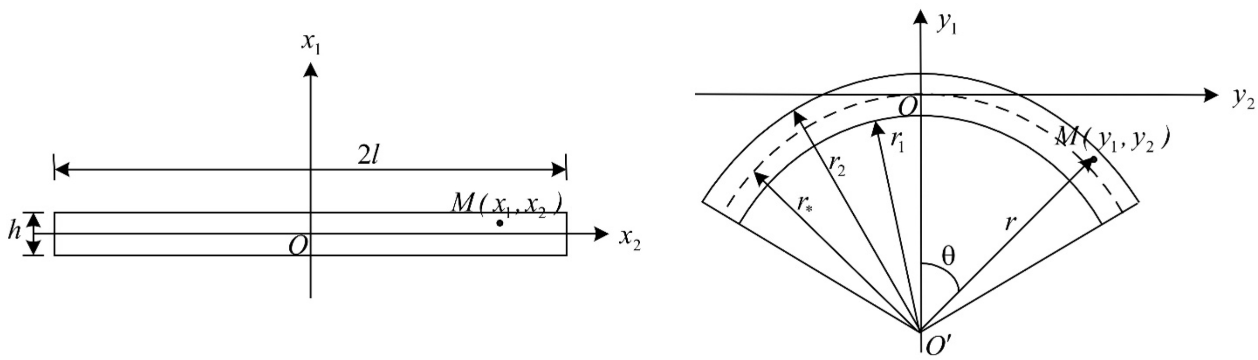

Рис.1. Недеформированное и деформированное состояние прямоугольной пластины при изгибе.

Начальные (x_1, x_2, x_3) и текущие (y_1, y_2, y_3) координаты связаны формулами:

$$y_1 = r(x_1)\cos\theta(x_2) - R^*, \quad y_2 = r(x_1)\sin\theta(x_2), \quad y_3 = x_3.$$

Используя условие несжимаемости найдем

$$r=\sqrt{R^2+2x_1r_*},\quad \theta=\frac{x_2}{r_*},\ r'=\frac{\partial r}{\partial x_1}=\frac{r_*}{r},\quad \theta'=\frac{\partial\theta}{\partial x_2}=\frac{1}{r_*}$$

Если $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ базисные вектора исходной декартовой ситемы координат, а $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e_z}$ – базисные вектора текущей цилиндрической ситемы координат, тогда для тензора градиента деформаций $\mathbf{F}$ и тензора деформаций Альманси $\mathbf{d}$ получим

$$\mathbf{F}=r'\mathbf{e_r}\otimes\mathbf{e_1}+r\theta'\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e_2},\quad \mathbf{d}=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{r}{r_*}\right)^2\right)\mathbf{e_r}\otimes\mathbf{e_r}+\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{r_*}{r}\right)^2\right)\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e}_\varphi.$$

Тензор градиента скоростей, тензор скоростей деформаций и тензор вращения определяются следующими равенствами

$$\mathbf{L}=\frac{\dot r'}{r'}\mathbf{e_r}\otimes\mathbf{e_r}-\dot\theta'\mathbf{e_r}\otimes\mathbf{e}_\varphi+\dot\theta'\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e_r}-\frac{\dot r'}{r'}\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e}_\varphi,\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\dot r'}{r'}\mathbf{e_r}\otimes\mathbf{e_r}-\frac{\dot r'}{r'}\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e}_\varphi,$$

$$\boldsymbol{\omega}=-\dot\theta'\mathbf{e_r}\otimes\mathbf{e}_\varphi+\dot\theta'\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e_r}.$$

3. Упругое деформирование

До достижения изгибающим моментом M значения M_0 вся пластина деформируется обратимо. Отличные от нуля компоненты тензора напряжения имеют вид

$$\sigma_{rr}=-p+a-\mu-(k+3\chi)(d_{rr}+d_{\varphi\varphi})-(k+3\chi)(d_{rr}^2+d_{\varphi\varphi}^2)+2\mu d_{rr}-2(k+2b+2a)d_{rr}^2,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=-p+a-\mu-(k+3\chi)(d_{rr}+d_{\varphi\varphi})-(k+3\chi)(d_{rr}^2+d_{\varphi\varphi}^2)+2\mu d_{\varphi\varphi}-2(k+2b+2a)d_{\varphi\varphi}^2,$$

$$\sigma_{zz}=-p+a-\mu+(2b-3\chi)(d_{rr}+d_{\varphi\varphi})-(k+3\chi)(d_{rr}^2+d_{\varphi\varphi}^2),$$

$$\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}=2\mu(d_{rr}-d_{\varphi\varphi})-2(k+2b+2a)(d_{rr}^2-d_{\varphi\varphi}^2).$$

Интегрируя уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}=\frac{\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{rr}}{r},\quad \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=0$$

и считая, что внутренняя и внешняя поверхности свободны от напряжений ($\sigma_{rr}(r_1)=\sigma_{rr}(r_2)$) найдем компоненты напряжений и изгибающий момент

$$\sigma_{rr}=\frac{\mu}{2}\left(\frac{r^2-r_1^2}{r_*^2}+r_*^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_1^2}\right)\right)-\frac{k+2b+2a}{2}\left(\frac{r^2-r_1^2}{r_*^2}+r_*^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_1^2}\right)-\frac{r^4-r_1^4}{4r_*^4}-\frac{r_*^4}{4}\left(\frac{1}{r^4}-\frac{1}{r_1^2}\right)\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{rr}+\mu\left(\frac{r^2}{r_*^2}-\frac{r_*^2}{r^2}\right)-\frac{k+2b+2a}{2}\left(2\frac{r^2}{r_*^2}-2\frac{r_*^2}{r^2}-\frac{r^4}{r_*^4}+\frac{r_*^4}{r^4}\right),\quad r_*^2=r_2r_1,$$

$$M=\int_{r_1}^{r_2}r\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{\mu}{2}\left(\frac{r_2^4-r_1^4}{4r_*^2}+r_*^2\ln\frac{r_2}{r_1}\right)-\frac{k+2b+2a}{4}\left(\frac{r_2^4-r_1^4}{2r_*^2}-2r_*^2\ln\frac{r_2}{r_1}-\frac{r_*^4}{2}\left(\frac{1}{r_2^2}-\frac{1}{r_1^2}\right)-\frac{r_2^6-r_1^6}{6r_*^4}\right).$$

Задавая изгибающий момент и используя соотношения $r_*^2=r_2r_1$, $r_2^2-r_1^2=2hr_*$ можно получить уравнение для определения положения нейтральной линии r_*. Далее находятся внутренняя r_1 и внешняя r_2 цилиндрические поверхности, деформации и напряжения.

Условие пластичности в рассматриваемом случае записывается в виде $|\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}|=2k$, Согласно выведенным соотношениям, напряженное состояние достигнет предела текучести одновременно на внутренней $r=r_1$ и внешней $r=r_2$ цилиндрической поверхности.

4. Пластическое течение

После того как изгибающий момент M достигнет значения M_0, в пластине будут упругая область $r_1^p \le r \le r_2^p$ и две пластические области $r_2^p \le r \le r_2$ и $r_1 \le r \le r_1^p$, развивающиеся от внешней и внутренней границы соответственно. В областях пластического течения найдем

$$r_1 \le r \le r_1^p:$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{rr}=-2k,\quad \sigma_{rr}=2k\ln\frac{r_1}{r},\ \sigma_{\varphi\varphi}=2k\left(\ln\frac{r_1}{r}-1\right);$$

$$r_2^p \le r \le r:$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{rr}=2k,\quad \sigma_{rr}=2k\ln\frac{r}{r_2},\ \sigma_{\varphi\varphi}=2k\left(\ln\frac{r}{r_2}-1\right).$$

В области обратимого деформирования $r_1^p \le r \le r_2^p$ имеем:

$$\sigma_{rr}=-\frac{k+2b+2a}{2}\left(\frac{r^2-r_1^{p\,2}}{r_*^2}+r_*^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_1^{p\,2}}\right)-\frac{r^4-r_1^{p\,2}}{4r_*^4}-\frac{r_*^4}{4}\left(\frac{1}{r^4}-\frac{1}{r_1^{p\,2}}\right)\right)+$$

$$+\frac{\mu}{2}\left(\frac{r^2-r_1^{p\,2}}{r_*^2}+r_*^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_1^{p\,2}}\right)\right)+2k\ln\frac{r_1}{r_1^{p\,2}},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{rr}+\mu\left(\frac{r^2}{r_*^2}-\frac{r_*^2}{r^2}\right)-\frac{k+2b+2a}{2}\left(2\frac{r^2}{r_*^2}-2\frac{r_*^2}{r^2}-\frac{r^4}{r_*^4}+\frac{r_*^4}{r^4}\right).$$

Используя предыдущие соотношения можно получить систему алгебраических уравнений для определения положения нейтральной линии r_*, внутренней r_1, внешней r_2 поверхностей и упругопластических границ r_1^p и r_2^p. Далее находим компоненты тензора напряжений и тензора деформаций Альманси. В упругой области $r_1^p \le r \le r_2^p$ для компонент обратимых деформаций справедливы формулы

$$e_{rr}=1-\sqrt{1-2d_{rr}}=1-\frac{r}{r_*},\qquad e_{\varphi\varphi}=1-\sqrt{1-2d_{\varphi\varphi}}=1-\frac{r_*}{r}.$$

В областях пластического течения обратимые деформации не изменяются и равны в каждой точке значению в тот момент времени, когда до нее дошла упругопластическая граница. Компоненты пластических деформаций через полные и обратимые деформации находятся по формулам

$$p_{rr}=\frac{1}{2}-\frac{1-2d_{rr}}{2(e_{rr}-1)^2},\qquad p_{\varphi\varphi}=\frac{1}{2}-\frac{1-2d_{\varphi\varphi}}{2(e_{\varphi\varphi}-1)^2}.$$

Заключение

В рамках модели больших упругопластических деформаций получено решение о цилиндрическом изгибе прямоугольной пластины. Найдены условия зарождения и продвижения упругопластических границ. Рассчитаны поля напряжений и полных, обратимых и необратимых деформаций. Представленное решение может в дальнейшем использоваться для задачи разгрузки пластины при постепенном уменьшении изгибающего момента.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы № FWFW-2021-0005).

Литература

1. Kassianidid F. On large bending deformations of transversely isotropic rectangular elastic blocks / F. Kassianidid, R. Ogden // Note di Matematica. - 2007. - Vol. 27, № 2. - P. 131-154.
2. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах / К. Ф. Черных. - Л. : Машиностроение, 1986. - 336 с.
3. Bruhns O. T. Bending of an elastoplastic strip with isotropic and kinematic hardening / O. T. Bruhns, N. K. Gupta, A. T. M. Meyers, H. Xiao // Archive of Applied Mechanics. - 2003. - Vol. 72. - P. 759-778.
4. Alexandrov S. Plastic Bending at Large Strain: A Review / S. Alexandrov, E. Lyamina, Y.-M. Hwang // Processes. - 2021. - Vol. 9, iss. 3. - Art. no. 406.
5. Буренин А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. - 1996. - Т. 347, № 2. - С. 199-201.

Информация об авторах

Бегун Александра Сергеевна – канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. лаборатории Механики необратимого деформирования Института автоматики и процессов управления ДВО РАН, доц., доцент кафедры Математики и моделирования Владивостокского государственного университета. E-mail: asustinova@mail.ru