

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ  
ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ  
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА  
И ПРОГРЕССИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
В МЕТАЛЛУРГИИ И МАШИНОСТРОЕНИИ**

Материалы VI Дальневосточной конференции  
с международным участием  
Комсомольск-на-Амуре, 5-7 октября 2022 г.

Комсомольск-на-Амуре  
2022

Российская академия наук  
Дальневосточное отделение

Хабаровский Федеральный исследовательский центр

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Комсомольский-на-Амуре государственный университет»

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ  
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА И ПРОГРЕССИВНЫЕ  
ТЕХНОЛОГИИ В МЕТАЛЛУРГИИ И МАШИНОСТРОЕНИИ**

Материалы VI Дальневосточной конференции  
с международным участием  
Комсомольск-на-Амуре, 5-7 октября 2022 г.

Комсомольск-на-Амуре  
2022

УДК 001  
ББК 95.4  
Ф947

*Рецензент* – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией вычислительной механики вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук И. И. Потапов

*Редакционная коллегия:*

А. И. Евстигнеев – доктор технических наук, профессор, отв. ред.;  
С. Г. Жилин – кандидат технических наук, доцент;  
О. Н. Комаров – кандидат технических наук, доцент;  
А. В. Ткачева – кандидат физико-математических наук,  
секретарь экспертной комиссии

**Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении** : материалы VI Дальневосточной конференции с международным участием, Комсомольск-на-Амуре, 5-7 октября 2022 г. / редкол. : А. И. Евстигнеев (отв. ред.) [и др.]. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВО «КНАГУ», 2022. – 232 с.

ISBN 978-5-7765-1473-9

В сборнике представлены материалы докладов по следующим направлениям: основы технологической механики, механика, машиностроение и машиноведение, информатика, вычислительная техника и управление, металлургия и материаловедение.

УДК 001  
ББК 95.4

ISBN 978-5-7765-1473-9

© ФГБОУ ВО «КНАГУ», 2022

## **Программный комитет:**

### **Председатели**

- акад. РАН, В.П. Матвеев (ИМСС УрО РАН, г. Пермь);
- акад. РАН, В.А. Левин (МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва).

### **Сопредседатели**

- акад. РАН, М.А. Гузев (ИПМ ДВО РАН, г. Владивосток);
- чл.-корр. РАН, Л.В. Ковтанюк (ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток).

### **Члены программного комитета:**

- акад. РАН, И.Г. Горячева (ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского, г. Москва);
- чл.-корр. РАН, А.К. Беляев (ИПММ, г. Санкт-Петербург);
- чл.-корр. РАН, Д.А. Индейцев (ИПМаш РАН, г. Санкт-Петербург);
- чл.-корр. РАН, Е.В. Ломакин (МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва);
- чл.-корр. РАН, А.М. Кривцов (СПбПУ Петра Великого, г. Санкт-Петербург);
- чл.-корр. РАН, А.А. Буренин (ИМиМ ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре);
- чл.-корр. РАН, С.И. Смагин (ВЦ ДВО РАН, г. Хабаровск);
- чл.-корр. РАН, Р.Р. Мулюков (ИПСМ РАН, г. Уфа);
- чл.-корр. РАН, В.М. Садовский (ИВМ СО РАН, г. Красноярск);
- профессор, д.н. Каримов Шоир Ахралович (ТТУ, г.Ташкент, Узбекистан);
- профессор, д.ф.-м.н. А.В. Чигарев (БГУ, г. Минск, Белоруссия);
- профессор Гуо Джин (Харбинский инженерный университет, г.Харбин, КНР);
- профессор Ли Сюевей (Институт материаловедения Хэйлунцзянского научно-технического университета, г.Харбин, КНР);
- профессор Джан Дан (Институт машиностроения Хэйлунцзянского научно-технического университета, г.Харбин, КНР);
- профессор, д.ф.-м.н. Г.В. Алексеев (ИПМ ДВО РАН, г. Владивосток);
- профессор, д.ф.-м.н. М.В. Шитикова (ВГТУ, г.Воронеж);
- профессор, д.т.н. А.Т. Беккер (ДВФУ, г. Владивосток);
- профессор, д.т.н. В.М. Козин (ИМиМ ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре);
- профессор, д.ф.-м.н. К.А.Чехонин (ВЦ ДВО РАН, г. Хабаровск);
- профессор, д.ф.-м.н. С.Н. Коробейников (ИГ им. М.А.Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск);
- профессор, д.ф.-м.н. А.Ф. Ревуженко (ИГД СО РАН, г. Новосибирск);
- профессор, д.ф.-м.н. В.П. Радченко (СамГТУ, г. Самара);
- профессор, д.ф.-м.н. А.А. Роговой (ПФИЦ УрО РАН, г. Пермь);
- профессор, д.т.н. Э.А. Дмитриев (КНАГТУ, г. Комсомольск-на-Амуре);
- д.ф.-м.н. Л.У. Султанов (КФУ, г. Казань);
- д.ф.-м.н. К.С. Бормотин (КНАГТУ, г. Комсомольск-на-Амуре).

## **Организационный комитет:**

### **Председатель:**

д.т.н., профессор А.И. Евстигнеев (г. Комсомольск-на-Амуре)

### **Секретарь:**

к.ф.-м.н. А.В. Ткачева (г. Комсомольск-на-Амуре)

### **Члены оргкомитета:**

- к.т.н. Е.Е. Абашкин (г. Комсомольск-на-Амуре);
- к.т.н., доцент С.Г. Жилин (г. Комсомольск-на-Амуре);
- к.т.н., доцент О.Н. Комаров (г. Комсомольск-на-Амуре);
- к.т.н. В.В. Предеин (г. Комсомольск-на-Амуре);
- к.т.н. А.Н. Прокудин (г. Комсомольск-на-Амуре);
- к.ф.-м.н. Г.М. Севастьянов (г. Комсомольск-на-Амуре).



## СОДЕРЖАНИЕ

<b>О.Н. Комаров, С.Г. Жилин</b> К 75-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ БУРЕНИНА АНАТОЛИЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА.....	9
<b>В.А. Рукавишников</b> ТЕЛО ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ.....	11
<b>В.А. Рукавишников, Е.И. Рукавишникова</b> СИСТЕМЫ ЛАМЕ В ОБЛАСТИ С ВХОДЯЩИМ УГЛОМ. ТЕЛО ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ.....	13
<b>А.А. Ярошенко, Ж.В. Маленко</b> ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ ОТ ДВИЖУЩЕЙСЯ ОБЛАСТИ ДАВЛЕНИЙ.....	15
<b>А.С. Рябокоть, О.П. Ткаченко</b> ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕДУЦИРОВАННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ТРУБ.....	17
<b>О.П. Ткаченко</b> ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПАРАМЕТРЫ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СЛОЖНОИЗОГНУТЫХ ТРУБОПРОВОДОВ... ..	19
<b>А.В. Чигарев, Ю.В. Чигарев</b> К ВЫБОРУ КРИТЕРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ.....	22
<b>С.Н. Коробейников, А.Ю. Ларичкин</b> ОБЪЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ МОДЕЛЕЙ ГИПОУПРУГОСТИ, ОСНОВАННЫХ НА КОРОТАЦИОННЫХ СКОРОСТЯХ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ.....	27
<b>А.Ю. Ларичкин, С.Н. Коробейников, В.Ю. Ульяницкий, Д.К. Рыбин</b> КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ, ПОЛУЧЕННОЙ В ПРОЦЕССЕ НАПЫЛЕНИЯ, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ГИПОУПРУГОСТИ.....	29
<b>П.С. Балагурин, А.В. Григорьева</b> ПРОГНОЗ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ПОКАЗАТЕЛЯ $\nu$ ....	31
<b>С.А. Баранникова, М.В. Надежкин, П.В. Исхакова</b> О СВЯЗИ АКУСТИЧЕСКИХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК В ПРОЦЕССЕ НАГРУЖЕНИЯ АУСТЕНИТНЫХ СТАЛЕЙ ПРИ ТЕМПЕРАТУРАХ $143 \text{ K} \leq T \leq 420 \text{ K}$ .....	<b>П.К.</b> 35
<b>Кабанова, А.Б. Фрейдин</b> ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЫ В УПРУГОМ ТЕЛЕ.....	<b>В.М.</b> 37
<b>Садовский, О.В. Садовская</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЕНЫ С УЧЕТОМ ПОВЫШЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ ПРИ СХЛОПЫВАНИИ ПОР.....	43
<b>А.С. Бегун, Л.В. Ковтанюк</b> РАЗОГРЕВ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ЕГО ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ.....	45
<b>Л.У. Султанов, А.М. Кадиров</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА.....	47

<b>И.С. Никитин, А.Д. Никитин, Б.А. Стратула</b> МУЛЬТИРЕЖИМНАЯ МОДЕЛЬ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ.....	49
<b>Y. Du, Y. Cai, X. Li (Ю. Ду, Ю. Кай, Х. Ли)</b> SURFACE HARDENING OF COCRNI MEDIUM ENTROPY ALLOY WITH A GRADIENT STRUCTURE BY FRICTION (ПОВЕРХНОСТНОЕ УПРОЧНЕНИЕ ТРЕНИЕМ СРЕДНЕЭНТРОПИЙНОГО СПЛАВА CoCrNi С ГРАДИЕНТНОЙ СТРУКТУРОЙ).....	51
<b>В.А. Худякова, С.Г. Жилин, О.Н. Комаров</b> ВОПРОСЫ УЛУЧШЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ИНТЕРМЕТАЛЛИДНЫХ СПЛАВОВ ТИПА Fe-Al.....	54
<b>А.А. Буренин, Л.В. Ковтанюк, Г.Л. Панченко</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЯЖЕЛОГО СЛОЯ, УДЕРЖИВАЕМОГО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТЬЮ.....	60
<b>Н.П. Великанова, П.Г. Великанов, Н.А. Протасова, А.А. Галимарданов</b> ОЦЕНКА ДОЛГОВЕЧНОСТИ РАБОЧИХ ЛОПАТОК И ДИСКОВ ТУРБИН ГАЗОГЕНЕРАТОРА НАЗЕМНОЙ ГТУ ДЛЯ ГПА НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПОДХОДА.....	62
<b>П.Г. Великанов</b> НЕПРЯМОЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН.....	64
<b>П.Г. Великанов</b> МЕТОД КОМПЕНСИРУЮЩИХ НАГРУЗОК ДЛЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ИЗГИБА АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН.....	66
<b>Е.Е. Абашкин</b> ТЕХНОЛОГИЯ СВАРКИ ЛИСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ ЗАСЫПКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ АЛЮМОТЕРМИТНОГО ПОРОШКА.....	68
<b>А.М. Сергеева, Н.С. Ловизин</b> ПОЛУЧЕНИЕ МЕТАЛЛОИЗДЕЛИЙ ИЗ ДЕФОРМИРУЕМЫХ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ, ПУТЕМ НЕПРЕРЫВНОГО ЛИТЬЯ В КРИСТАЛЛИЗАТОР С ПОДВИЖНЫМИ СТЕНКАМИ.....	70
<b>С.Г. Жилин, Н.А. Богданова</b> ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ПРЕССОВОК ИЗ ВОСКООБРАЗНЫХ МАТЕРИАЛОВ В ПОЛЕ ДЕЙСТВИЯ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ.....	74
<b>А.В. Ткачева</b> ВЛИЯНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ПЛОТНОСТИ, УДЕЛЬНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В СТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ (Ст40).....	76
<b>Н.А. Богданова, С.Г. Жилин, О.Н. Комаров</b> ПРИНЦИПЫ ФОРМИРОВАНИЯ БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ОТЛИВОК ПОВЫШЕННОЙ РАЗМЕРНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ.....	79
<b>С.В. Фирсов</b> СОВМЕСТНЫЙ УЧЁТ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ.....	81

<b>В.В. Предеин, О.Н. Комаров</b> РЕГУЛИРОВАНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АЛЮМОТЕРМИТНЫХ СПЛАВОВ ИЗМЕНЕНИЕМ НАЧАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ШИХТЫ И ФОРМЫ.....	84
<b>А.Н. Прокудин, С.В. Фирсов</b> УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ С ЖЁСТКИМ ПОКРЫТИЕМ НА ВНЕШНЕЙ И ВНУТРЕННЕЙ СТЕНКАХ ПРИ УСЛОВИИ ИШЛИНСКОГО-ИВЛЕВА.....	86
<b>И.Н. Захаров, В.П. Багмутов, Е.Г. Солодкова, В.Х. Лэ</b> КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РОГОВИЦЫ С КЕРАТОКОНУСОМ ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ В ХОДЕ ДИАГНОСТИКИ И ЛЕЧЕНИЯ.....	89
<b>В.П. Багмутов, И.Н. Захаров, М.Д. Романенко, В.В. Барин</b> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ И СВОЙСТВ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ ПРИ ПОВЕРХНОСТНОМ УПРОЧНЕНИИ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ.....	91
<b>Б.Р. Белан</b> МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ БУРОВОГО ВООРУЖЕНИЯ...	93
<b>В.М. Козин</b> ЗАВИСИМОСТЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ОТ ФОРМЫ НАГРУЗКИ.....	97
<b>П.Г. Великанов</b> МЕТОД КОМПЕНСИРУЮЩИХ НАГРУЗОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК.....	99
<b>Н.Я. Головина</b> СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ РЕСУРСА, ПОСТРОЕННЫХ НА РАЗНЫХ МОДЕЛЯХ МАТЕРИАЛА.....	101
<b>И.Э. Келлер, Д.Н. Трушников, А.В. Казанцев, Д.С. Дудин, Н.К. Салихова, Г.Л. Пермяков, А.А. Осколков</b> ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ, МИКРОСТРУКТУРА И ПРОЧНОСТЬ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА, ВЫРАЩЕННОГО ПРОВОЛОЧНО-ДУГОВОЙ НАПЛАВКОЙ С ПОСЛОЙНОЙ ПРОКОВКОЙ.....	106
<b>А.А. Роговой, О.С. Столбова</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ МИКРОСТРУКТУРЫ ФЕРРОСПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ.....	108
<b>Ю.Н. Радаев</b> ДВУХТОЧЕЧНЫЕ И ОДНОТОЧЕЧНЫЕ ТЕНЗОРЫ КОНЕЧНОГО ПОВОРОТА В ГЕОМЕТРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ.....	115
<b>Ю.Н. Радаев, Е.В. Мурашкин</b> ОБ ОДНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ В АНАЛИЗЕ ПСЕВДОТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ.....	122
<b>А.П. Господариков, М.А. Зацепин</b> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОРОДНОГО МАССИВА ПРИ СЕЙСМОАГРУЗКАХ.....	127

<b>А.Г. Князева</b> НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРИ ОСТЫВАНИИ СИНТЕЗИРОВАННОГО КОМПОЗИТА.....	135
<b>В.В. Назаров</b> ЧТО НОВОГО В ОБЛАСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ.....	141
<b>В.В. Назаров</b> ГИПОТЕЗЫ И ОГРАНИЧЕНИЯ ПО МОДЕЛИ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ОПИСАТЬ РАЗВИТИЕ ПОРИСТОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ, РАЗДУВАЕМОЙ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ ПРИ УСКОРЯЮЩЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ.....	143
<b>А.Д. Чернышов, В.В. Горяйнов</b> СРАВНЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕНИЯХ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ БРУСЕ ПРИ ПОСТАНОВКЕ РАЗЛИЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.....	145
<b>С.В. Каштанова, А.В. Ржонсницкий</b> К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ РАСТЯГИВАЕМОЙ ПЛАСТИНЫ СО ВСТАВКОЙ.....	155
<b>А.И. Веремейчик, М.В. Нерода, Б.Г. Холодарь</b> НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ОБРАЗЦОВ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЗОНАМИ ИЗМЕНЕННОЙ СТРУКТУРЫ ИСХОДНОГО МАТЕРИАЛА ПОСЛЕ ТЕРМООБРАБОТКИ.....	158
<b>А.В. Чигарев, Ю.А. Замжицкая-Чигарева</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УПРОЧНЕНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ НАНОСЛОИСТЫМИ МАТЕРИАЛАМИ РЕЖУЩИХ ИНСТРУМЕНТОВ.....	165
<b>Б.Д. Аннин, Н.И. Остросаблин, Р.И. Угрюмов</b> ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА О ЧИСТОМ СДВИГЕ В МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СО СТЕСНЁННЫМ ВРАЩЕНИЕМ.....	173
<b>Н.С. Бондаренко</b> ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СЛУЧАЕ ИЗГИБА ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ В РАМКАХ $\{1,0\}$ -АППРОКСИМАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ «ГИПОТЕТИЧЕСКОГО» МОДУЛЯ СДВИГА.....	179
<b>Д.А. Чернышов, А.В. Ковалев</b> ВЛИЯНИЕ ВЫБОРА ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ НА ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИЕ СПЛОШНОГО ШАРА СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ.....	186
<b>Ю.В. Немировский, С.В. Тихонов</b> НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНОГО КОМПОЗИТНОГО БЕТОННОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ.....	192
<b>И.К. Андрианов, С.И. Феоктистов</b> ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ СФЕРИЧЕСКОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЁТОМ СЖИМАЕМОСТИ И НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ.....	199
<b>С.И. Феоктистов, И.К. Андрианов</b> ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТРУБНЫХ ЗАГОТОВОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОСНАСТКИ....	204

<b>С.И. Феокистов, И.К. Андрианов, Лин Хтет</b> МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛА В ОБЛАСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ.....	210
<b>А.Н. Богданов</b> К УСТАНОВЛЕНИЮ ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ НЕКОТОРЫХ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ КОНФИГУРАЦИЙ.....	216
<b>А.Б. Фрейдин</b> СВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ФАЗОВЫХ И ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЙ.....	218
<b>Д.С. Лисовенко, В.А. Городцов</b> РАСТЯЖЕНИЕ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ, СОДЕРЖАЩИХ АУКСЕТИЧЕСКИЙ СЛОЙ.....	226
<b>Е.В. Мурашкин</b> КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НАРАЩИВАНИЯ 3D МАТЕРИАЛОВ В ТЕРМИНАХ ПСЕВДОТЕНЗОРОВ.....	228

**О.Н. Комаров<sup>1</sup>, С.Г. Жилин<sup>1</sup>**

**К 75-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ  
БУРЕНИНА АНАТОЛИЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА**

*<sup>1</sup>Институт машиноведения и металлургии  
Дальневосточного отделения РАН, Комсомольск-на-Амуре*

20 августа 2022 года известному советскому и российскому ученому, доктору физико-математических наук, профессору, члену-корреспонденту и эксперту Российской академии наук Буренину Анатолию Александровичу исполняется 75 лет со дня рождения. Буренин А.А. является одним из основоположников развития теории больших упругопластических деформаций на Дальнем Востоке. Его перу принадлежит более 200 работ в области механики деформируемых твердых тел, опубликованных в ведущих отечественных и зарубежных научных изданиях, среди которых: «Известия Российской академии наук. Механика твердого тела», «Mechanics of Solids», «Acta Mechanica», «Прикладная механика и техническая физика», «Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)», «Физика и механика материалов», «Доклады Академии наук», «Journal of Applied Mechanics and Technical Physics» и др.



На трудовой путь, посвященный служению науке, Анатолий Александрович вступил в 1970 году, получив диплом Воронежского государственного университета и оставшись там в качестве младшего научного сотрудника НИИ математики. После защиты кандидатской диссертации по теме «Некоторые динамические задачи теории упругости при плоской конечной деформации» и до 1987 года Буренин А.А. продолжал исследования в области решения задач о



распространении ударных волн в упругой среде при плоской конечной деформации, работая в Воронежском инженерно-строительном институте, где прошел путь от старшего преподавателя кафедры теоретической механики до заместителя декана автодорожного факультета.

В 1987 году по приглашению известного советского учёного-механика Быковцева Г.И. Анатолий Александрович перешел в лабораторию механики деформируемого тела при Тихоокеанском океанологическом институте ДВО АН СССР (позже при Институте автоматизации и процессов управления ДВО АН СССР), где также занимался изучением процессов механики деформируемых твердых тел.

После защиты в 1991 году докторской диссертации по теме «Динамика упругих сред при ударных воздействиях» Буренин А.А. заведовал базовой кафедрой математического моделирования и информатики Дальневосточного государственного технического университета при ИАПУ ДВО РАН.

В рамках созданной Бурениным А.А. математической модели в период с 1995 по 2008 годы впервые были получены решения краевых задач, указывающих реологические механизмы ответственные за изменение прочности металлоконструкций, реализованные в технологиях обработки металлов давлением и упрочнения металлоизделий. По результатам исследований, выполненных под руководством Буренина А.А. решены автомодельные задачи динамики ударного деформирования, а также предложены методы решений неавтомодельных задач.

В 2008 году Буренин А.А. был избран член-корреспондентом РАН по специальности «Механика», а в 2012 году избран директором Института машиноведения и металлургии ДВО РАН. Сегодня Анатолий Александрович руководит одним из научных направлений Института машиноведения и металлургии ДВО РАН «Развитие механики деформирования в качестве фундаментального основания совершенствования технологий изготовления и упрочнения металлоизделий», решая задачи, связанные с развитием таких направлений, как: математическое моделирование технологий производства изделий и элементов конструкций из специальных, в том числе труднодеформируемых материалов, допускающих большие деформации; а также температурных напряжений в условиях сборки упругопластических деталей.

Плодотворная творческая деятельность и научные заслуги Буренина А.А. были отмечены Почетной грамотой администрации Воронежского инженерно-строительного института (1975 г.); благодарностью Президиума ДВО РАН (1997, 2011 гг.) и РАН (1999 г.); Почетными грамотами администрации г. Владивостока (2001 г.) и Губернатора Приморского края (2007 г.) и т.д.

За период научной деятельности Бурениным А.А. подготовлено 26 кандидатов и 2 доктора наук, один из которых, в свою очередь, в 2019 г. также был избран членом-корреспондентом Российской академии наук.

Коллеги и ученики поздравляют Анатолия Александровича с 75-летним юбилеем и выражают искреннюю признательность его творчеству.

*\*Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН*

*\*\*Фото Буренина А.А. выполнено Фирсовым С.В.*

## ТЕЛО ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ

<sup>1</sup>Вычислительный центр Дальневосточного отделения РАН, Хабаровск

Численные методы для нахождения решения задач теории упругости с сингулярностью (режимы разрыва, скольжения) играют важную роль в механике разрушений. Для системы уравнений Ламе на невыпуклой ограниченной многоугольной области с условиями Дирихле решение задачи можно записать

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{j=0}^m r_j^{\frac{\pi}{\omega_j}} C_j \chi(r_j, \theta_j) \Psi_j(r_j) + \boldsymbol{\psi}(x), \quad \boldsymbol{\psi} \in W_2^2(\Omega). \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{u}(x) = (u_1, u_2)$ ,  $\chi(r_j, \theta_j) = (\chi_1, \chi_2)$ ,  $\boldsymbol{\psi}(x) = (\psi_1, \psi_2)$ ,  $C_j$  – коэффициент интенсивности напряжений (SIF),  $\chi_1, \chi_2$  – достаточно гладкие функции,  $\omega_j$  – входящий угол  $\pi \leq \omega_j \leq 2\pi$  в особенности  $p_j$ ,  $(r_j, \theta_j)$  – полярные координаты в точке  $p_j$  и  $\Psi_j(r_j)$  – отсекающая функция. Первое слагаемое (1) определяет сингулярную составляющую решения, второе – регулярную составляющую.

В [1] мы рассмотрели задачу о трещине. Мы предложили весовой метод конечных элементов (ВМКЭ) для нахождения приближенного решения задачи о трещине или системы Ламе в области с границей, содержащей угол  $2\pi$  в [1]. Метод опирается на введение  $R_\nu$ -обобщенного решения (см., например, [2-5]). Входящий угол  $2\pi$  не влияет на точность нахождения приближенного решения по ВМКЭ в отличие от классического МКЭ и метода со сгущением сетки. Скорость сходимости приближенного решения по ВМКЭ к точному решению есть  $O(h)$  в весовой норме пространства  $W_{2,\nu+\beta/2}^1(\Omega)$  и энергетической норме [1].

Определяющим фактором высокой точности ВМКЭ является правильный выбор параметров: -показателя степени весовой функции в  $R_\nu$ - обобщенном решении,  $\nu^*$ - показателя степени весовой функции в базисе метода конечных элементов (см., например, [6-8]) и величины  $\delta$  – радиуса окрестности, в которой весовая функция задается как расстояние до точки сингулярности при проведении расчетов. Прежде всего отметим, что функция  $\chi(r_0, \theta_0)$  остается неизменной для задач с различными исходными данными (коэффициентами и правыми частями уравнения и граничных условий). Фактически требуется определить SIF  $C_0$ . Оптимальные параметры  $\nu^*$  содержатся в интервале  $0,0.49$ ], подходящие параметры  $\nu$  находятся из полуинтервала, установленного в теореме существования и единственности  $R_\nu$ -обобщенного решения [5].

В этой работе определено тело оптимальных параметров (ТОП) для весового метода конечных элементов для задачи о трещине. Мы определили области параметров, при которых погрешность найденного приближенного решения по ВМКЭ в норме весового соболевского пространства отличается от наименьшей погрешности на величину не более чем на 5%, 10% и 15%. Отметим, что малому изменению входных параметров  $\nu, \nu^*, \delta$  соответствует малое изменение погрешности (рис.1). ТОП зависит от размерности сетки или шага сетки.

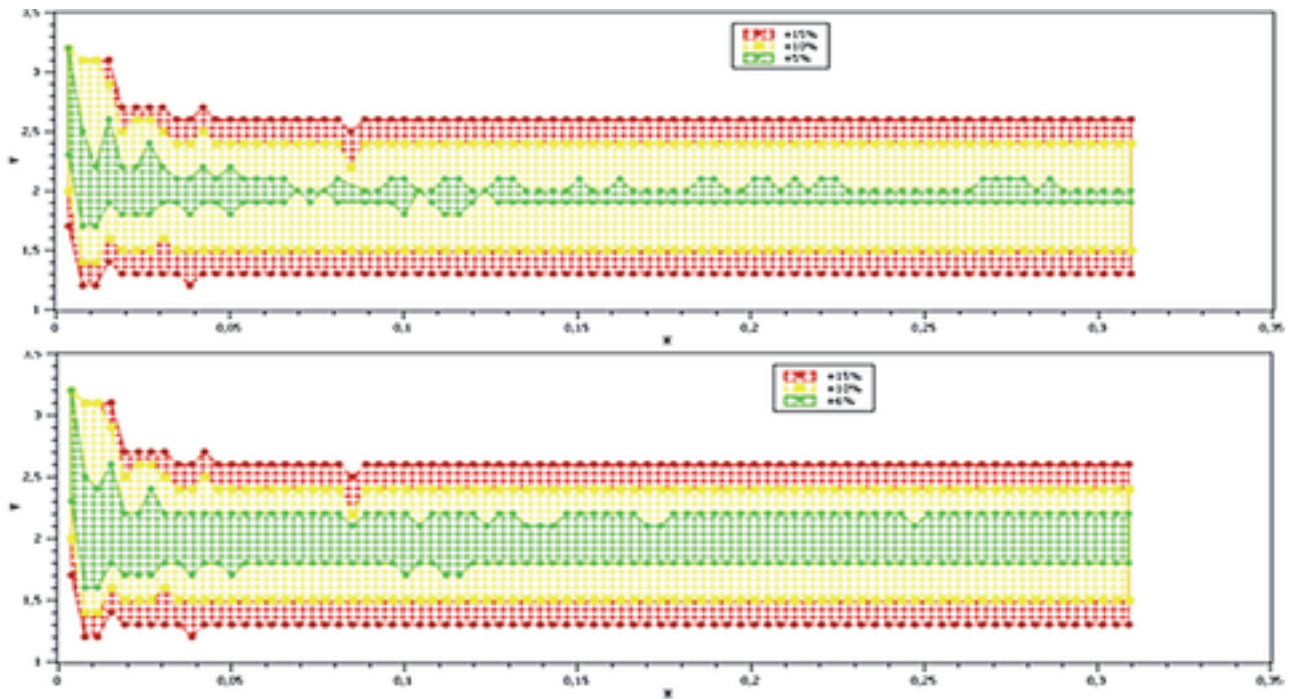


Рис. 1. Значения параметров, при которых отклонение погрешности от наилучшей погрешности не превосходит 5% и 6% на сетке с шагом  $h = 0.0038$

### Литература

1. Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O., Rukavishnikova E.I. Weighted finite element method for elasticity problem with a crack// Computers and Structures. 2021. Т. 243. С. 106400;
2. Rukavishnikov V.A. On differentiability properties of an  $R_V$ -generalized solution of the Dirichlet problem// Soviet Mathematics Doklady. 1990. Т. 40. № 3. С.653-655;
3. Rukavishnikov V.A. On the uniqueness of an  $R_V$ -generalized solution to boundary value problems with inconsistently degenerate initial data// Doklady Mathematics. 2001. Т. 63. № 1. С. 68-70;
4. Рукавишников, В.А. О существовании и единственности  $R_V$ -обобщенного решения для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // Доклады Академии наук. 2014. Т. 458, № 3. С. 261–263;
5. Рукавишников, В.А. Существование и единственность  $R_V$ -обобщенного решения задачи Дирихле для системы Ламе с угловой сингулярностью// Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, №6. С. 848–856;
6. Rukavishnikov V.A. Weighted fem for two-dimensional elasticity problem with corner singularity// Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 2016. Т. 112. С. 411-419;
7. Rukavishnikov V.A. Body of Optimal Parameters in the Weighted Finite Element Method for the Crack Problem// Journal of Applied and Computational Mechanics. 2021. Т.7. N 4. С. 2159-2170;
8. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Error estimate FEM for the Nikol'skij–Lizorkin problem with degeneracy// Journal of Computational and Applied Mathematics. 2022. Т. 403. С. 113841.

## СИСТЕМЫ ЛАМЕ В ОБЛАСТИ С ВХОДЯЩИМ УГЛОМ. ТЕЛО ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

*Вычислительный центр Дальневосточного отделения РАН, Хабаровск*

Решение краевой задачи в двумерной области  $\Omega$  с границей, содержащей входящий угол не принадлежит пространству Соболева  $W_2^2(\Omega)$ . По принципу согласованных оценок классический метод конечных элементов не может иметь высокую скорость сходимости для таких задач. Мы разработали весовой метод конечных элементов (ВМКЭ), который позволяет находить приближенное решение краевой задачи с сингулярностью с высокой точностью не зависимо от размеров входящего угла. Нахождение оптимальных параметров для ВМКЭ является основой для успешного использования этого метода. В этой статье изучена задача определения тела оптимальных параметров (ТОП) для системы Ламе в области с границей, содержащей входящие углы от  $\pi$  до  $2\pi$ . Установлен набор ТОП, зависящий от размерности квазиравномерной сетки и независящий от величины входящего угла на границе.

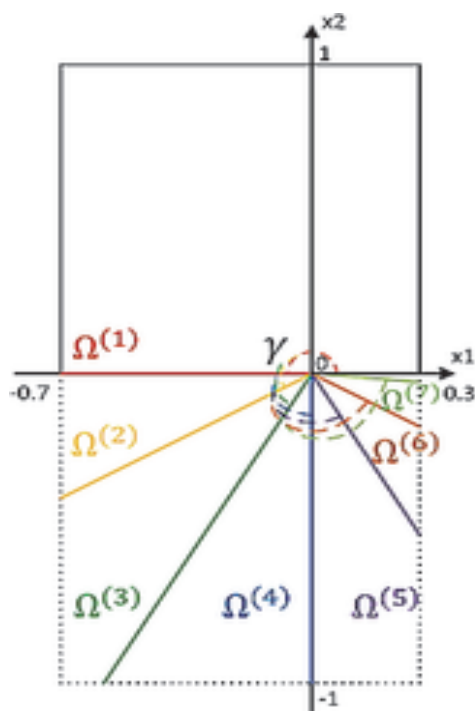


Рис. 1. Области  $\Omega^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, 7$

Для системы Ламе в многоугольнике  $\Omega^{(i)}$  с одним входящим углом  $\gamma$  на квазиравномерной сетке построен ВМКЭ (см. [1]) для нахождения  $R_\nu$ -обобщенного решения [2-5]. Приближенное  $R_\nu$ -обобщенное решение по весовому методу конечных элементов вычисляется с наименьшей погрешностью при правильном выборе параметров  $\nu, \nu^*, \delta$ . В настоящее время не существует теоретического метода для определения оптимальных параметров, поэтому мы определяли эти параметры экспериментально для различных углов  $\omega$  ( $\pi \leq \omega \leq 2\pi$ ) и сеток различной размерности.

Для серии типовых модельных задач  $(A_i^j)$  с решением содержащем сингулярную и регулярную составляющие или только сингулярную часть в областях  $\Omega^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) находилось приближенное решение по ВМКЭ (см. [6-8]) на сетках с шагом  $h = 0.062, 0.031, 0.015, 0.0077, 0.0038, 0.0019$ .

Для серии типовых модельных задач  $(A_i^j)$  с решением содержащем сингулярную и регулярную составляющие или только сингулярную часть в областях  $\Omega^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) находилось приближенное решение по ВМКЭ (см. [6-8]) на сетках с шагом  $h = 0.062, 0.031, 0.015, 0.0077, 0.0038, 0.0019$ . Для каждой задачи

$(A_i^j)$  и на сетке с фиксированным шагом определялись три параметра  $\nu, \nu^*, \delta$  при которых относительная погрешность в норме весового пространства Соболева была наименьшей. Формировались множества параметров  $T_1^{(A_i^j)}, T_2^{(A_i^j)}, T_3^{(A_i^j)}$  при которых относительная погрешность отличалась от наилучшей погрешности не более чем на 5% (6.5%), 10% и 15%. Для каждой сетки фиксированной размерности определялось тело оптимальных параметров  $T_k = \bigcap_j \bigcap_{i=1}^7 T_j^i, k = 1, 2, 3$ . Дополнительно определялось ТОП, при котором отклонение относительной погрешности от наилучшей погрешности не превышает 5%, 5.5%, and 6%. В этих случаях ТОП отличаются незначительно, что свидетельствует об устойчивости процесса выбора параметров.

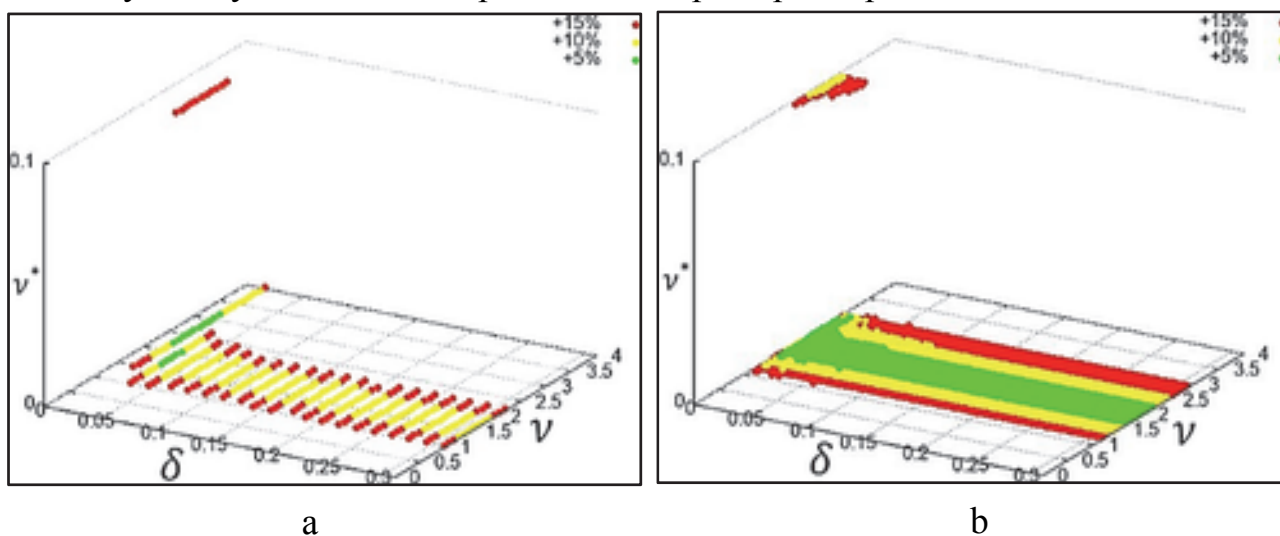


Рис. 2. ТОП для сетки с  $h = 0.015$  (a) и  $h = 0.0038$  (b) для всех областей  $\Omega^{(i)}, i = 1, \dots, 7$

### Литература

1. Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O., Rukavishnikova E.I. Weighted finite element method for elasticity problem with a crack// Computers and Structures. 2021. Т. 243. С. 106400;
2. Rukavishnikov V.A. On differentiability properties of an  $R_\nu$ -generalized solution of the Dirichlet problem// Soviet Mathematics Doklady. 1990. Т. 40. № 3. С. 653-655;
3. Rukavishnikov V.A. On the uniqueness of an  $R_\nu$ -generalized solution to boundary value problems with inconsistently degenerate initial data// Doklady Mathematics. 2001. Т. 63. № 1. С. 68-70;
4. Рукавишников, В.А. О существовании и единственности  $R_\nu$ -обобщенного решения для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // Доклады Академии наук. 2014. Т. 458, № 3. С. 261–263;
5. Рукавишников, В.А. Существование и единственность  $R_\nu$ -обобщенного решения задачи Дирихле для системы Ламе с угловой сингулярностью// Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, №6. С. 848–856;

6. Rukavishnikov V.A. Weighted fem for two-dimensional elasticity problem with corner singularity// Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 2016. Т. 112. С. 411-419;

7. Rukavishnikov V.A. Body of Optimal Parameters in the Weighted Finite Element Method for the Crack Problem// Journal of Applied and Computational Mechanics. 2021. Т.7. N 4. С. 2159-2170;

8. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Error estimate FEM for the Nikol'skij-Lizorkin problem with degeneracy// Journal of Computational and Applied Mathematics. 2022. Т. 403. С. 113841.

**А.А. Ярошенко<sup>1,2</sup>, Ж.В. Маленко<sup>1,2</sup>**

## **ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ ОТ ДВИЖУЩЕЙСЯ ОБЛАСТИ ДАВЛЕНИЙ**

<sup>1</sup>Филиал «ГМУ им. адмирала Ф.Ф. Ушакова» в г. Севастополь,

<sup>2</sup>Севастопольский государственный университет, Севастополь

В зимнее время ледяной покров в районах Крайнего Севера и Дальнего востока используется для доставки по нему грузов. При решении технических задач ледяной покров моделируется упругой пластиной, плавающей на поверхности жидкости [4, 5]. Ледяной покров вносит значительные изменения в характер поверхностного волнового движения. При движении по ледяному покрову нагрузки образуются изгибно-гравитационные волны, которые являются комбинацией изгибной волны в ледяной пластине и гравитационных волн в жидкости [1].

В линейной постановке исследуются трехмерные изгибно-гравитационные волны в плавающей ледяной пластине при движении по ней области давлений.

Исследовано влияние скорости перемещения нагрузки на характер изгибно-гравитационных волн. Существует три значения критических скоростей, при которых меняется характер волнового движения [1, 3].

При скоростях движения нагрузки  $0 < v < v_0$  волн с амплитудой затухания как  $R^{1/2}$  не образуется.

Если скорость движения нагрузки  $v_0 < v < v_1$ , то образуется одна система волн  $\zeta_3$ , затухающая с расстоянием как  $R^{1/2}$ . Эти волны распространяются как впереди нагрузки, так и за ней. Волны, бегущие впереди источника возмущений, короче волн, распространяющихся за источником.

Если источник возмущений перемещается со скоростью  $v_1 < v < (gH)^{1/2}$ , то образуется три системы волн  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ . Волны  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  распространяются за источником и носят характер поперечной и продольной корабельных волн, деформированных за счет упругих и массовых сил ледяной пластинки. Волны  $\zeta_3$  – упругие волны, обусловленные наличием пластины.



При  $v > (gH)^{1/2}$  образуется две системы волн  $\zeta_2, \zeta_3$ . Волны  $\zeta_2$  – продольные волны, а  $\zeta_3$  – упругие волны, которые при отсутствии пластинки не образуются.

Здесь  $v_0$  – минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационной волны [2, 4],  $v_1$  – скорость, при которой совпадают фазовые скорости изгибной, гравитационной и изгибно-гравитационных волн,  $(gH)^{1/2}$  – максимальное значение фазовой скорости гравитационной волны.

Изучена зависимость критических скоростей  $v_0$  и  $v_1$  от сил сжатия и растяжения и толщины пластины. Определены угловые зоны распространения волн. Исследовано влияние скорости перемещения нагрузки, сжимающих и растягивающих усилий на изменение угловых зон распространения волн.

Исследованы амплитуды изгибно-гравитационных волн. Изучено влияние скорости перемещения нагрузки, толщины пластины, сил сжатия и растяжения на амплитуды образующихся волн.

На рис.1 представлена амплитуда изгибно-гравитационной волны  $\zeta_3$  для скорости перемещения нагрузки близкой к критической скорости  $v_0$  (рис. 1а) и критической скорости  $v_1$  (рис. 1б), при отсутствии сжимающих усилий.

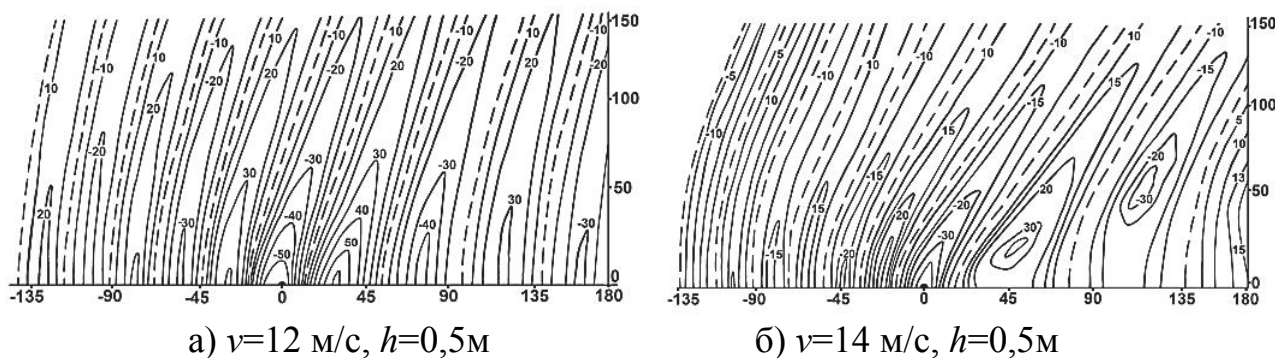


Рис. 1. Амплитуда изгибно-гравитационной волны  $\zeta_3$  для  $v_0 < v < v_1$

Амплитуда упругой волны  $\zeta_3$ , распространяющейся впереди источника, меньше амплитуды волны, бегущей за источником. Максимальное значение амплитуды при скорости движения нагрузки близкой к  $v_0$  находится по трассе движения источника (рис. 1а). При дальнейшем увеличении скорости движения максимум амплитуды смещается от трассы движения (рис. 2б). При  $v_1 < v < (gH)^{1/2}$  генерируется три волны, а при  $v > (gH)^{1/2}$  две. Амплитуда поперечной волны  $\zeta_1$  меньше амплитуд продольной  $\zeta_2$  и изгибной  $\zeta_3$  волн.

Увеличение сжимающего усилия приводит к увеличению амплитуды упругой волны  $\zeta_3$ . При увеличении толщины ледяного покрова амплитуда упругой волны уменьшается. На амплитуды продольной  $\zeta_2$  и поперечной  $\zeta_1$  волн увеличение толщины ледяного покрова и сжимающего усилия существенного влияния не оказывают.

### Литература

1. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с;

2. Козин В.М. Способы определения критических скоростей нагрузок, движущихся в условиях сплошного ледяного покрова (обзор). // Вестник инженерной школы ДВФУ. 2019. №2(39). С. 30-38;

3. Маленко Ж.В., Ярошенко А.А. Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений // Морские интеллектуальные технологии 2021. Т. 4. №2. С. 157-161;

4. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215с.;

5. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. Moving Loads on Ice Plates. Springer Science & Business Media, 2012. 236 p.

**А.С. Рябоконт<sup>1</sup>, О.П. Ткаченко<sup>1</sup>**

## **ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕДУЦИРОВАННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ТРУБ**

*<sup>1</sup>Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровск*

Высокие значения напряжений в области стыка труб могут стать причиной деформации и, как следствие, разрыва трубопровода. Существование данной проблемы показано во многих как теоретических, так и экспериментальных работах [1, 2]. Степень концентрации напряжений характеризуется так называемым коэффициентом концентрации, который используется в расчетах на прочность. Исследование коэффициентов концентрации напряжений в трубных соединениях, полученных из эксперимента, выполнено в работе [3]. Решение задачи с помощью рядов Фурье для двух пересекающихся цилиндров при отношении диаметров оболочек, не превышающих 0.8, найдено в [1].

В данной работе рассматривается круговая цилиндрическая оболочка с ответвлением. Для такой механической системы ранее были выведены редуцированные уравнения [4], которые получены из уравнений для безмоментной оболочки [5] в перемещениях путем перехода из цилиндрической системы координат в декартову и проецированием задачи на плоскость симметрии. При этом было сделано предположение о малости ответвления по сравнению с основной трубой. Поставлены краевые условия на концах труб. Условия сопряжения частично заменены условиями втулочной связи. Прделанные преобразования не только уменьшили размерность задачи, но и позволили разделить ее на две подзадачи определенные на прямоугольных областях.

Численное решение задачи для малого прямоугольника, соответствующего проекции ответвления на плоскость симметрии, получено в пакете MATLAB с помощью функции решателя *solvpde*. Для этого редуцированные уравнения преобразованы к специальному виду. Задано точное решение, удовлетворяющее краевым условиям, и получены правые части системы уравнений. Средствами пакета сгенерирована сетка с максимальным шагом 0.0016 и числом узлов равным 6 923. Найдены приближенные значения функций перемещений в

декартовых координатах, представленные на рис. 1. Далее выполнен обратный переход к цилиндрическим координатам и вычислены нормальные и касательные напряжения.

Выполнено сравнение полученных результатов с заданным точным решением и определены значения относительной погрешности, которые для перемещений, и составили 6.2%, 24.5% и 4.6% соответственно. Отмечено наличие сингулярности решения для перемещения, что в свою очередь требует применения специальных методов решения, например [6, 7].

Трехмерная модель трубы с вырезом построена и исследована во FreeCAD методом конечных элементов. Средствами пакета сгенерирована сетка, содержащая 9 454 узла. Задача рассчитана при том же значении давления, что и для малой трубы. Найдены максимальные значения напряжений по Мизесу.

Распределение напряжений показало быстро растущие напряжения в окрестности выреза. Полученные результаты согласуются с известными в литературе [8].

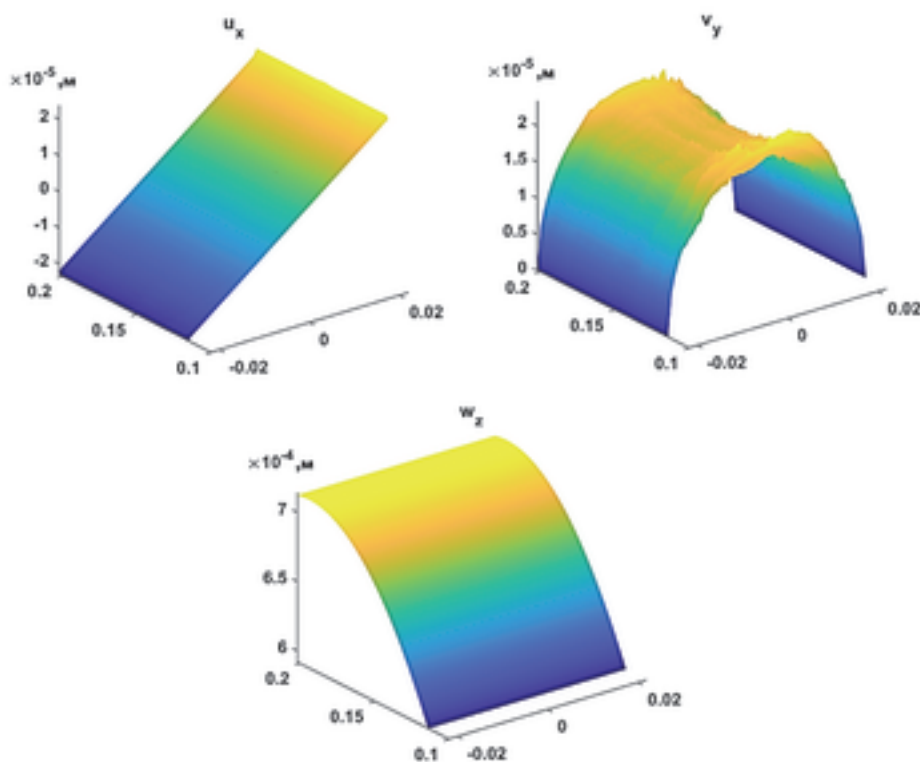


Рис. 1. Приближенное решение  $u_x$ ,  $v_y$  и  $w_z$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00039, <https://rscf.ru/project/21-11-00039/>.*

#### Литература

1. Xue M.D., Li D.F., Hwang K.C. / Theoretical stress analysis of intersecting cylindrical shells subjected to external loads transmitted through branch pipes // International Journal of Solids and Structures, 2005, 42 (11-12), pp. 3299-3319;
2. Petrovic A.L., Balac M.M., Jovovic A., Dedic A. / Oblique nozzle loaded by the torque moment—stress state in the cylindrical shells on the pressure vessel // Proceedings of

the Institution of Mechanical Engineers Part C-Journal of Mechanical Engineering Science, 2012, 226 (C3), pp. 567-575;

3. Atteya M., Mikkelsen O., Wintle J., Ersdal G. / Experimental and numerical study of the elastic SCF of tubular joints // Materials, 2021, 14, pp. 4220;

4. Ryabokon A.S., Tkachenko O.P., Rukavishnikov V.A. / Two-dimensional mathematical model of pipelines with a complex intersected profile // CEUR Workshop Proceedings, 2021, 2930, pp. 200-205;

5. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек – СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2010. – 380 с.;

6. Рукавишников В.А., Николаев С.Г. / Об  $R_r$ -обобщенном решении системы Ламе с угловой сингулярностью // ДАН, 2015, 463(2), С. 137-139;

7. Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O., Rukavishnikova E.I. / Weighted finite element method for elasticity problem with a crack // Computers and Structures, 2021, 243, pp. 106400;

8. Mehbub J.F., Patel B.C., Jamnu M.A., Mistry, R.A. / Stress analysis of different reinforcement PAD for nozzle opening in pressure vessel // International Journal For Science Technology And Engineering, 2016, 2, pp. 354-360.

**О.П. Ткаченко<sup>1</sup>**

## **ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПАРАМЕТРЫ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СЛОЖНОИЗОГНУТЫХ ТРУБОПРОВОДОВ**

<sup>1</sup>*Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровск*

Условия работы современных подземных и подводных трубопроводов регулярно приводят к смещению труб из их проектного положения [1]. Землетрясения являются одной из опасных причин сдвига трубопровода [2], как и его собственная неустойчивость [3].

Нами разработаны математические модели деформирования трубопроводов как в рамках теории стержней [4], так и теории оболочек [5]. Была предложена математическая модель криволинейного участка трубопровода, рассматриваемого как моментная оболочка, нагруженная внутренним потоком жидкости с перепадом давления. Установлены геометрические ограничения на допустимые смещения трубопровода, при которых возможно применение предложенной модели. Из трехмерной начально-краевой задачи, описывающей напряженно-деформированное состояние трубы, выведены уравнения равновесия трубы как оболочки. Выполнен асимптотический анализ уравнений динамики оболочки, на основе этого анализа создан алгоритм редукции этих уравнений к одномерной постановке задачи. Построена цепочка приближенных постановок задач, аппроксимирующих решения уравнений математической модели с различной точностью.

Здесь приведены основные формулировки созданных моделей. Введены характерные безразмерные параметры для разграничения областей применимости этих моделей. Выполнены численные эксперименты, в которых установлены границы применимости построенных математических моделей.

В основу комплекса математических моделей положены соотношения В.З. Власова для технической оболочки [6]:

$$\frac{h}{R_0} \leq 0.1, \quad \frac{\min\left(L, \frac{1}{\kappa_0}\right)}{R_0} \geq 4, \quad (1)$$

где  $h$  - толщина стенки,  $L$  - длина,  $R_0$  - радиус поперечного сечения,  $\kappa_0$  - кривизна осевой линии трубы. Криволинейная система координат  $(s, \theta, R)$  (в безразмерном виде  $(\zeta, \theta, \xi)$ ) введена в [7] при исследовании гидроупругих колебаний в трубопроводе.

Исследуется следующая проблема. Пусть в отсутствии напряжений трубопровод изогнут. Он нагружается внутренним потоком жидкости или газа. Его концы могут быть закреплены жестко или шарнирно оперты. Требуется найти напряжения и деформации в стенках трубы.

Предполагается, что ввиду (1) применима теория оболочек. Вывод уравнений модели моментной оболочки для данной задачи дан в [8].

Определим параметр

$$\lambda = R_0 \max|\kappa_0|. \quad (2)$$

В зависимости от его значения, различаем три случая геометрии трубы:

$$\lambda \ll 1 - \text{слабоизогнутая труба}; \quad (3)$$

$$\lambda \sim 1 - \text{труба с сильным изгибом}; \quad (4)$$

$$\lambda \rightarrow \infty - \text{труба с изломом профиля}. \quad (5)$$

Случай (5) рассмотрен в [9] и здесь не исследуется.

Математическая модель моментной оболочки, охватывающая оба случая (3), (4), основана на труде [6] и приведена в [10]. В случае (3), как установлено в [5, 8], уравнения допускают редукцию к одномерному виду подстановкой (после перехода к безразмерным перемещениям  $u', v', w'$  и координатам  $\zeta, \theta$ ):

$$\begin{aligned} u'(\zeta, \theta) &= u_0(\zeta) + \lambda u_1(\zeta) \sin \theta + O(\lambda^2); \\ v'(\zeta, \theta) &= \lambda v_1(\zeta) \cos \theta + O(\lambda^2); \\ w'(\zeta, \theta) &= w_0(\zeta) + \lambda w_1(\zeta) \sin \theta + O(\lambda^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Используя (7), были получены разрешающие уравнения модели моментной оболочки в первом приближении по параметру  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \alpha^2 u_{1\zeta\zeta} + \alpha v w_{1\zeta} - \varepsilon^2 \alpha^3 w_{1\zeta\zeta\zeta} - \frac{1+\nu}{2} \alpha v_{1\zeta} - \frac{1-\nu}{2} u_1 &= f_1; \\ -w_1 + v_1 - \nu \alpha u_{1\zeta} + \varepsilon^2 \left[ -\alpha^4 w_{1\zeta\zeta\zeta\zeta} + 2\alpha^2 w_{1\zeta\zeta} + \frac{\nu-3}{2} \alpha^2 v_{1\zeta\zeta} + \alpha^3 u_{1\zeta\zeta\zeta} \right] &= f_2; \\ \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 v_{1\zeta\zeta} - v_1 + \frac{1+\nu}{2} \alpha u_{1\zeta} + w_1 - \varepsilon^2 \alpha^2 \frac{3-\nu}{2} w_{1\zeta\zeta} &= f_3; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= 2\alpha^2 f u_{0\zeta\zeta} + \alpha^2 f_\zeta u_{0\zeta} - \alpha f_\zeta w_0 - \alpha \left[ (1-\nu) f + \varepsilon^2 \alpha^2 f_{\zeta\zeta} \right] w_{0\zeta} - \\
&- \left( \frac{1-\nu}{2} f + \varepsilon^2 \alpha^2 f_{\zeta\zeta} \right) u_0 - \varepsilon^2 \alpha^3 \left( 4f_\zeta w_{0\zeta\zeta} + 3f w_{0\zeta\zeta\zeta} \right) - X_1 / E^* h^* ; \\
f_2 &= \left( 2\nu f - \varepsilon^2 \alpha^2 f_{\zeta\zeta} \right) w_0 + \left[ (1-\nu) f - \varepsilon^2 \alpha^2 f_{\zeta\zeta} \right] \alpha u_{0\zeta} - \varepsilon^2 \left[ 4\alpha^4 f w_{0\zeta\zeta\zeta} + \right. \\
&+ 6\alpha^4 f_\zeta w_{0\zeta\zeta\zeta} - \left. \left[ (1-\nu) f - 4\alpha^2 f_{\zeta\zeta} \right] \alpha^2 w_{0\zeta\zeta} + \left( \nu f_\zeta + \alpha^2 f_{\zeta\zeta\zeta} \right) \alpha^2 w_{0\zeta} - \right. \\
&- \left. 3\alpha^3 f u_{0\zeta\zeta\zeta} - 2\alpha^3 f_\zeta u_{0\zeta\zeta} - \frac{\alpha}{2} \left[ (1+\nu) f_\zeta - 2\alpha^2 f_{\zeta\zeta\zeta} \right] u_0 \right] - Z_1 / E^* h^* ; \\
f_3 &= -\frac{\nu-3}{2} \alpha f u_{0\zeta} - \frac{\nu-1}{2} \alpha f_\zeta u_0 - f w_0 - \varepsilon^2 \frac{\alpha^2}{2} \left[ (3-\nu) f_\zeta w_{0\zeta} + (7-\nu) f w_{0\zeta\zeta} \right] - Y_1 / E^* h^* .
\end{aligned}$$

Здесь индекс  $\zeta$  обозначает дифференцирование по координате. Подразумевается, что функции нулевого приближения  $u_0, w_0$  известны.

Далее необходимо разграничить области применимости стержневой [4] и оболочечной [5, 8] моделей. Для этого введем параметр, аналогичный параметру Ирвина в механике кабелей:

$$E_{irv} = \sqrt{\frac{2hE}{\beta \left( R_0 - h/2 \right) L v_{s0}^2}} .$$

Здесь  $v_{s0}$  - скорость внутреннего потока,  $\beta$  - коэффициент трения в трубе [5]. Этот параметр позволяет разграничить области применимости математических моделей, как показали наши численные эксперименты.

При значениях  $E_{irv} > 270$  необходимо применять стержневую модель, при  $E_{irv} < 70$  – оболочечную модель. В области значений  $270 < E_{irv} < 70$  необходимы дополнительные исследования.

Для разграничения случаев (3), (4) выполнены исследования методом конечных элементов в программном комплексе FreeCAD. Дополнительно для оценки адекватности численного метода проведено сравнение расчета типовой тестовой задачи о напряжениях в трубе во FreeCAD и в коммерческом программном комплексе Abaqus CAE 2021 (Student Edition).

Установлено, что для модели технической оболочки переход к одномерной постановке задачи (7) допустим для

$$\lambda \leq 0.2$$

При таких значениях параметра кривизны (2) модули перемещений и напряжения по Мизесу распределены по угловой координате как  $\sin \theta$ , что соответствует виду (6). При больших значениях параметра эти распределения начинают значительно отклоняться от вида (6).

Таким образом, установлены границы характерных безразмерных параметров математических моделей [4, 5, 7, 8], при которых возможно применение этих моделей с погрешностями, не превышающими погрешности исходных базовых моделей (теории стержней и оболочек). Предполагается, что дальнейшее исследование напряженно-деформированного состояния изогнутого трубопровода будет выполняться на основе модели, предложенной в [10].

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00039, <https://rscf.ru/project/21-11-00039/>.*



## Литература

1. Liu R., Xiong H., Wu X. and Yan Sh. / Numerical studies on global buckling of subsea pipelines // *Ocean Engineering*, 2014, 78, pp. 62-72;
2. Towhata I. *Geotechnical Earthquake Engineering* – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 684 p.;
3. Феодосьев В.И. / О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // *Инженерный сборник*, 1951, 10, С. 169-170;
4. Рукавишников В.А., Ткаченко О.П. / Нелинейные уравнения движения растяжимого подземного трубопровода: вывод и численное исследование // *Прикладная механика и техническая физика*, 2003, 44 (4), С. 144-150;
5. Rukavishnikov V.A., Tkachenko O. P. / Dynamics of a fluid-filled curvilinear pipeline // *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, 39, pp. 905-922;
6. Власов В.З. *Общая теория оболочек и ее приложения в технике* / Власов В.З. / *Избранные труды*. Т.1. Москва: Издательство АН СССР, 1962. С. 15-439;
7. Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P. / Numerical and asymptotic solution of the equations of propagation of hydroelastic vibrations in a curved pipe // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2000, 41. P. 1102-1110;
8. Ткаченко О.П. / Разрешающие уравнения математической модели изогнутого трубопровода // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния, 2017, №4(34). С. 114-124;
9. Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P. / Mathematical model of the pipeline with angular joint of elements // *Mathematical methods in the applied sciences*, 2020, 43:13, pp. 7550-7568;
10. Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P. / Approximate resolving equations of mathematical model of a curved thin-walled cylinder // *Applied Mathematics and Computation*, 2022, 422, p. 126961.

**А.В. Чигарев,<sup>1</sup> Ю.В. Чигарев<sup>2</sup>**

## **К ВЫБОРУ КРИТЕРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ**

<sup>1</sup>*Белорусский государственный университет, г. Минск*

<sup>2</sup>*Белорусский государственный аграрный технический университет, г. Минск*

Рассматриваются колебания трубопровода связанного с транспортировкой жидкости или газа широкое использование которых известно в нефтегазовой промышленности, сельском хозяйстве, энергетике и других отраслях. Разные ландшафтные и климатические условия, в которых проходит трубопровод, переменное внутреннее давление приводят отдельные участки трубопровода к колебаниям, которые могут носить неустойчивый характер при этом колебательный процесс при определенных условиях может стохастизироваться [1-4]. В этом случае к исследованию устойчивости рассматриваемого участка трубопровода необходимо применять методы теории вероятностей и математической статистики. Рассматриваются пространственные колебания трубы длины  $l$  тол-

щины  $h$  наполненной несжимаемой жидкостью и закрепленной на концах вдоль горизонтальной оси  $X$  к шарнирным опорам. Одна опора принимается подвижной, другая – неподвижной. Считается, что деформирование участка  $l$  не зависит от напряженного и деформированного состояния других частей трубопровода.

Предполагаем, что центральная ось трубопровода совпадает с осью  $X$  прямоугольной системы координат, а главные оси инерции поперечного сечения параллельны осям  $Y$  и  $Z$ . На границах участка  $l$  трубопровода  $x = 0$ ,  $x = l$ . Обозначим через  $\alpha$  изгибное перемещение от вертикальной плоскости  $XZ$ , а через  $f_1$  прогиб элемента трубопровода в плоскости  $XZ$ .

Предполагается, что из статического состояния, которое характеризуется изогнутым положением вдоль оси  $OX$  под действием собственного веса и внутреннего давления, труба выводится в динамическое путем отклонения от вертикальной плоскости на угол  $\alpha_0$  одновременно с происходящим гидравлическим ударом, что вызывает возмущение колебаний трубы с высоко и низкочастотным возбуждением в виде

$$Q = Q_0 \cos \Omega t + Q_1 \cos \omega t, \quad (1)$$

где  $Q_0, Q_1, \Omega, \omega$  – амплитуды и частоты возмущения.

Пусть элемент трубы  $dx$  массой материала трубы и жидкости  $dm$  при движении испытывает силу сопротивления

$$d\bar{F}_c = -\mu(\bar{V}_r + \bar{V}_e)dx, \quad (2)$$

здесь  $\mu$  – коэффициент сопротивления,  $\bar{V}_r, \bar{V}_e$  – относительная и переносная скорости,  $t$  – время,  $f_1$  – прогиб элемента трубы.

$$V_r = \frac{df_1}{dt} = \dot{f}_1; \quad V_e = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}, \quad (3)$$

Силы инерции нормальная, тангенциальная и кориолисова имеют вид [5, 6]

$$dF_n^u = f_1 \dot{\alpha}^2 dm; \quad dF_\tau^u = f_1 \ddot{\alpha} dm; \quad dF_k^u = 2\dot{\alpha} \dot{f}_1 dm. \quad (4)$$

Пусть распределенная нагрузка на трубопровод выражается законом

$$q_n = \frac{m}{l} \ddot{f}_1 + QS \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}. \quad (5)$$

здесь  $S = \pi r^2$ ;  $r$  – внутренний радиус трубы в рассматриваемом сечении.

Силу продольного натяжения  $T$  примем в виде [5, 6]

$$T = \frac{ES}{2l} \int_0^l \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 dx \quad (6)$$

где  $E$  – модуль Юнга материала трубы.

Далее будем рассматривать только изгибные колебания, считая угловые перемещения малыми по сравнению с изгибными.

Уравнения изгибных колебаний трубопровода будет

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{EJl}{m} \cdot \frac{\partial^4 f_1}{\partial x^4} + \frac{(T - QS)l}{m} \cdot \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \left( q_1 - \frac{A}{m} \right) \cos \alpha + f_1 \left( \frac{d\alpha}{dt} \right) - \frac{\mu l}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial t} \quad (7)$$

здесь  $J = \pi r^3 h$  – осевой момент инерции площади поперечного сечения,

$$A = \gamma\pi(r + h)lg; \gamma - \text{плотность.} \quad (8)$$

Граничные условия, удовлетворяющие прогибу примем в виде

$$f_1(0,t) = f_1(l,t) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(l,t) = 0. \quad (9)$$

$$\text{Решение (6) ищем в виде } f_1(x,t) = (F_o + f_o(t))\sin \frac{\pi x}{l}. \quad (10)$$

Применяя к уравнениям (8) и (6) метод Бубнова-Галеркина можно получить уравнение изгибных колебаний трубопровода

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_o}{dt^2} + a \frac{df_o}{dt} + b(F_o + f_o(t)) = - \\ - \left[ d(F_o + f_o(t))^2 - \lambda(Q_1 \cos \omega t + Q_o \cos \Omega t) \right] (F_o + f_o(t)). \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{здесь } a = \frac{\mu l}{m}; \quad b = \frac{\pi^4 EJ}{ml^3}; \quad d = \frac{S\pi^4 E}{4ml^3}; \quad \lambda = \frac{\pi^2 S}{ml}.$$

Уравнение (11) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \ddot{f}_o + af_o + 3dF_o f_o^2 + df_o^3 + [b + 3dF_o^2 - \lambda F_o(Q_o \cos \Omega t + Q_1 \cos \omega t)]f_o = \\ = \lambda F_o(Q_o \cos \Omega t + Q_1 \cos \omega t) \end{aligned} \quad (12)$$

За частоту собственных колебаний примем выражение стоящее в квадратных скобках левой части уравнения (12) при  $t = 0$

$$\omega_o^2 = b + 3dF_o^2 - \lambda F_o(Q_o - Q_1) \quad (13)$$

Далее полагаем  $\omega = \omega_o \Omega$ . Тогда (12) примет вид

$$\ddot{f}_o + af_o + 3dF_o f_o^2 + df_o^3 + \omega_o^2 f_o = Q_o \cos \Omega t + Q_1 \cos \omega t \quad (14)$$

Введем безразмерный параметр времени  $\omega_o t = \tau$  и новую переменную

$$\xi_o = 3 - \frac{Q_o'}{\gamma^2} \cos \gamma \tau, \quad \text{где } Q_o' = \frac{Q_o}{\omega_o^2}; \quad \psi = \frac{\Omega}{\omega_o}.$$

Уравнение (14) после подстановки запишем

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + 2a'\dot{\xi} + \xi - \beta'\xi^2 + \gamma'\xi^3 = Q_1' \cos \nu \tau - 2a' \frac{Q_o'}{\psi} \sin \psi \tau + \\ + \frac{Q_o'}{\psi^2} (1 - 2\beta'\xi + 3\gamma'\xi^2) \cos \psi \tau - \frac{Q_o'^2}{\psi^n} (-\beta' + 3\gamma'\xi) \cos^2 \psi \tau + \gamma' \frac{Q_o'^3}{6} \cos^3 \psi \tau. \end{aligned} \quad (15)$$

В результате процесса усреднения приходим к уравнениям относительно амплитуды и фазы

$$\begin{cases} \dot{A} = -a' A - \frac{Q_1'}{2\nu} \sin \varphi; \\ \dot{\varphi} = \frac{\gamma'}{\nu} A^2 + \frac{1-\nu^2}{2\nu} + 2 \frac{\gamma'}{\nu} \frac{Q_o'}{\psi} - \frac{Q_1'}{2A\nu} \cos \varphi + \\ \frac{\beta'}{\nu} \frac{Q_o'}{\psi^2} \cos \psi \tau + 2 \frac{\gamma'}{\nu} \frac{Q_o'^2}{\psi^4} \cos 2\psi \tau; \end{cases} \quad (16)$$

В случае отсутствия низкочастотного возмущения  $Q_1' = 0$ , характеристическое уравнение системы (16) будет

$$k^2 + 2a'k + \left[ a'^2 + \left( \frac{1-v^2}{2v} + 2\frac{\gamma'}{v} \frac{Q_o'}{\psi} + \frac{d}{\omega_o^2} A^2 \right) \times \left( \frac{1-v^2}{2v} + 2\frac{\gamma'}{v} \frac{Q_o'}{\psi} + 3\frac{d}{\omega_o^2} A^2 \right) \right] \quad (17)$$

Решение (17) запишем так

$$k_{1,2} = -a \pm \sqrt{-m_1 m_2} \quad (18)$$

где

$$m_1 = \frac{1-v^2}{2v} + 2\frac{\gamma'}{v} \frac{Q_o'}{\psi} + \frac{d}{\omega_o^2} A^2;$$

$$m_2 = \frac{1-v^2}{2v} + 2\frac{\gamma'}{v} \frac{Q_o'}{\psi} + \frac{d}{\omega_o^2} A^2.$$

Для того, чтобы траекториями в фазовом пространстве были гиперболы, а особые точки седлом необходимо выполнение условия [3,4]

$$-a'^2 > m_1 m_2 \quad (19)$$

Если в (16) положить  $\dot{A} = 0$ ,  $\dot{\phi} = 0$  получим

$$\left[ a'^2 + m_1^2 \right] A^2 = \left( \frac{Q_1'}{2Av} \right)^2 \quad (20)$$

Условие существования седла из (19) и (20) запишется в виде

$$Q_1' > \frac{8A^2 v^2 a \omega_o}{3} \sqrt{\frac{3,4av}{d}}. \quad (21)$$

Как показано в работах [3-6] условие (21), т.е. случай возможности локальной неустойчивости, является необходимым для возникновения хаотических движений. Таким образом, трубопровод может совершать как регулярное, так и нерегулярное, хаотическое движение, хотя никаких случайных параметров в систему не вводили. Могут быть и промежуточные случаи, которые вносят дополнительные математические трудности.

При выполнении условия (21) для исследования устойчивости колебаний необходимо применять кинетические уравнения, в частности, уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК), которое дает возможность применить метод моментных функций [7]. В уравнении (14), учитывая только кубическую нелинейность, введем фазовые переменные

$$q_1 = f_0; \quad q_2 = \dot{f}_0; \quad (22)$$

и запишем соответствующее уравнения Ито

$$dq_1 = q_2 dt$$

$$dq_2 = \sqrt{s} w - (2aq_2 + \omega_0^2 q_1 + dq_1^3) dt; \quad (23)$$

где  $s$  – интенсивность стационарного нормального белого шума внешнего возмущения. Согласно [7] коэффициенты сноса и диффузии будут

$$\chi_1 = q_2; \quad \chi_2 = -(2aq_2 + \omega_0^2 q_1 + dq_1^2) \quad \chi_{22} = s \quad (24)$$

Тогда уравнение ФПК для определения плотности вероятности будет

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -q_2 \frac{\partial \rho}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} [(2aq_2 + dq_1^2 + q_1 \omega_1^2) \rho] + 0.5 \frac{\partial^2 \rho}{\partial q_2^2} \quad (25)$$

Рассуждения аналогичные [7] дают возможность получить систему моментных функций, которую можно использовать в исследовании устойчивости. В частности можно получить выражения связывающие моменты первого порядка

$$\frac{dM_1}{dt} = M_2, \quad \frac{dM_2}{dt} = -(M_1 + 2aM_2) \quad (26)$$

Решение системы (26)  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = 0$  асимптотически устойчиво при  $a > 0$ . Следовательно решение  $f_0(t) \equiv 0$  стохастической системы по отношению к моментам первого порядка (в среднем) асимптотически устойчиво при любой интенсивности белого шума.

Можно также привести критерий устойчивости по вероятности  $P$  [7]. Решение  $f_0(t) \equiv 0$  уравнения (14) будет устойчивым по вероятности, если для любого  $\varepsilon > 0$ ,  $b > 0$  можно найти такое  $\delta(\varepsilon, b) > 0$ , что из  $\|f_0\| < \delta$  следует

$$P \{ \text{Sup} \|f(t)\| < \varepsilon \} > 1 - b. \quad (27)$$

Согласно данному критерию решение  $\|f_0(t)\|$  устойчиво при выбранных начальных возмущениях, если вероятность наперед заданного отклонения от горизонтальной оси  $OX$  будет меньше любого наперед заданного значения  $b$  для  $t > t_0$ .

### Литература

1. Ваврив Д.М., Шигимага Д.В. Хаос в осцилляторе Дуффинга с высокочастотным и низкочастотным внешним воздействием. Радиофизики и радиоастрономия. 2000 т. 5. № 2;
2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988, 368 с.;
3. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. Минск, УП «Технопринт» 2000, 426 с.;
4. Чигарев А.В., Чигарев Ю.В. Стохастизация колебаний трубопровода в условиях динамического внутреннего давления. Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: механика предельного состояния, 2020, № 3 (43) С. 49-55;
5. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные колебания трубопровода с упруго-смещающейся опорой при действии внутреннего ударного давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018, № 6, С.3-12;
6. Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные параметрические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело» 2011, № 6, С.130-146;
7. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М. «Наука», 1979. – 335 с.

С.Н. Коробейников<sup>1</sup>, А.Ю. Ларичкин<sup>1</sup>

## ОБЪЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ МОДЕЛЕЙ ГИПОУПРУГОСТИ, ОСНОВАННЫХ НА КОРОТАЦИОННЫХ СКОРОСТЯХ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

<sup>1</sup>*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева  
Сибирского отделения РАН, Новосибирск*

Определяющие соотношения (ОС) для гипопругости занимают промежуточное положение между ОС для упругости по Коши/Грину и упругопластичности. Поскольку ОС для гипопругости входят как составная часть в ОС для аддитивной упругопластичности [1], исследователи продолжают как изучение свойств этих моделей и алгоритмов численного интегрирования ОС для этих моделей, которые уже реализованы в существующих коммерческих КЭ кодах [2], так и разработку теоретических основ формулировки гипопругих ОС [3] и алгоритмов их численного интегрирования [4,5].

Отметим, что модели гипопругого материала, основанные на коротационных скоростях тензора напряжений, занимают особое место в семействе гипопругих моделей, так как, с одной стороны, принцип Прагера [1] позволяет использовать только эти модели гипопругого материала в ОС для упругопластичности и, с другой стороны, в [3] установлено, что из объективных скоростей тензора напряжений геометрический смысл имеют только коротационные скорости Зарембы-Яуманна (Z-J) тензора напряжений.

По-видимому, работа [6] была первой попыткой объединить алгоритм средней точки с достаточно точным интегрированием ОС для классической гипопругой модели (*C-модели*), основанной на коротационной скорости Z-J тензора напряжений для больших приращений деформации и вращений волокон материала деформируемых твердых тел. В [6] авторы определили свой алгоритм (алгоритм H-W) как инкрементально объективный алгоритм. Суть этого алгоритма заключается в том, что при отсутствии поворотов напряжения при больших деформациях интегрируются по времени со вторым порядком точности, а при отсутствии деформаций достаточно точно интегрируются и повороты волокон материала и не возникают ложные приращения напряжений из-за неточного определения приращений поворотов.

Однако впоследствии было обнаружено, что для деформаций с наложенными поворотами точность алгоритма H-W в определении напряжений значительно ниже, чем для деформаций без них. Было предложено называть алгоритм H-W слабо инкрементально объективным алгоритмом, а алгоритмы, фильтрующие наложенные повороты, сильно инкрементально объективными алгоритмами. В [4,5] были разработаны сильно инкрементально объективные



алгоритмы для интегрирования ОС для моделей гипопругости, основанных на коротационной скорости  $Z$ - $J$  тензора напряжений.

Мы представляем новое семейство абсолютно объективных алгоритмов интегрирования ОС для гипопругих моделей ( $G$ -моделей), основанных на коротационных скоростях тензора напряжений, ассоциированных с тензорами-спинами из семейства непрерывных материальных тензоров-спинов [7-9]. Алгоритмы нового семейства фильтруют наложенные повороты и в этом смысле сопоставимы с сильно инкрементально объективными алгоритмами. Оба этих алгоритма могут использоваться для интегрирования ОС для  $G$ - и  $C$ -моделей гипопругости. Поэтому важной задачей данного исследования является установление семейств моделей материалов, для которых предпочтительнее использовать либо сильно инкрементально объективные, либо абсолютно объективные алгоритмы.

Результаты компьютерного моделирования простого растяжения и простого сдвига показывают, что сильно инкрементально объективные алгоритмы интегрирования ОС для гипопругих  $C$ -моделей предпочтительнее, чем абсолютно объективные. В то же время для интегрирования ОС для гипопругих  $G$ -моделей предпочтительны абсолютно объективные алгоритмы.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-00485, <https://rscf.ru/project/22-29-00485/>.*

### Литература

1. Bruhns O.T. / Large deformation plasticity // Acta Mechanica Sinica. 2020. Vol. 36. P. 472-492;
2. Gambirasio L., Chiantoni G., Rizzi E. / On the consequences of the adoption of the Zaremba-Jaumann objective stress rate in FEM codes // Arch. Computat. Methods Eng. 2016. Vol. 23. P. 39-67;
3. Fiala Z. / Objective time derivatives revised // ZAMP. 2020. Vol. 71. 4;
4. Jabareen M. / Strongly objective numerical implementation and generalization of a unified large inelastic deformation model with a smooth elastic-inelastic transition // Int. J. Eng. Sci. 2015. Vol. 96. P. 46-67;
5. Rubin M.B. / Continuum Mechanics with Eulerian Formulations of Constitutive Equations. 2021. Cham: Springer;
6. Hughes T.J.R., Winget J. / Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis // Int. J. Num. Meth. Eng. 1980. Vol. 15. P. 1862-1867;
7. Korobeynikov S.N. / Families of continuous spin tensors and applications in continuum mechanics // Acta Mech. 2011. Vol. 216. P. 301-332;
8. Korobeynikov S.N. / Analysis of Hooke-like isotropic hypoelasticity models in view of applications in FE formulations // Arch. Appl. Mech. 2020. Vol. 90. P. 313-338;
9. Korobeynikov S.N. / Family of continuous strain-consistent convective tensor rates and its application in Hooke-like isotropic hypoelasticity. // J. Elast. 2021. Vol. 143. P. 147-185.

А.Ю. Ларичкин<sup>1</sup>, С.Н. Коробейников<sup>1</sup>, В.Ю. Ульяницкий<sup>1</sup>, Д.К. Рыбин<sup>1</sup>

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ, ПОЛУЧЕННОЙ В ПРОЦЕССЕ НАПЫЛЕНИЯ, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ГИПОУПРУГОСТИ

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Увеличение долговечности элементов конструкций за счет нанесения покрытий на их поверхность активно применяется в технике [1]. Однако, возможности предсказания уровня внутренних напряжений от способа нанесения покрытия и, как следствие, выработку подходов к оптимизации методов напыления стали возможны с развитием методов численного моделирования [2]. Задача оценки остаточных напряжений после напыления покрытия в математическом смысле является задачей с начальными напряжениями.

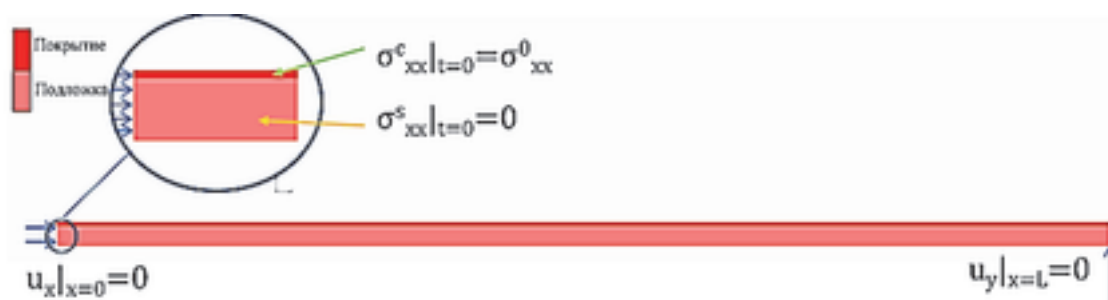


Рис. 1. Постановка задачи

Проведено моделирование прогиба двухслойной пластинки с одним преднагруженным слоем, в условиях плоской деформации методом конечных элементов. Размеры пластины  $76 \times 26 \times 0,7$  мм, слой покрытия имел толщину  $100 \pm 20$  мкм. При моделировании использовалась модель гипоупругого материала, с определяющими отношениями связи скоростей напряжений со скоростями деформаций. В качестве объективной производной выбиралась классическая производная Зарембы - Яуманна [3].

Пластинка прогибалась в зависимости от знака начальных напряжений: вверх при отрицательных и вниз при положительных. При этом распределение остаточных напряжений по толщине пластинки почти везде, кроме области свободного торца, представляет кусочно-линейную функцию с переходами от сжимающих напряжений к растягивающим и обратно. При моделировании показано, что в покрытии вблизи свободного торца первое главное напряжение меняет свой знак с отрицательного на положительный, что указывает на возможность откола материала покрытия на краю пластинки. Подобные явления наблюдается по окончании технологического процесса напыления.

Для определения модуля упругости покрытия решалась серия прямых задач с вариацией модуля упругости покрытия. Критерием достижения нужного значения модуля упругости было совпадение расчетного прогиба пластинки с

данными эксперимента для материала покрытия ВК-15М (WC/Co (85/15)) [1]. Стоит отметить, что зависимость остаточного прогиба от начальных напряжений в покрытии для данного типа размеров оказалась линейной, что упрощает определение модуля упругости.

Экспериментальная оценка остаточных напряжений при использовании различных методов напыления основана на методе Альмена (Almen Strip) [4], которое заключается в измерении прогиба стандартной стальной пластинки после напыления. В этом методе начальное напряжение в покрытии оценивается по прогибу, используя формулу, которая не включает в себя модуль упругости покрытия [5]. Однако, в результате проведенных численных экспериментов нами выяснено, что конечный прогиб пластинки зависит от величины модуля Юнга покрытия, как это и предсказано в исследовании [6].

Проведено качественное сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными различных авторов [6-8], которое показало одинаковый скачкообразный характер распределения напряжений вдоль толщины пластинки при переходе от покрытия к подложке.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-00485, <https://rscf.ru/project/22-29-00485/>.*

### Литература

1. Батраев И.С., Рыбин Д.К., Иванюк К.В., Ульяницкий В.Ю., Штерцер А.А. Износостойкие детонационные покрытия на основе карбида вольфрама для авиационной техники // Авиационные материалы и технологии, №1 (66), 2022, С. 92-109;
2. Korobeynikov S.N. / Analysis of Hooke-like isotropic hypoelasticity models in view of applications in FE formulations // Arch. Appl. Mech. 2020. Vol. 90. P. 313-338;
3. Fiala Z. / Objective time derivatives revised // ZAMP. 2020. Vol. 71. 4;
4. Guagliano M. Relating Almen intensity to residual stresses induced by shot peening: a numerical approach // Journal of Materials Processing Technology. 2001. Vol. 110. Is. 3. P. 277–286;
5. Tillmann W., Hagen L., Luo W. Process parameter settings and their effect on residual stresses in WC/W<sub>2</sub>C reinforced iron-based arc sprayed coatings // Coatings. 2017. Vol. 7. Is. 8. 125.
6. Varis T., Suhonen T., etc. Evaluation of Residual Stresses and Their Influence on Cavitation Erosion Resistance of High Kinetic HVOF and HVOF-Sprayed WC-CoCr Coatings // J Therm Spray Tech (2020) 29:1365–1381.
7. Lasseur V., Goutier S., etc Residual Stress Evolution in Zirconia (Y8%) Coatings During Atmospheric Plasma Spraying for Substrates Under Rotating Kinematic // J Therm Spray Tech (2020) 29:1313–1321;
8. Oladijo O. P., Luzin V., etc. Residual Stress and Wear Resistance of HVOF Inconel 625 Coating on SS304 Steel Substrate // J Therm Spray Tech (2020) 29:1382–1395.

## ПРОГНОЗ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ПОКАЗАТЕЛЯ $\nu$

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург

Для оценки текущего состояния строительных конструкций, для предотвращения внезапного разрушения, вызванного развитием усталостных дефектов, проводят периодический неразрушающий контроль. Для решения такой задачи хорошо зарекомендовал себя интегральный метод обследования на основе явления акустической эмиссии (АЭ).

Достаточно быстрое протекание физических процессов изменения структуры в ограниченном объеме материала (пластическая деформация, разрушение, образование и рост трещин, движение дислокаций, фазовые превращения, трение и т.д.) сопровождается излучением акустических волн. Описанное явление называют АЭ материала и используют в неразрушающем контроле (НК) для обнаружения активно развивающихся под нагрузкой дефектов. Важным достоинством представленного метода является прямая связь информативных параметров сигналов АЭ с процессами разрушения, не свойственная традиционным методам. Это позволяет получать непосредственную информацию о стадии развития и скорости роста [1].

В работе [2] применяется оценка  $\nu$ -показателя для определения трендов в развитии повреждения конструкции. Авторы используют данные, полученные в ходе двух экспериментов: силовое нагружение балочных армированных образцов (железобетон), изгибаемых по 3-точечной системе (в данной работе применяются данные этого эксперимента) и температурно-силовое нагружение крупногабаритного объекта, заключенного в цилиндрическую бетонную конструкцию. Для второго эксперимента  $\nu$ -показатель оказался наиболее информативным оценочным параметром динамики трещинообразования.

Также авторы вычисляют три усреднения обрабатываемого параметра (амплитуда): обычное арифметическое, медианное и стандартное отклонения. Все они рассчитываются на основе метода скользящего окна. В эксперименте по разрушению балок параметры статистическая медиана и простое среднее помогают проследить динамику трещинообразования.

В работе [3] авторы предлагают две трактовки изменения показателя  $\nu$  при накоплении повреждений, основанные на пространственном распространении трещин в материале. Первая, называемая автомоделным подходом, основана на фрактальной геометрии и статистической характеристике трещин в объеме материала с использованием двух степенных распределений: для пространственного распределения центров масс трещин и для распределения длин тре-

щин. Вторая трактовка основана на процессе Юла. Обе модельные идеализации охватывают переход от условия критичности  $b=1,5$  к условию неотвратимого разрушения  $b=1,0$  на основе локализации повреждений [4, 5, 6].

В работе [7] проводится анализ распределений по энергии сигналов акустической эмиссии. Авторы обнаружили, что в случае локализованного разрушения вид распределения – степенной, при дисперсном разрушении распределение сигналов АЭ по энергии имеет экспоненциальный вид. Анализ функционального вида распределения уже на ранних этапах нагружения позволяет выделить пространственную область образца, в которой в дальнейшем произойдет локализация дефектообразования.

В данной работе анализируется  $b$ -параметр, вычисленный для двух экспериментов – нагрузка объектов из песчаника Береа и железобетонных конструкций.

В методе АЭ, чтобы изучать масштабирование распределения амплитуд сигналов АЭ, образующихся в процессе трещинообразования, можно использовать закон Гутенберга-Рихтера, широко применяемого в сейсмологии [3, 8, 9]. В терминах АЭ формула Гутенберга-Рихтера выглядит так:

$$\log_{10}N = a - b * A_{max}dB$$

где  $A_{max}dB$  - максимальная амплитуда в окне (в децибелах),  $a$  – эмпирическая константа, с выбранным значением 4,8,  $b$ -показатель, полученный из этого соотношения, затем умноженный на коэффициент 20, чтобы быть сравнимым с тем, который используется в сейсмологии [5]. Показатель  $b$  применяется при идентификации преобладающего вида разрушения и для определения трендов в развитии повреждения конструкции. Также  $b$ -показатель можно интерпретировать как угол наклона линейной части распределения закона Гутенберга-Рихтера [3].

Анализировался эксперимент по нагрузке объектов из песчаника Береа. Размеры объектов – 15x8 мм. Нагрузка постоянно увеличивалась до разрушения. Во время испытаний объекты контролировались с помощью АЭ системы AMSY-5 (Vallen Systeme).

Значения  $b$ -параметра высчитываются на основе метода скользящего окна. Суть данного метода заключается в том, что расчеты производятся на одинаковых по длине наборах последовательно регистрируемых данных, смещенных относительно друг друга на одно значение, при последовательном сканировании данных по всему промежутку измерений. Длина набора (ширина окна) задается пользователем [2].

На рис.1 представлен график значений  $b$ -параметра для эксперимента по нагрузке двух объектов из песчаника Береа. Ширина окна равна 200 секундам. Срез данных – все время эксперимента.

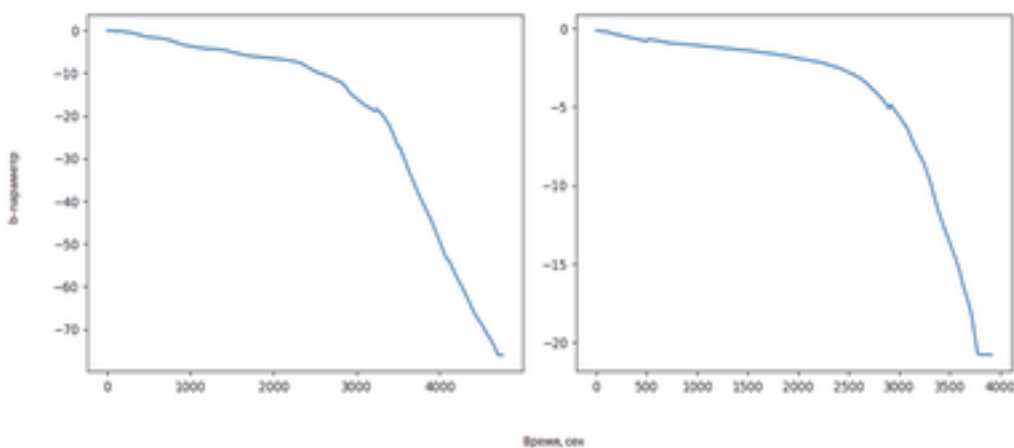


Рис. 1. В-параметр для эксперимента с объектами из песчаника Береа

По данным графикам видно, что в течение эксперимента значение  $b$ -параметра имеет тенденцию уменьшаться. Но ближе к концу эксперимента можно заметить, что значение  $b$ -параметра увеличивается, а затем стремительно понижается. Момент, когда значение  $b$ -параметра увеличивается, можно рассматривать как «критический», после которого  $b$ -параметр резко уменьшается, что связано с ростом числа трещин.

В эксперименте с силовым нагружением балочных армированных железобетонных образцов, изгибаемых по 3-точечной схеме, нагрузка держалась в течение определенного времени. На рис.2 представлены графики нагружения 2 балок.

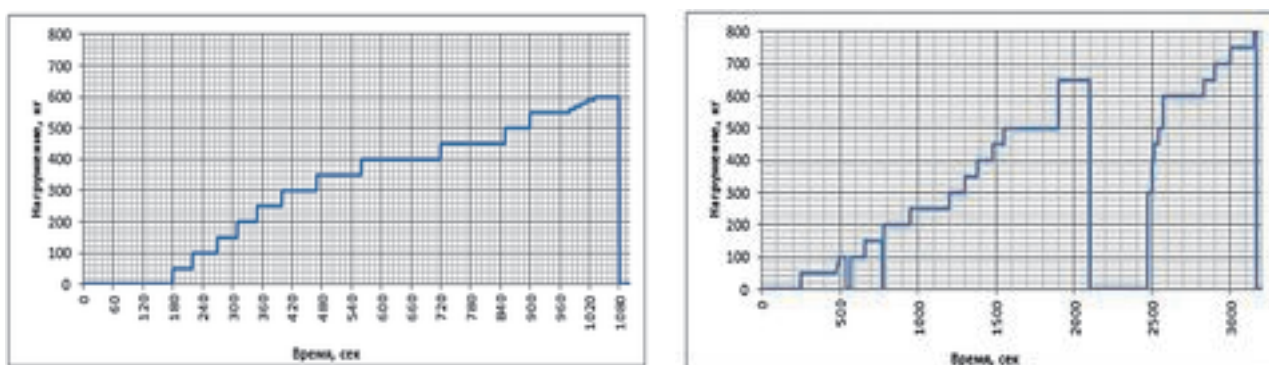


Рис. 2. Нагружение балок

В эксперименте с балками  $b$ -параметр высчитывался для каждого значения нагрузки. На рис.3 представлены графики значений  $b$ -параметра.

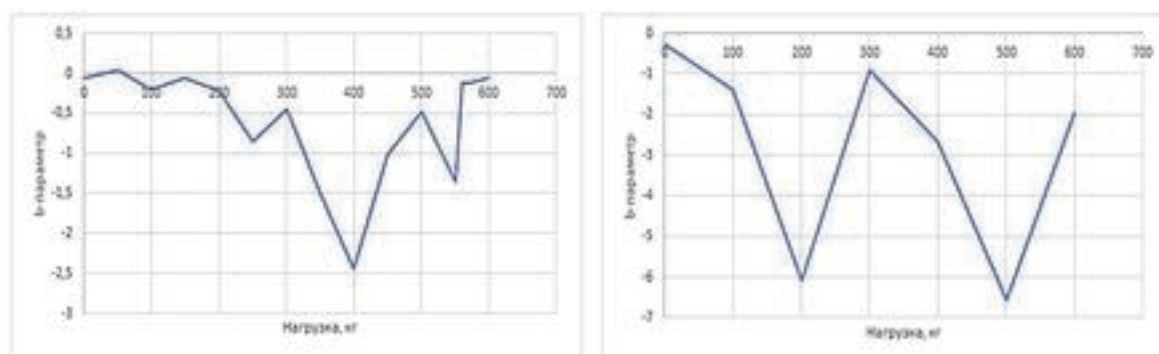


Рис. 3. В-параметр для эксперимента с балками

По данным графикам видно, что при определенных нагрузках значение  $b$ -параметра резко уменьшается. В соответствии с комментариями экспертов, которые работали с данным экспериментом, при данных нагрузках наблюдается образование макротрещин. Можно сделать вывод, что при образовании макротрещин значение  $b$ -параметра резко уменьшается.

В результате работы проанализированы значения  $b$ -параметра, вычисленные в результате двух экспериментов - нагрузка объектов из песчаника Береа и балочных армированных железобетонных образцов, изгибаемых по 3-точечной схеме.

Для первого эксперимента значения  $b$ -параметра высчитываются на основе метода скользящего окна. В течение эксперимента значение  $b$ -параметра уменьшается. Момент, когда значение  $b$ -параметра увеличивается, является сигналом роста трещин. При росте трещин значения  $b$ -параметра резко уменьшаются.

Для второго эксперимента значения  $b$ -параметра высчитываются в зависимости от нагрузки. В ходе анализа  $b$ -параметра выяснилось, что уменьшение значения  $b$ -параметра сигнализирует о возникновении трещин.

#### Литература

1. Бехер С.А., А. Л. Бобров А.Л. Основы неразрушающего контроля методом акустической эмиссии: учеб. пособие / Новосибирск : Изд-во СГУПС, 2013. 145 с.
2. Белоусова В. Разработка программного обеспечения для анализа данных акустико-эмиссионного контроля, 3rd Conference on Software Engineering and Information Management, SEIM 2018; Saint Petersburg; Russian Federation; Volume 2135, 2018, Pages 61 -66.
3. Карпинтери А., Лачидонья Дж., Пуцци С. Прогноз развития трещин в полномасштабных конструкциях на основе анализа показателя  $b$  статистики Юла / Физическая мезомеханика, 2008. С. 75-87.
4. Sammonds P.R., Meredith P.G., Murrell S.A.F., Main I.G. Modelling the Damage Evolution in Rock Containing Porefluid by Acoustic Emission // Proceedings of Eurock'94. – Rotterdam, The Netherlands: Balkema, 1994.
5. Colombo S., Main I.G., Forde M.C. Assessing damage of reinforced concrete beam using “ $b$ -value” analysis of acoustic emission signals // J. Mat. Civil Eng. ASCE. – 2003. – V. 15. – P. 280–286.
6. Carpinteri A., Lacidogna G., Niccolini G. Critical behaviour in concrete structures and damage localization by Acoustic Emission // Key Eng. Mat. – 2006. – V. 312. – P. 305–310.
7. Дамаскинская Е.Е., Кадомцев А.Г. Отклонение от закона Гутенберга–Рихтера. Письма в ЖТФ, 2013, том 39, вып. 2. С. 29-35.
8. Любушин А.А. Анализ данных систем геофизического и экологического мониторинга. М.: Наука, 2007. 228 с.
9. Kei Katsumata // E-LETTER Earth Planets Space. 2006. V. 58. P. e49–e52.

С.А. Баранникова<sup>1</sup>, М.В. Надежкин<sup>1</sup>, П.В. Исхакова<sup>1</sup>

## О СВЯЗИ АКУСТИЧЕСКИХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК В ПРОЦЕССЕ НАГРУЖЕНИЯ АУСТЕНИТНЫХ СТАЛЕЙ ПРИ ТЕМПЕРАТУРАХ $143 \text{ K} \leq T \leq 420 \text{ K}$

<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

В настоящее время экспериментально установлено, что пластическая деформация материалов является самоорганизующимся процессом, который имеет место в неравновесной диссипативной системе, какой является деформируемое твердое тело. В этих работах приведены экспериментально наблюдаемые картины эволюции автоволн макролокализации деформации для различных стадий пластической деформации, возникающие при растяжении образца с постоянной скоростью, установлены их количественные характеристики и показано, что существует однозначное соответствие между волновой картиной и законом деформационного упрочнения, действующим на данной стадии процесса [1]. В работе [2] было показано, что акустические свойства деформируемой среды, в частности, скорость распространения ультразвука в ней, меняются в ходе деформации принципиальным образом. Эти данные позволяют говорить о тесной связи акустических характеристик среды и ее деформационных свойств.

Для объяснения наблюдаемых закономерностей развития локализованной пластичности в работе [1] предложена модель, в которой важная роль отводится упругими акустическим импульсам, возникающими при пластическом течении, и известными как акустическая эмиссия. Генерация акустических таких импульсов сопровождает образование полос сдвига, рождение двойников, зарождение трещин и другие релаксационные акты пластичности. Иными словами, состояние напряженного материала характерно тем, что в системе концентраторов напряжений, возникающих в результате реализации элементарных актов пластичности, блуждают случайные упругие импульсы. Их наложение на упругие поля концентраторов повышает вероятность релаксационных актов пластической деформации. Модель [1] базируется на представлении о взаимосвязи акустических импульсов и элементарных сдвигов.

В настоящей работе получены данные о зависимостях скорости распространения ультразвука  $V_s$  от механических характеристик и содержания мартенситной фазы Fe–18% Cr–10% Ni в интервале температур  $143 \text{ K} \leq T \leq 420 \text{ K}$ . Исследование влияния температуры на акустические характеристики сплавов необходимо для повышения точности выявления дефектов при ультразвуковом контроле.

Образцы аустенитной нержавеющей стали Fe–18% Cr–10% Ni с размерами рабочей части  $40 \times 5 \times 2$  мм растягивались на испытательной машине «Instron-1185» со скоростью  $3,3 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$  при температурах  $143 \text{ K} \leq T \leq 420 \text{ K}$ . Температура испытания задавалась скоростью продувки рабочей камеры, где находился образец при испытании, парами азота из сосуда Дьюара и контролировалась



хромель-алюмелевой термопарой, спай которой контактировал с образцом. Температурный интервал выбирался с учетом возможности реализации в материале прямого  $\gamma \rightarrow \alpha'$  мартенситного превращения [3]. Одновременно с регистрацией кривых нагружения измерялась скорость ультразвуковых релеевских волн. Синхронно с измерениями скорости ультразвуковых волн проводили магнитофазовый анализ образцов (определение объемной доли феррита).

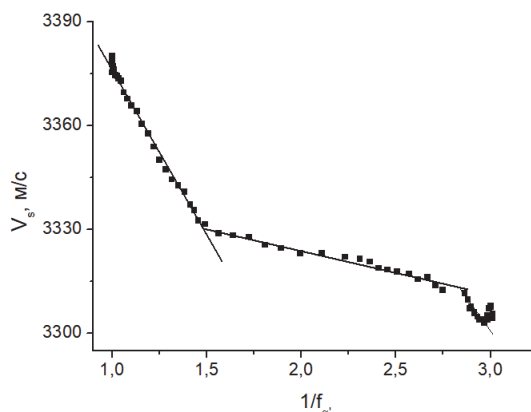


Рис. 1. Зависимость изменения скорости ультразвука от содержания мартенситной фазы в процессе растяжения при  $T=143$  К

Показано, что форма кривой «напряжение - деформация» претерпевает существенное изменение от параболы при 420 К и до  $S$ -образной кривой с понижением температуры до 143 К, что обусловлено наведенным пластической деформацией  $\gamma$ - $\alpha'$ -фазовым превращением. Скорость мартенситного превращения увеличивается с понижением температуры. Таким образом  $\alpha'$ -фаза оказывает существенное влияние на форму и стадийность диаграмм растяжения в сплаве Fe-18%Cr-10%Ni, и как следствие скорость распространения ультразвука.

Проведенные исследования показали, что появление фазы  $\alpha'$ -мартенсита в процессе пластического деформирования стали Fe-18% Cr-10% Ni приводит к изменению механических и акустических характеристик. Полученные зависимости между акустическими параметрами, механическими свойствами и содержанием мартенситной фазы исследуемых сплавов могут быть использованы для восстановления значений одной характеристики по экспериментально определенной другой.

*Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-29-01608.*

#### Литература

1. Зуев Л.Б., Баранникова С.А., Лунев А.Г. / От макро к микро. Масштабы пластической деформации. – Новосибирск: Наука, 2018. – 132 с.;
2. Муравьев В.В., Зуев Л.Б., Комаров К.Л. / Скорость звука и структура сталей и сплавов. – Новосибирск: Наука, 1996. – 183 с.;
3. Shin H.C., Ha T.K., Chang Y.W. Kinetics of deformation induced martensitic transformation in a 304 stainless steel // Scripta Materialia, 2001, 45, pp. 823–829.

П.К. Кабанова<sup>1</sup>, А.Б. Фрейдин<sup>1</sup>

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЫ В УПРУГОМ ТЕЛЕ

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Согласно экспериментальным исследованиям, рост трещины может сопровождаться возникновением в окрестности ее вершины зоны с измененными свойствами («process zone»), которая в дальнейшем продолжает распространяться вместе с трещиной. Изменение свойств материала внутри этой зоны обнаружено в полимерах [1], сплавах с памятью формы [2], сегнетоэлектрической керамике [3] и других материалах.

Исследование формы и геометрических параметров «process zone» как области новой фазы в зависимости от скорости распространения трещины в трансформационно-упрочняющихся материалах проводилось в работах [4, 5]. При этом помимо изучения зоны в окрестности вершины трещины рассматривались условия существования области новой фазы, находящейся в метастабильном состоянии и расположенной позади вершины трещины. Использовался подход к описанию развития «process zone», который реализовывал вариант теории фазового поля и состоял в рассмотрении динамики изменения параметра порядка.

В настоящей работе исследуется распространение зоны с измененными свойствами как области новой фазы в результате распространения межфазной границы, кинетика которой описывается дополнительным кинетическим уравнением, определяющим зависимость скорости границы от конфигурационной силы.

Рассмотрим упругое тело, которое может претерпевать фазовое превращение мартенситного типа, сопровождающееся изменением модулей упругости и собственной деформацией превращения. Обозначим исходную и новую фазы индексами «-» и «+» соответственно. Рассмотрим постановку в приближении малых деформаций [6].

Напряженно-деформированное состояние упругого двухфазного тела описывается уравнением равновесия и граничными условиями непрерывности деформаций и нормальных напряжений на межфазной границе  $\Gamma$ :

$$x, y \notin \Gamma: \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (1)$$

$$x, y \in \Gamma: \mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}] = 0, \quad (2)$$

$$x, y \in \Gamma: [\mathbf{u}] = 0, \quad (3)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений,  $\mathbf{n}$  – вектор единичной нормали к межфазной границе  $\Gamma$ ,  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений,  $[\dots]$  – скачок функции при переходе от фазы «-» к фазе «+».

Материал фаз принимается линейно-упругим:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{C}_{\pm} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^{tr}), \quad (4)$$

где  $\mathbf{C}_{\pm}$  – тензоры модулей упругости фаз,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор деформаций,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^{tr}$  – тензоры деформаций в ненапряженном состоянии; далее принимаем, что для исходной фазы  $\boldsymbol{\varepsilon}_{-}^{tr} = 0$ , тогда  $\boldsymbol{\varepsilon}_{+}^{tr} = \boldsymbol{\varepsilon}^{tr}$  – тензор собственной деформации превращения.

Далее полагаем фазы изотропными. Тогда

$$\mathbf{C}_{\pm} = \lambda_{\pm} \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2\mu_{\pm} \mathbf{I}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{E}, \mathbf{I}$  – единичные тензоры второго и четвертого ранга,  $\lambda_{\pm}, \mu_{\pm}$  – параметры Ламе. Рассматриваем задачу в постановке плоской деформации и полагаем, что  $\boldsymbol{\varepsilon}^{tr} = \frac{\vartheta^{tr}}{2} \mathbf{E}$ .

Эволюция межфазной границы описывается кинетическим уравнением, задающим зависимость нормальной составляющей скорости точек границы  $c$  от конфигурационной силы  $\chi$  (термодинамической силы, действующей на ориентированной площадке границы), равной скачку нормальной компоненты тензора энергии-импульса Эшелби [7, 8] (см. также [9]):

$$c = -\kappa\chi, \quad (6)$$

где  $\kappa$  – кинетический коэффициент,  $\kappa > 0$ .

В квазистатическом случае конфигурационная сила определяется соотношениями (см., напр., [6, 9]):

$$\chi = [f] - \boldsymbol{\sigma} : [\boldsymbol{\varepsilon}], \quad (7)$$

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}) = \min_{-,+} \{f^{-}(\boldsymbol{\varepsilon}), f^{+}(\boldsymbol{\varepsilon})\}, \quad (8)$$

$$f^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}) = f_0^{\pm} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^{tr}) : \mathbf{C}_{\pm} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^{tr}), \quad (9)$$

где  $f^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon})$  – плотности свободной энергии материала в соответствующих фазовых состояниях « $\pm$ »,  $f_0^{\pm}$  – плотности свободной энергии фаз в ненапряженном состоянии (определяются температурой материала); в силу непрерывности перемещений и усилий тензор напряжений в (7) может быть взят с любой стороны межфазной границы:  $\boldsymbol{\sigma}_{-} : [\boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{\sigma}_{+} : [\boldsymbol{\varepsilon}] = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : [\boldsymbol{\varepsilon}]$ ,  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{-} + \boldsymbol{\sigma}_{+})$ .

При  $\boldsymbol{\varepsilon}_{-}^{tr} = 0$  выражение для конфигурационной силы принимает вид

$$\chi = \gamma - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{-} : \boldsymbol{\varepsilon}_{-} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{+} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{+} - \boldsymbol{\varepsilon}^{tr}) - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : (\boldsymbol{\varepsilon}_{+} - \boldsymbol{\varepsilon}_{-}), \quad (10)$$

где  $\gamma = f_0^{+} - f_0^{-}$ .

Выражение (10) может быть переписано в терминах деформаций или напряжений по одну из сторон межфазной границы [6, 10], что удобно для аналитического анализа, но при этом в выражении конфигурационной силы явным образом присутствует нормаль, что требует более точного геометрического представления границы при конечно-элементном моделировании. Поэтому, поскольку в численных расчетах определяются деформации и напряжения по обе стороны границы, далее используется представление (10).

Соотношения (1) – (10) определяют связанную задачу о двухфазном теле с неизвестной межфазной границей, когда напряженно-деформируемое состояние зависит от положения границы, а скорость границы зависит от напряженно-деформируемого состояния.

Для решения задачи о распространении области новой фазы построена численная модель с использованием метода конечных элементов в ПО Abaqus аналогично моделям, используемым в задачах механохимии [11-13].

Полученное решение верифицировано рассмотрением имеющей аналитическое решение задачи о равновесном состоянии двухфазного тела с плоской межфазной границей при одноосном растяжении пластины (рис. 1).

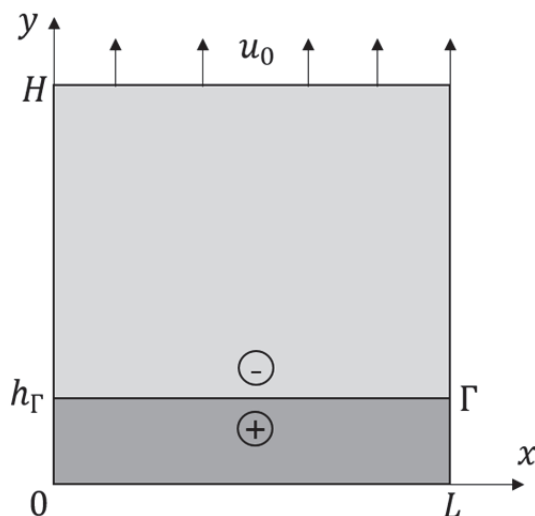


Рис. 1. Схематичное изображение двухфазного тела с плоским межфазным фронтом

Аналитическое решение для перемещения имеет вид:

$$u_{\pm}(y) = A_{\pm}y + B_{\pm}, \quad (11)$$

где коэффициенты  $A_{\pm}$ ,  $B_{\pm}$  находятся из граничных условий.

Задача о нахождении равновесного состояния двухфазного тела сводится к определению равновесного положения межфазной границы, которое может быть найдено из условия термодинамического равновесия, которому соответствует нулевая конфигурационная сила [14], то есть когда

$$[f] - \sigma : [\varepsilon] = 0. \quad (12)$$

Параметры материала, используемые в задаче верификации, а также в последующих численных расчетах приведены в Таблице 1. Область расчета – прямоугольник высотой  $H$  и длиной  $L$ . Начальное положение плоской межфазной границы (начальная толщина слоя новой фазы)  $h_{\Gamma}^0 = 0.1H$ .

Согласно аналитическому решению, равновесное положение межфазной границы при внешнем растяжении  $u_0 = 0.02H$  равно  $h_{eq} = 0.517H$ .

Таблица 1

Параметры материалов, используемые в расчетах

	$E, GPa$	$\nu$	$\vartheta^{tr}$	$\gamma, GJ/m^3$
Фаза «+»	59.2	0.139	0.01	0.013
Фаза «-»	86.4	0.27	–	

На рис.2 показано положение плоской межфазной границы в разные моменты времени, то есть на разных итерациях численного расчета, а также равновесное положение границы, полученное из аналитического решения. Положение межфазной границы определяется безразмерной координатой  $y_{\Gamma} = h_{\Gamma}/H$ .

Можно видеть, как в результате эволюции двухфазная конфигурация сходится к равновесной.

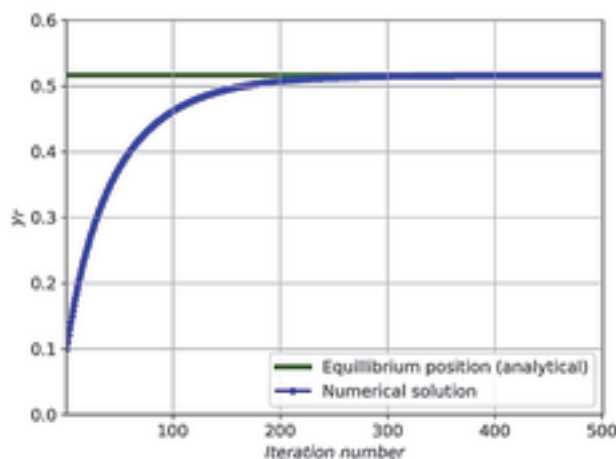


Рис. 2. Положение плоской межфазной границы при численном расчете и сходимость к равновесному положению по аналитическому решению

Далее рассмотрено влияние величины внешнего растяжения на распространение межфазной границы, при этом начальная область новой фазы задана в виде кругового зародыша. На рис.3,а показано положение межфазной границы (кривые 1–2–3–4) на различных итерациях расчета при внешней деформации растяжения, равной  $\varepsilon_0 = u_0/H = 0.02$ , где кривая 1 соответствует начальному положению межфазной границы. При заданном значении внешней деформации равновесное положение границы существует и равно  $h_{eq} = 0.517H$ . На рис.3,б показаны значения конфигурационной силы для соответствующих положений границы в зависимости от координат  $x/L$  точек границы. Видно, что при данном значении внешней деформации область новой фазы монотонно увеличивается, и межфазная граница будет стремиться к плоскому положению. При этом конфигурационная сила имеет отрицательные значения для всех координат  $x/L$  точек границы.

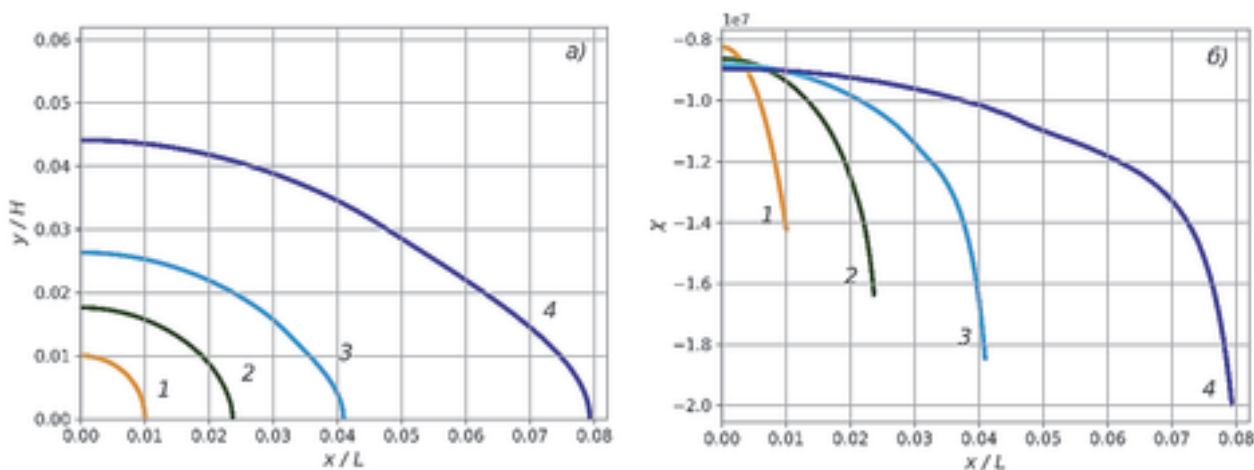


Рис. 3. Положение межфазной границы (а) и соответствующие значения конфигурационной силы (б) для различных итераций расчета при  $\varepsilon_0 = 0.02$

На рис.4,а показано положение межфазной границы на различных итерациях расчета при внешней деформации растяжения  $\varepsilon_0 = 0.005$ . Согласно ана-

литическому решению, равновесный слой новой фазы при такой внешней деформации не существует. Из численного эксперимента видно, что «вброшенный» зародыш новой фазы, который мог возникнуть, например, флуктуационным путем, стремится исчезнуть, монотонно сжимаясь по осям  $x$  и  $y$ , чему соответствуют положительные значения конфигурационной силы на рис.4,б.

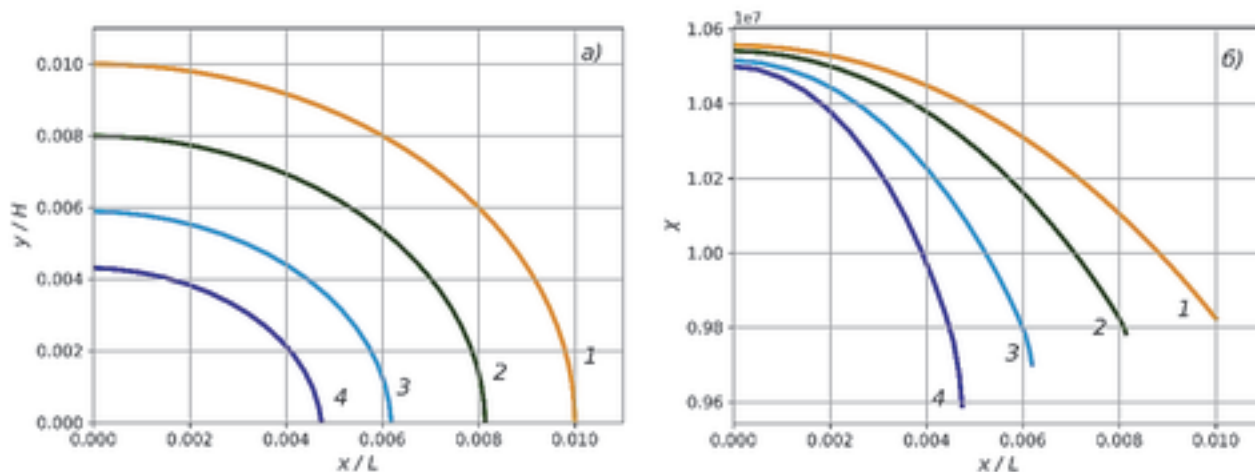


Рис. 4. Положение межфазной границы (а) и соответствующие значения конфигурационной силы (б) для различных итераций расчета при  $\varepsilon_0 = 0.005$

Также было проведено исследование распространения зародыша новой при деформации растяжения  $\varepsilon_0 = 0.012$  – большей, чем в предыдущем случае, но также недостаточной для существования равновесного положения. Показано, что при данной внешней деформации зародыш новой фазы исчезает немонотонно, что является следствием влияния формы зародыша.

В заключение рассмотрено влияние на распространение межфазной границы концентраторов напряжений в виде кругового и эллиптического отверстий. Для кругового отверстия внешняя деформация задана равной  $\varepsilon_0 = 0.02$ , при которой равновесное положение границы существует в теле без отверстия. Начальное положение межфазной границы – круг радиуса  $r_\Gamma = 0.01H$ . На рис.5 показаны значения конфигурационной силы для межфазной границы при различных значениях радиусов  $r$  кругового отверстия, то есть при разных соотношениях размеров отверстия и кольцевого зародыша новой фазы. Из графиков видно, что если радиус отверстия меньше, чем  $0.5r_\Gamma$ , то конфигурационная сила имеет отрицательные значения на всей межфазной границе. Это означает, что область новой фазы будет расширяться и стремиться к равновесному положению, как если бы отверстия не было. Если же радиус отверстия больше или равен  $0.5r_\Gamma$ , то конфигурационная сила имеет как положительные, так и отрицательные значения на межфазной границе. Таким образом, при таких относительных размерах отверстия проявляется его влияние на развитие области новой фазы – на начальной стадии часть межфазной границы приближается к отверстию.

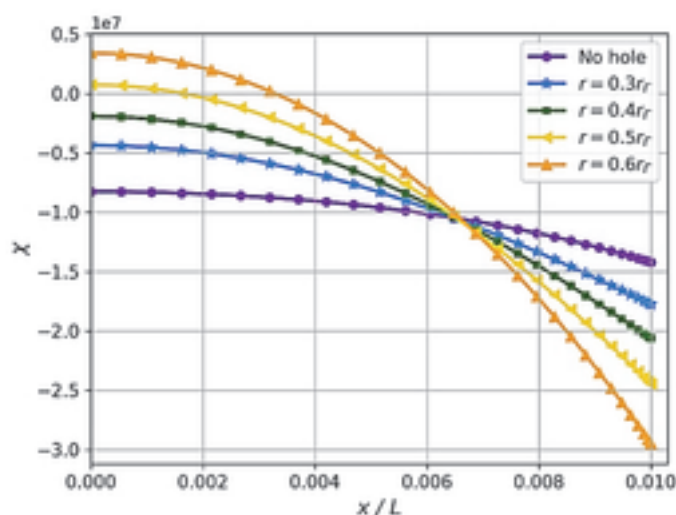


Рис. 5. Значения конфигурационной силы для тела с круговым отверстием при различных соотношениях радиусов отверстия и зародыша новой фазы ( $\varepsilon_0 = 0.02$ )

Затем рассмотрено влияние формы отверстия на распространение межфазной границы при внешней деформации растяжения  $\varepsilon_0 = 0.005$ , для которой равновесного положения для тела без отверстия не существует. Отверстие задается в виде эллипса с различным соотношением полуосей эллипса. Начальная конфигурация межфазной границы также имеет форму эллипса. Показано, что при соотношении полуосей эллипса, равном 2 и более, конфигурационная сила для части межфазной границы имеет отрицательные значения. Это демонстрирует как, даже при малой внешней деформации, концентрация напряжений на отверстии может способствовать развитию области новой фазы.

Таким образом, в данной работе:

- развита численная (конечно-элементная) модель для описания распространения межфазной границы, верифицированная с помощью аналитического решения;
- исследовано влияние внешней нагрузки на распространение межфазной границы;
- исследовано распространение межфазной границы в окрестности концентратора напряжений в виде кругового и эллиптического отверстия.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00552-П).*

### Литература

1. Botsis J., Chudnovsky A., Moet A. Fatigue crack layer propagation in polystyrene—Part I. Experimental observations. *International Journal of Fracture*, 33, pp. 263–276 (1987);
2. Loughran G.M, Shield T.W., Leo P.H. Fracture of shape memory CuAlNi single crystals. *International Journal of Solids and Structures*, Volume 40, Issue 2, pp. 271-294 (2003);
3. Tan X., Young S.E. etc. Transformation toughening in an antiferroelectric ceramic. *Acta Materialia*, 62, pp. 114-121 (2014);
4. Boulbitch A., Korzhenevskii A.L. Morphological transformation of the process zone at the tip of a propagating crack. I. Simulation. *Phys. Rev. E*. 101(3-1):033003. (2020);

5. Boulbitch A., Korzhenevskii A.L. Morphological transformation of the process zone at the tip of a propagating crack. II. Geometrical parameters of the process zone. *Phys. Rev. E*. 101(3-1):033004. (2020);
6. Freidin A. On new phase inclusions in elastic solids. *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*, 87 (2007);
7. Gross D. Morphological equilibrium and kinetics of two-phase materials. In: *Configurational mechanics of materials/ Ed. by Kienzler R., Maugin G.A. (CISM Courses and Lectures. No. 427. The International Centre for Mechanical Sciences) Wien: Springer-Verlag. P. 221-272 (2001);*
8. Maugin G. *Configurational Forces. Thermomechanics, Physics, Mathematics, and Numerics*. London, New York: Chapman & Hall/CRC Boca Raton. 527 p. (2011).
9. Фрейдin А.Б. О конфигурационных силах в механике фазовых и химических превращений. *ПММ*. Т. 86. Вып. 4. С. 571-583 (2022);
10. Кубланов Л.Б., Фрейдin А.Б. Зародыши твердой фазы в деформируемом материале. *Прикладная математика и механика*. Т. 52, вып. 3. С. 493-501 (1988);
11. Morozov A.V., Freidin A.B., Müller W.H. Stability of chemical reaction fronts in the vicinity of a blocking state. *PNRPU Mechanics Bulletin*, no. 3, pp. 58-64 (2019);
12. Morozov A. Numerical and analytical studies of kinetics, equilibrium, and stability of the chemical reaction fronts in deformable solids. *Doctoral Thesis, Technische Universität Berlin (2021);*
13. Freidin A.B., Korolev I.K., Aleshchenko S.P., Vilchevskaya E.N. Chemical affinity tensor and chemical reaction front propagation: theory and FE-simulations. *International Journal of Fracture*, 202, 245–259 (2016);
14. Гринфельд М.А. *Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений*. М.: Наука. 312 с. (1990).

**В.М. Садовский<sup>1,2</sup>, О.В. Садовская<sup>1</sup>**

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЕНЫ С УЧЕТОМ ПОВЫШЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ ПРИ СХЛОПЫВАНИИ ПОР**

<sup>1</sup>*Институт вычислительного моделирования  
Сибирского отделения РАН, Красноярск*

<sup>2</sup>*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

Пористые металлы (пенометаллы, металлические пены) – новые искусственные материалы, которые могут найти широкое применение в машиностроении благодаря низкой плотности и хорошим демпфирующим свойствам [1, 2]. Способность пористых металлов эффективно поглощать энергию в ходе пластической деформации открывает перспективы их использования для изготовления бамперов автомобилей и элементов кузовов, так называемых «сминаемых зон». Также их можно использовать в редукторах и приводах в качестве разрушаемых предохранителей, которые рассеивают энергию динамического удара, предотвращая разрушение механической системы.



Основные трудности при математическом моделировании пористых металлов связаны с тем, что они обладают ярко выраженной разнсопротивляемостью. Их деформационные свойства существенно различаются при растяжении и сжатии, что характерно практически для всех пористых материалов. При растяжении выделяются этапы упругого деформирования скелета и пластического течения вплоть до его разрушения. При сжатии – этапы упругого и пластического деформирования скелета до момента схлопывания пор, а также последующий этап упругого или упругопластического деформирования сплошного, не пористого материала. В случае малых размеров пор схлопывание может наступить на упругой стадии с появлением пластичности на последнем этапе при достаточно высоком уровне нагрузки.

В данной работе математическая модель для описания малой деформации пористого металла со случайным распределением пор как неоднородной сплошной среды строится на основе обобщенного реологического метода [3], в котором для описания одноосного деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, используется новый реологический элемент – жесткий контакт. В пространственном состоянии изменение сопротивления пористого металла внешним нагрузкам по мере схлопывания пор учитывается с помощью условия прочности Мизеса – Шлейхера. При учете необратимой деформации используется условие текучести, моделирующее пластическую потерю устойчивости пористого скелета. Случайный характер распределения размера пор моделируется на основе эмпирической функции распределения, которая зависит от технологического процесса вспенивания металла. Феноменологические параметры модели определяются на основе приближенного расчета задачи статического нагружения кубической ячейки периодичности со сферическими пустотами.

Для однородной пористой среды в замкнутой форме получены поля перемещений и напряжений в задаче радиального расширения сферической и цилиндрической полостей под действием внутреннего давления с учетом эффекта схлопывания пор [4]. В этом решении переход среды в пластическое состояние моделируется с помощью условия текучести Треска – Сен-Венана. Дилатансионное изменение объема материала не учитывается. Показано, что на упругой стадии деформирования пористость не меняется. С ростом давления в окрестности полости образуется зона пластического уплотнения, в части которой поры схлопываются. В случае цилиндрической симметрии сначала появляется зона неполной пластичности, затем ее часть, прилегающая к полости, переходит в состояние полной пластичности. Получены инженерные формулы для вычисления критических давлений предельного упругого состояния и предельного состояния среды с раскрытыми порами, а также формулы для определения радиусов поверхностей раздела характерных зон пластичности и уплотнения.

Разработан алгоритм численной реализации модели плоского и пространственного динамического деформирования металлической пены на многопроцессорных вычислительных системах кластерного типа. Параллельная версия программ, исполняющих этот алгоритм, включена в разработанные ранее и за-

регистрированные в Роспатенте программные комплексы 2Dyn\_Granular и 3Dyn\_Granular для численного исследования динамических процессов в упругопластических и сыпучих средах. Проведено тестирование и верификация программ на модельных задачах. На кластерах ИВМ СО РАН (г. Красноярск) и МСЦ РАН (г. Москва) выполнена серия методических расчетов, конечной целью которых является моделирование и оптимизация демпфирующих свойств пространственных элементов конструкций из пористых металлов.

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение № 075-02-2022-873).*

### Литература

1. Ashby M.F., Evans A.G., Fleck N.A., Gibson L.J., Hutchinson J.W., Wadley H.N.G. Metal Foams: A Design Guide. Elsevier / Butterworth-Heinemann, Boston – Oxford – Auckland – Johannesburg – Melbourne, 2000. 251 p.;
2. Gibson L.J. Properties and Applications of Metal Foams // Comprehensive Composite Materials, vol. 3, chapt. 3.31. Pergamon Press, Oxford, 2000. P. 821-842;
3. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: Физматлит, 2008. 368 с.;
4. Садовский В.М., Садовская О.В., Лукьянов А.А. Радиальное расширение сферической и цилиндрической полостей в безграничной пористой среде // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 4. С. 160-173.

**А.С. Бегун<sup>1,2</sup>, Л.В. Ковтанюк<sup>1</sup>**

## **РАЗОГРЕВ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ЕГО ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ**

<sup>1</sup>*Институт автоматизации и процессов управления  
Дальневосточного отделения РАН, Владивосток*

<sup>2</sup>*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса,  
Владивосток*

Для измерения реологических свойств материалов обычно используются опыты, в которых реализуется идеальное вискозиметрическое течение. При этом, как правило, для обработки результатов экспериментов используется точное решение соответствующей краевой задачи, в предположении прилипания материала к поверхности вискозиметра [1,2]. То есть считается, что скорость материала на его границе равна скорости прилегающей поверхности. Однако для многих материалов такое граничное условие невыполнимо, поскольку присутствует проскальзывание материала [3]. Более того, в случае конструкционных материалов или эластичных жидкостей, когда упругими свойствами материалов пренебречь невозможно, задачи о вискозиметрических течениях существенно усложняются. Постановка краевых задач в области чисто упругого деформирования осуществляться в перемещениях, в то время как в об-

ластях течения задача решается в скоростях перемещений. Граница, разделяющая эти две области, на которой должно выполняться условие непрерывности перемещений, заранее не известна и подлежит определению. Так как в областях течения необратимые деформации большие, то для решения таких задач необходимо использовать модель больших упруговязкопластических деформаций.

В настоящей работе обобщается решение, полученное в [5], где рассматривалось вязкопластическое течение упруговязкопластического материала с учетом проскальзывания на стенках вискозиметра, на случай неизотермического деформирования. Считается, что разогрев материала происходит за счет пристеночного трения и за счет необратимого деформирования. Таким образом, строится решение связной краевой задачи теории больших неизотермических деформаций. Математическое моделирование такого процесса проводится в рамках модели больших упруговязкопластических деформаций, обобщенной на неизотермический случай [4].

Рассматривается деформирование упруговязкопластического материала, заключенного между жесткими цилиндрическими поверхностями за счет вращения одной из поверхности. Решается два типа краевых задач: с переменной скоростью вращения жесткого цилиндра и с переменным сдвиговым усилием. Считается, что предел текучести зависит от температуры. Рассчитываются напряженно-деформированное состояние и распределения температуры, как при развитии течения, так и при его замедлении, включая остановку, разгрузку и остывание с вычислением остаточных напряжений и деформаций. Находятся закономерности продвижения упругопластических границ. Изменение области вязкопластического течения существенно отличается от изотермического случая (рис.1). При увеличивающейся скорости вращения внутреннего цилиндра область вязкопластического течения в рассматриваемом случае развивается быстрее; при постоянной скорости область вязкопластического течения продолжает увеличиваться, тогда, как в изотермическом случае она увеличивается незначительно и дальше не развивается. При уменьшающейся скорости вращения область вязкопластического течения уменьшается значительно медленнее, чем в изотермическом случае.

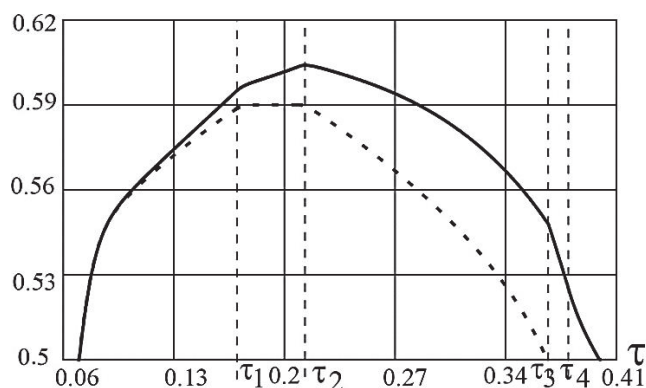


Рис. 1. Изменение области вязкопластического течения в процессе деформирования

### Литература

1. Сафрончик А.И. Вращение цилиндра с переменной скоростью в вязкопластичной среде // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, Вып. 6. С. 998-1014;

2. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1970. 415 с.;

3. Brunn, P. S. A Note on the Slip Velocity Concept for Purely Rotational Viscometric Flows // Rheol. Acta, 1998. 37(2). pp. 196-197;

4. Ковтанюк Л.В., Шитиков А.В. О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов // Вестник ДВО РАН. 2006. № 4. С. 87-93;

5. Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Течение упруговязкопластического материала в зазоре между вращающимися цилиндрическими поверхностями в условиях нежесткого сцепления // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 2. С. 146–158.

**Л.У. Султанов<sup>1</sup>, А.М. Кадиров<sup>1</sup>**

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА**

<sup>1</sup>*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань*

Работа посвящена построению методики исследования больших упругопластических деформаций с учетом повреждаемости материала.

Вводится тензор градиента деформации, который показывает изменение элементарного ориентированного отрезка при деформации. Для описания конечных деформаций и скорости деформации будут использоваться тензоры меры деформации Фингера, тензор пространственного градиента скорости, тензор деформации скорости.

Разрешающее уравнение строится дифференцированием по времени уравнения принципа виртуальных мощностей в актуальной конфигурации [1, 2].

Полные деформации представляются в виде суммы упругой и пластической составляющих (аддитивный закон) [1, 2]. Используется ассоциативный закон течения. В качестве критерия упругого деформирования используется условие Губера – Мизеса.

Процесс деформирования представляется в виде последовательности равновесных состояний. Переход от предыдущего равновесного состояния к следующему равновесному состоянию происходит путем пошагового приращения нагрузки. Считается, что на основе известных параметров  $k$  – го состояния нужно найти параметры  $k$  – го состояния. При возникновении пластических деформаций применяется метод проецирования напряжения на поверхность текучести.

В соответствии с положениями механики поврежденной среды, для характеристики поврежденности элементарного объема материала на микроуровне, вводится скалярный параметр  $\omega$ :

$$\omega = \frac{S - S_{\omega}}{S}$$

где  $S$  – это площадь сечения плоскостью элементарного объема, а  $S_\omega$  – площадь пересечения микродефектов с этой плоскостью.  $\omega$  принимает значения от 0 (материал не поврежден) до 1 (материал полностью разрушен).

Поврежденность материала складывается из функций состояния поврежденности  $\omega_k$  для каждого класса дефектов:

$$\omega = \sum_k \omega_k$$

Определение поврежденности  $\omega_k$  соответствующего типа предполагает описание механики поведения среды в рамках исследуемого явления, построение эволюционного уравнения накопления поврежденности. Влияние поврежденности материала осуществляется с помощью введения в рассмотрение эффективных напряжений.

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1-\omega}$$

При применении метода конечных элементов при исследовании подобных процессов наиболее удобно вести расчет с использованием пошагового нагружения, запуская на каждом шаге итерационный процесс типа метода начальных напряжений.

Величина приращения текущей поврежденности  $\Delta\omega^k$  определяется в виде суммы поврежденностей тех механизмов разрушения, которые учитываются в расчете. Например, при пластическом деформировании поврежденность можно определить в виде:

$$\Delta^k \omega = \frac{-\Delta^k \lambda}{1-\omega} \left( -\frac{kY}{a} \right)^b$$

где  $a, b$  – параметры материала,

$$-Y = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} = \frac{\sigma_{\text{шт}}^2}{2E(1-\omega)^2} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{\text{шт}}} \right)^2 \right]$$

$Y$  – скорость выделения энергии разрушения.

Рассмотрена задача растяжения прямоугольной полосы, при конечноэлементной дискретизации используется восьмиузловой призматический конечный элемент с линейной аппроксимацией.

### Литература

1. Голованов, А.И. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел / А.И. Голованов, Д.В. Бережной. – Казань: Издательство "ДАС", 2001. – 301 с.;
2. Голованов, А.И. Теоретические основы вычислительной нелинейной механики деформируемых сред / А.И. Голованов, Л.У. Султанов. – Казань: Издательство КГУ, 2008. – 164 с.;
3. Капустин, С.А. Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов с периодически повторяющейся структурой / С.А. Капустин, С.Ю. Лихачева. – Н.Новгород: Издательство ННГАСУ, 2012. – 96 с.;
4. Lemaitre J. A course on damage mechanics / J. Lemaitre. Berlin: Springer, – 1996. – 228 p.;

5. Lemaitre J. Engineering damage mechanics / J. Lemaitre, R. Desmorat. Berlin: Springer, 2005. – 380 p.

**И.С. Никитин<sup>1</sup>, А.Д. Никитин<sup>1</sup>, Б.А. Стратула<sup>1</sup>**

## **МУЛЬТИРЕЖИМНАЯ МОДЕЛЬ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ**

*<sup>1</sup>Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

Усталостное разрушение является сложным физическим процессом постепенной деградации механических свойств материала под действием циклических нагрузок. В процессе разрушения принято выделять несколько стадий, таких как (1) зарождение усталостной трещины; (2) рост и (3) долом. Как правило, длительности каждого из этих этапов в значительной степени зависят от уровня действующих циклических нагрузок. При амплитудах нагружения, сравнимых с пределом текучести материала, процесс зарождения занимает малую долю от общей усталостной долговечности и ресурс определяется стадией роста трещины. Сам процесс роста усталостной трещины зависит от непрерывно изменяющегося напряженно деформированного состояния (НДС), приводя к изменению как кинетических характеристик, так и возможной качественной смене типа раскрытия. Смена типа раскрытия усталостных трещин, как правило, возможна в условиях сложного многоосного нагружения. При снижении амплитуды циклического нагружения процесс зарождения трещины занимает всё большую долю общей долговечности и для области сверхмногоциклового усталости (амплитуда циклических нагрузок ниже классического предела усталости) может достигать 99 % ресурса. Таким образом, для оценки полной усталостной долговечности, включающей стадии зарождения и роста, необходимо использовать модель, позволяющую учитывать эволюцию НДС.

Кроме того, исследование разрушенных в эксплуатации элементов авиационных конструкций показывает, что возможны сценарии мультирежимного разрушения. Так, например, для лопаток газотурбинного двигателя свойственно наличие низкоамплитудного высокочастотного нагружения за счет колебаний параметров набегающего потока, а также высокоамплитудное низкочастотное нагружение за счет центробежных сил в полетном цикле. В таких условиях бывает, что зарождение усталостной трещины обусловлено высокочастотным нагружением, а последующий её рост - полетными циклами. Стоит отметить, что оценка количества циклов и наработка будет в значительной степени отличаться для различных режимов. Таким образом, возникает необходимость разработки мультирежимной модели усталостного разрушения, учитывающей типы раскрытий, циклическую деградацию материала и эволюцию фронта распространяющейся трещины.

В настоящей работе рассматривается такая модель [1] на основе теории циклической повреждаемости. Вводится две функции повреждаемости: одна для микротрещин нормального отрыва, вторая - для сдвига. Предполагается независимость механизмов накопления повреждаемости. Деградация материала описываемой кинетическим уравнением:

$$\partial\psi/\partial N = B(\sigma, \Delta\sigma)\psi^\gamma / (1-\psi^{1-\gamma})$$

где  $\psi$  – функция повреждаемости, принимающая значения от 0 до 1,  $N$  – количество циклов,  $B(\sigma, \Delta\sigma)$  – функция, зависящая от НДС и его размаха в цикле,  $\gamma$  – параметр, характеризующий скорость накопления повреждаемости.

Коэффициент  $B(\sigma, \Delta\sigma)$  определяется из условия выхода решения уравнения на усталостную кривую  $\sigma(N)$  при  $\psi=1$ . Упругие характеристики материала снижаются по мере накопления повреждаемости по следующим законам: деградация материала при  $\psi < \psi_*$   $\lambda(\psi) = \lambda_0(1 - \kappa\psi)$ ,  $\mu(\psi) = \mu_0(1 - \kappa\psi)$ , полное разрушение материала при  $\psi_* \leq \psi \leq 1$   $\lambda=0, \mu=0$ , где  $\psi_* \lesssim 1$  - критическое значение функции повреждаемости.

Предложенная модель была использована для численного эксперимента высокочастотного нагружения гладких образцов при кручении, повторяющего натурные испытания [2] (режим сверхмногоциклового усталостного разрушения). На рис. 1 представлены результаты математического моделирования с выделенной расчетной трещиной. Показано, что на начальном этапе происходит зарождение за счет сдвиговых напряжений. После достижения предельной длины сдвиговой трещины происходит самоорганизованный переход к росту в плоскости максимальных растягивающих напряжений. Результаты математического моделирования хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований материалов при кручении.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 19-19-00705.*

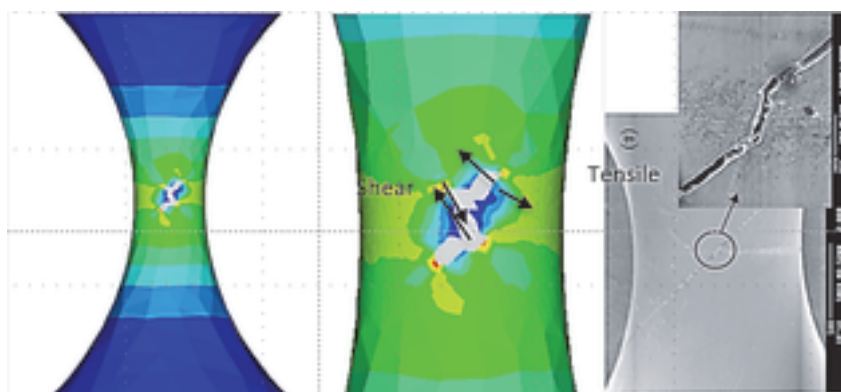


Рис. 1. Расчет усталостной квазитрещины при испытании на кручение

### Литература

1. Никитин И.С., Бураго Н.Г., Никитин А.Д. Повреждаемость и усталостное разрушение элементов конструкций в различных режимах циклического нагружения // Прикладная математика и механика. 2022. Т. 86. № 2. С. 276-290;

2. Nikitin A., Palin-Luc T., Shanyavskiy A., Bathias C. Comparison of crack paths in a forged and extruded aeronautical titanium alloy loaded in torsion in the gigacycle fatigue regime // Engineering Fracture Mechanics. 2016. Vol. 167. Pp. 259-272.

Y. Du<sup>1</sup>, Y. Cai<sup>1</sup>, X. Li<sup>1</sup>

Ю. Ду<sup>1</sup>, Ю. Кай<sup>1</sup>, Х. Ли<sup>1</sup>

## **SURFACE HARDENING OF CoCrNi MEDIUM ENTROPY ALLOY WITH A GRADIENT STRUCTURE BY FRICTION**

## **ПОВЕРХНОСТНОЕ УПРОЧНЕНИЕ ТРЕНИЕМ СРЕДНЕЭНТРОПИЙНОГО СПЛАВА CoCrNi С ГРАДИЕНТНОЙ СТРУКТУРОЙ**

*<sup>1</sup>School of Materials Science and Engineering*

*Heilongjiang University of Science and Technology, Harbin, China*

*<sup>1</sup>Школа материаловедения и инженерии*

*Хэйлунцзянского университета науки и технологий, Харбин, Китай*

High/Medium entropy alloys (HEAs/MEAs) have attracted extensive attention due to their high work hardening capability with good ductility at ambient and cryogenic temperatures [1]. However, low yield strength (YS) of these alloys is generally insufficient at room temperature regarding to engineering application [2]. Grain refinement by applying severe plastic deformation (SPD) techniques is usually used to strengthen metals/alloys. For example, CoCrNi MEA was processed by high-pressure torsion known as a sufficient SPD technique, revealing triple YS compared to coarse-grained (CG) sample, nevertheless the nominal strain decreased from nearly 0.8 to less than 0.2 [3]. Surface modification of metallic materials by introducing a gradient nanostructured (GNS) surface layer is an effective approach to enhance the strength of materials without sacrificing ductility [4].

In this study, a sliding friction treatment (SFT) was performed with a ball-on-disk contact configuration, in which a CG CoCrNi plate with an average grain size of about 35  $\mu\text{m}$  was pressed under a load of 300 N. A detailed description of the SFT set-up and procedures was reported by our previous work [5]. Microstructures were observed and analyzed by using electron backscattered diffraction (EBSD) and transmission electron microscope (TEM). Microhardness tests were conducted on the cross section of the SFTed sample by applying a load of 0.098 N (10 gf). Tensile tests were conducted with a strain rate of  $1.67\text{E-}3 \text{ s}^{-1}$  at ambient temperature on the SFTed specimens with different thickness, i.e. with different volum fraction of gradient structure (GS) denoted as GS10%, GS20%, GS40% and GS50% compared to CG.

The microstructure of equiaxed grains with nanoscale of the top most for the SFTed surface is shown in Fig. 1(a). The SFT may create a substantial microstructure refinement near the surface leading to a gradient microstructure on the CG matrix, and laminar grain layer can be found beneath equiaxed grain layer as shown in Fig.



1(b). Fig. 1(c) presents the grain size and hardness as functions of depth from SFTed surface. The hardness shows maximum value of 6.4 GPa for the top most of the SFTed sample corresponding to the average grain size of ~30 nm. With increasing depth, the sample shows a steep hardness gradient down to a depth of 100  $\mu\text{m}$ , corresponding to the severe deformation zone as shown in Fig. 1(b), demonstrating grain refinement by friction leads to surface hardening sufficiently. With further increasing depth from 100~300  $\mu\text{m}$ , a gentle gradient of microhardness is shown corresponding to the obviously deformed grain structure to a barely deformed grain/CG, and the hardness decreases until to a steady hardness of 2.1 GPa. Fig. 1(d) shows tensile curves of the SFTed specimens compared to CG. The YS of GNS50% sample is nearly 200% higher than that of CG. With such strengthening effect, the uniform elongation and total elongation of can still be kept as high as 35% and 50%, respectively.

In summary, surface hardening has been found in CoCrNi alloy with GNS, which can be attributed to the grain refinement subjected to friction treatment. With combination of synergetic strengthening and suppressed strain localization effects of GNS, total strengthening effect reaches high level without sacrificing ductility.

The authors gratefully acknowledge the support from the National Natural Science Foundation of China (Grant № 51701163) and the Nature Science Foundation of Heilongjiang Province (Grant № LH2020E125).

Сплавы с высокой/средней энтропией (НЕА/МЕА) привлекли большое внимание из-за их высокой способности к деформационному упрочнению с хорошей пластичностью при температуре окружающей среды и криогенных температурах [1]. Однако низкий предел текучести (ПТ) этих сплавов при комнатной температуре, как правило, недостаточен для технического применения [2]. Измельчение зерна с применением методов интенсивной пластической деформации (ИПД) обычно используется для упрочнения металлов/сплавов. Например, МЭБ CoCrNi был обработан методом кручения под высоким давлением, известным как достаточный метод ИПД, обнаружив тройной ИП по сравнению с крупнозернистым (КЗ) образцом, тем не менее, номинальная деформация уменьшилась с почти 0,8 до менее чем 0,2 [3]. Модификация поверхности металлических материалов путем введения градиентного наноструктурированного (НС) поверхностного слоя является эффективным подходом к повышению прочности материалов без ущерба для пластичности [4].

В этом исследовании была проведена обработка трением скольжения (ОТС) с контактной конфигурацией шар-диск, в которой пластина КЗ CoCrNi со средним размером зерна около 35 мкм прессовалась под нагрузкой 300 Н. Подробное описание о настройке и процедурах ОТС сообщалось в нашей предыдущей работе [5]. Микроструктуры наблюдали и анализировали с помощью дифракции обратно рассеянных электронов (ДОРЭ) и просвечивающего электронного микроскопа (ПЭМ). Испытания на микротвердость проводились на поперечном сечении образца ОТС с приложением нагрузки 0,098 Н (10 гс). Испытания на растяжение проводились со скоростью деформации  $1,67\text{E-}3 \text{ с-}1$  при температуре окружающей среды на ОТС-образцах различной толщины, т.е.

с различной объемной долей градиентной структуры (ГС), обозначаемой как ГС10%, ГС20%, ГС40% и ГС50% по сравнению с КЗ.

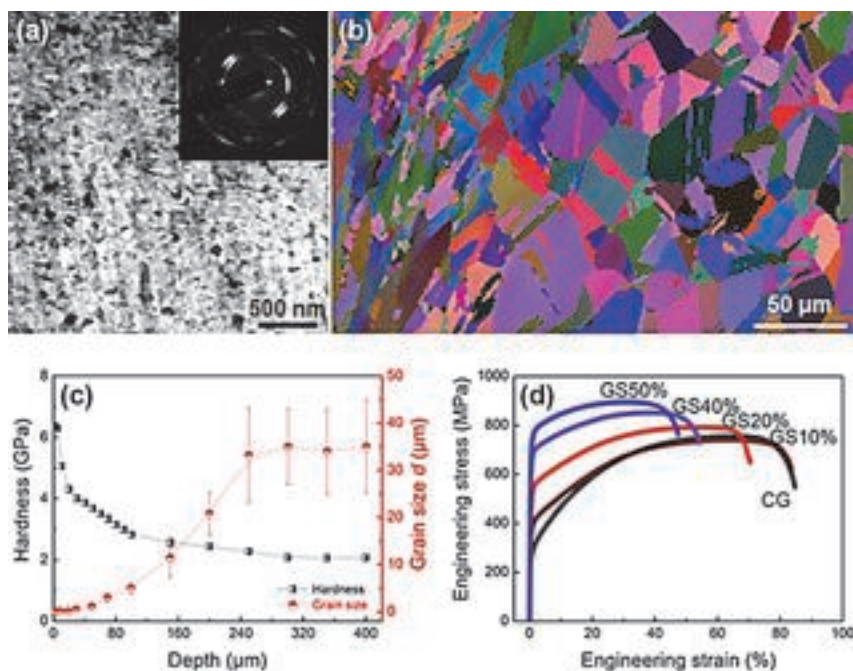


Fig. 1. Microstructural and mechanical characterization of SFTed CoCrNi: (a) TEM, (b) EBSD, (c) grain size and hardness as functions of depth from treated surface, (d) tensile engineering stress-strain curves of SFTed and CG CoCrNi

Рис. 1. Микроструктурные и механические характеристики ОТСed CoCrNi: (a) ПЭМ, (b) ДОРЭ, (c) размер зерна и твердость в зависимости от глубины от обрабатываемой поверхности, (d) механические кривые растяжения ОТСed и КЗ CoCrNi

Микроструктура равноосных зерен с наноразмером верхней части поверхности, подвергнутой ОТС, показана на рис. 1(a). ОТС может создавать существенное измельчение микроструктуры вблизи поверхности, что приводит к градиентной микроструктуре на матрице КЗ, и ламинарный слой зерен может быть обнаружен под равноосным слоем зерен, как показано на рис. 1 (b). На рис. 1 (c) представлены размер зерна и твердость в зависимости от глубины от поверхности, подвергнутой ОТС. Твердость показывает максимальное значение 6,4 ГПа для самой верхней части образца ОТС-ed, что соответствует среднему размеру зерна  $\sim 30$  нм. С увеличением глубины образец демонстрирует крутой градиент твердости до глубины 100 мкм, что соответствует зоне сильной деформации, как показано на рис. 1 (b), демонстрируя, что измельчение зерна за счет трения приводит к достаточному упрочнению поверхности. При дальнейшем увеличении глубины от 100~300 мкм наблюдается пологий градиент микротвердости, соответствующий явно деформированной зернистой структуре, к едва деформированному зерну/КЗ, и твердость снижается до установившейся твердости 2,1 ГПа. На рис. 1 (d) показаны кривые растяжения образцов ОТСed по сравнению с КЗ. ПТ образца ОТС50% почти на 200% выше, чем у КЗ. При таком упрочняющем эффекте однородное удлинение и общее удлинение могут поддерживаться на уровне 35% и 50% соответственно.

Таким образом, в сплаве CoCrNi с ОТС было обнаружено поверхностное упрочнение, которое можно отнести к измельчению зерна, подвергнутому фрикционной обработке. Благодаря сочетанию синергетического упрочнения и подавления эффекта локализации деформации ОТС общий эффект упрочнения достигает высокого уровня без ущерба для пластичности.

*Авторы благодарят за поддержку Национальный фонд естественных наук Китая (грант № 51701163) и Фонд естественных наук провинции Хэйлуцзян (грант № LH2020E125).*

## References

### Литература

1. Laplanche G, Kostka A, Reinhart C, et al. Reasons for the superior mechanical properties of medium-entropy CrCoNi compared to high-entropy CrMnFeCoNi. *Acta Materialia*, 2017, 128: 292-303;
2. Zhao Y L, Yang T, Tong Y, et al. Heterogeneous precipitation behavior and stacking-fault-mediated deformation in a CoCrNi-based medium-entropy alloy. *Acta Materialia*, 2017, 138: 72-82;
3. Yoshida S, Bhattacharjee T, Bai Y, et al. Friction stress and Hall-Petch relationship in CoCrNi equi-atomic medium entropy alloy processed by severe plastic deformation and subsequent annealing. *Scripta Materialia*, 2017, 134: 33-36;
4. Lu K. Making strong nanomaterials ductile with gradients. *Science*, 2014, 345: 1455-1456;
5. Du Y, Huo W, Xu J, et al. Mechanical behavior and strengthening mechanisms in precipitation-strengthened aluminium alloy with gradient structure induced by sliding friction treatment. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 2020, 51A: 6207-6221.

**В.А. Худякова<sup>1</sup>, С.Г. Жилин<sup>1</sup>, О.Н. Комаров<sup>1</sup>**

## **ВОПРОСЫ УЛУЧШЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ИНТЕРМЕТАЛЛИДНЫХ СПЛАВОВ ТИПА Fe-Al**

*<sup>1</sup>Институт машиноведения и металлургии  
Дальневосточного отделения РАН, Комсомольск-на-Амуре*

Интерметаллиды представляют собой химические соединения, состоящие из двух и более металлов. Данные сплавы обладают высокой твердостью и химической стойкостью [1].

Интерметаллидные системы возникают вследствие взаимодействия элементов при сплавлении, конденсации из пара и при реакциях в твердом состоянии в результате взаимной диффузии (при химико-термической обработке), при распаде пересыщенного твердого раствора одного металла в другом, а также в результате интенсивной пластической деформации при механическом сплавлении [2].

Интерметаллиды - основные «упрочнители» в высоколегированных сталях, таких как аустенитные жаропрочные и мартенситностареющие. Интерметаллиды обладают особенными кристаллическими структурами. В легированных сталях и специальных сплавах наиболее распространены лишь некоторые типы интерметаллидов [3]. К одним из таких типов относят железоалюминиевые интерметаллиды. Сплавы на основе алюминидов железа обладают, коррозионной стойкостью, сопротивлением к окислению, износостойкостью, низкой стоимостью [4].

В основном такие интерметаллиды сохраняют свою структуру, прочность и некоторую пластичность при высоких температурах, обладают великолепными антикоррозионными и антифрикционными свойствами, значительно превосходящими обычные металлы [5].

Несмотря на уникальные физико-механические и эксплуатационные характеристики интерметаллиды рассматриваемой системы обладают рядом недостатков, к которым следует отнести: хрупкость при низких температурах, пластичность [1].

В отечественной и зарубежной практике примеры использования интерметаллидов системы Fe-Al преимущественно представлены лишь в аспекте результатов их применения в качестве покрытий элементов конструкций, функционирующих в условиях высоких температур или агрессивных сред. Расширение перспектив эффективного применения интерметаллидов системы Fe-Al в промышленности затрудняется недостатком сведений о современных методах их получения и использования.

***В этой связи целью работы является анализ современных сведений об эффективных методах получения и практического применения железоалюминиевых интерметаллидов и определение возможности расширения их применения.***

В соответствии с поставленной целью решались следующие задачи:

- анализ типов интерметаллидов, относящихся к перспективным конструкционным материалам и отличительных особенностей интерметаллидов системы Fe-Al;
- рассмотрение методов получения железоалюминиевых интерметаллидов;
- определение области применения в промышленности алюминидов железа.

***Типы интерметаллидов, относящиеся к перспективным конструкционным материалам и отличительных особенностей интерметаллидов системы Fe-Al***

Интерметаллидам, как правило, присущи следующие свойства [5]:

- высокая прочность, позволяющая этим сплавам сохранять свои свойства в условиях высоких температур эксплуатации;
- аномальная зависимость предела текучести от температуры;
- низкая плотность интерметаллидов, обеспечивающая высокое соотношение прочности и плотности;
- высокие значения упругих модулей;

- высокая стойкость к окислению.

Низкая пластичность – безусловно недостаток интерметаллидных сплавов, не позволяющий расширить номенклатуру конструкционных изделий, предназначенных для эксплуатации в условиях знакопеременных и ударных нагрузок. Скопление включений примесных материалов по границам зерен обуславливает хрупкое межзеренное разрушение и, как следствие, является причиной невысокой пластичности интерметаллидных сплавов. Среди методов повышения пластичности и эксплуатационных характеристик интерметаллидов алюминиевой группы, помимо обеспечения требований чистоты исходного материала по примесям (преимущественно легкоплавким), выделяют легирование, микролегирование и вспомогательную обработку, направленные на создание равновесных ненапряженных структур [6,7].

В целом, интерметаллиды превосходят обычные металлы по устойчивости к коррозии и трению, сохраняя свою структуру и прочность при высоких температурах. Химические и физические свойства интерметаллов в большей мере зависят от характера химической связи, чем от кристаллической структуры. Ионные интерметаллиды имеют черты характерные для солей: высокую температуру плавления, низкую электропроводность, наличие узких областей гомогенности на диаграммах состояния. Интерметаллидам с преобладающей металлической связью присущи свойства металлов, в частности, значительная способность к пластической деформации. На практике многие интерметаллические сплавы, применяемые в промышленности, отличаются пониженной пластичностью, что свидетельствует о повышенной хрупкости сплавов [8].

Высокий интерес к материалам типа «железо – алюминий» определяет комплекс их уникальных свойств, составляющими которого, как правило, являются: жаропрочность; стойкость против ползучести при высоких температурах; сопротивление высокотемпературному окислению, в том числе коксованию и науглероживанию; коррозионная стойкость на воздухе, в атмосферах серы и хлора; износостойкость; низкая стоимость. Значительным интересом к материалам Fe-Al обусловлен рост числа исследований по их созданию и установлению закономерностей формирования, структуры, свойств и перспектив применения в различных областях промышленности. В настоящее время очевидно, что железоалюминиевые материалы во многих случаях могут эффективно заменять дорогие никелевые сплавы, а также нержавеющей сталь. Высока перспектива их использования в промышленном машиностроении, в том числе в авиа-, судо- и автомобилестроении, а также медицине [9].

При сплавлении алюминия с железом образуются твердые растворы интерметаллидных соединений, например таких как:  $Fe_2Al_5$ , содержащий 54,71% Al;  $Fe_2Al_7$ , содержащий 62,93% Al;  $FeAl_2$ , содержащий 49,13% Al;  $FeAl$  содержащий 32,57% Al и др.. Формирование фаз  $FeAl_3$  и  $Fe_2Al_5$  преимущественно характерно для условий сварки. Наименьшей прочностью при растяжении обладают фазы  $FeAl_3$ ,  $FeAl_2$ ,  $Fe_2Al_7$  и  $Fe_2Al_5$ , а наибольшей -  $Fe_3Al$ ,  $FeAl$ . Ввиду этого в качестве износостойких материалов целесообразно применять сплавы, содержащие фазы  $Fe_2Al_7$ ,  $Fe_3Al$ ,  $FeAl$  [10].

Элементы системы Fe-Al характеризуются структурами:  $\alpha$ -Fe – кубическая объемно-центрированная;  $\gamma$ -Fe – кубическая гранецентрированная; Al – кубическая гранецентрированная. Алюминий и железо в равновесной среде образуют твердые растворы, интерметаллические соединения, эвтектику. Растворимость железа в алюминии незначительна (0,03 ат.% при эвтектической температуре 654°C), тогда как алюминий в 600 раз более растворим в железе – около 32%. При затвердевании сплавы Fe-Al образуют в структуре кристаллические соединения  $FeAl_3$  с содержанием Al ~ 77,5 ат.%. При содержании в сплаве до 1,8% железа и температуре 654 °C образуется эвтектика Al +  $FeAl_3$ , при дальнейшем увеличении содержания железа в сплаве возникают химические соединения следующих типов:  $Fe_2Al_5$ , содержащий 71 ат.% Al;  $FeAl_2$  содержащий 67,59 ат.% Al);  $FeAl$  содержащий 45,2 ат.% Al и др. [11, 12].

Строение и параметры кристаллической решетки в большей степени определяют механические и эксплуатационные свойства соединений типа Fe-Al. Таким образом, при соотношении числа электронов к числу атомов в решетке, равному 3/2, интерметаллические соединения образуют  $\beta$ -фазы с ОЦК структурой или со сложной кубической решеткой. К подобному соединению можно отнести сплав FeAl, который проявляет металлические свойства, но участие 4-электронов в межатомной связи предопределяет появление ковалентной составляющей, характеризующейся высокой стойкостью против окисления и газовой коррозии. Такие свойства позволяют использовать их в качестве жаростойких материалов и покрытий [13].

#### ***Методы получения железоалюминиевых интерметаллидов***

При производстве сплавов на основе алюминидов железа приходится преодолевать некоторые сложности ввиду резких различий температур плавления, испарения и плотности их составляющих. В вакуумно-дуговых, электронно-лучевых и иных печах, в которых требуется применение вакуума, сложно выплавлять сплавы ввиду высокой летучести Al [1].

Технология производства композиционных материалов и покрытий на основе сплавов Fe-Al также достаточно сложна и включает несколько стадий. Для их изготовления существуют следующие методы: дуговое и плазменное распыление, горячее изостатическое спекание и прессование в вакууме, самораспространяющийся высокотемпературный синтез и т.д. [14]. Так, например, с помощью электрошлакового переплава возможно выплавление слитков железоалюминидных сплавов, характеризующихся весьма широким диапазоном химического состава [15].

Самораспространяющийся высокотемпературный синтез (СВС) – перспективный и экономичный метод для изготовления порошков алюминидов железа. С помощью данного метода можно получать различные тугоплавкие соединения, интерметаллиды и композиции на их основе [16]. Технология получения СВС – порошков имеет несколько этапов: подготовка порошковой шихты, синтез, размол и классификацию полученного продукта по фракциям [17].

Альтернативным вариантом представляется получение прекурсоров интерметаллических систем из водных растворов электрохимическими и химическими методами с последующим искровым плазменным спеканием (ИПС).

ИПС-процесс построен на электрическом искровом разряде: высокоэнергетическая импульсная искра на короткое время генерирует искровую плазму при высоких локализованных температурах до 10000°C. Температуры ИПС-спекания на 200-500 °C ниже, чем при традиционном спекании. Парообразование, плавление и спекание происходит около 5-20 минут, включая нагрев и продолжительность выдержки при данной температуре [18].

На протяжении последних десятилетий получил развитие так называемый механохимический (МХ) метод синтеза интерметаллических соединений [19]. Этот метод перспективен для синтеза как равновесных, так и метастабильных фаз, пересыщенных твердых растворов и аморфных фаз. Он позволяет получать интерметаллиды из компонентов с высокими температурами плавления и кипения, а также из компонентов с большой разностью этих температур. Применяя МХ метод, можно вводить в бинарную систему третий компонент для придания интерметаллидам особых свойств. Особенностью веществ, полученных механохимическим методом, является их высокая дисперсность (в основном - это наноразмерные частицы) [20].

#### ***Области применения в промышленности алюминидов железа***

Интерметаллические соединения железа и алюминия используются в автомобилестроении в качестве заменителя нержавеющей стали в выхлопной системе, для изготовления отдельных узлов и дисков газовых турбин, функционирующих в температурном диапазоне 630-680°C [21]. Такие сплавы находят применение в качестве покрытий материалов для роликов транспортеров горячекатанной стальной полосы, резистивных нагревательных элементов, ввиду своей пластичности, прочности, высокому удельному электросопротивлению. Такие покрытия позволяют в значительной мере увеличить срок эксплуатации изделий, сократить их массу и затраты на легирующие элементы [15].

Сплавы на основе алюминидов железа применяются в металлургии для раскисления металлических расплавов (АЖ0,8, АЦЕ и др.) [22]. На этапе обработки в такие расплавы вводят составы Fe-Al, что обеспечивает высокое усвоение ими алюминия. Благодаря большей плотности, чем у алюминия, состав Fe-Al легче погружается в объем расплавов обрабатываемых металлов [23, 24].

Исследование сплавов типа Fe-Al направлено главным образом на замену нержавеющей сталей. В промышленности из алюминидов железа производят такие детали как лотки для термообработки, нагреватели, пористые фильтры, автомобильные поршневые клапаны, элементы автомобильных выхлопных систем, трубы теплообменников, емкости для катализа, автомобильные поршневые клапаны, элементы автомобильных выхлопных систем, нагреватели, трубы теплообменников [25].

#### ***Заключение***

Среди конструкционных материалов наибольшее значение имеют сплавы на основе железа и алюминия ввиду распространенности и относительно низкой стоимости их компонентов. Применение интерметаллидов представляется весьма перспективным в износостойких покрытиях, работающих в условиях абразивного износа, в резистивных нагревательных элементах, поскольку такие



сплавы обладают достаточной прочностью, пластичностью и высоким удельным сопротивлением.

Интерметаллиды типа Fe-Al характеризуются высокой стойкостью против окисления и газовой коррозии, что позволяет использовать их в качестве жаростойких материалов и покрытий. Для получения сплавов, композиционных материалов и покрытий на основе Fe-Al используют такие методы, как: горячее изостатическое прессование и спекание в вакууме, дуговое и плазменное распыление, самораспространяющийся высокотемпературный синтез.

Таким образом, изучение возможностей методов получения и использования алюминидов железа в промышленности и их синтез представляется высокоактуальной перспективной задачей, ориентированной на расширение тенденций замены технически «устаревших» материалов, при обеспечении принципов рационального использования ресурсов.

### Литература

1. А.И. Ковтунов, С.В. Мямин Интерметаллидные сплавы: электронное учебное пособие / Тольятти: Изд-во ТГУ, 2018. – 77 с.;
2. Ю.В. Титов, Д.С. Реченко, Н.С. Артеменко, А.Ю. Андрейчук Интерметаллидные соединения // Омский научный вестник. Машиностроение и машиноведение. – 2017. №1. С.38-40;
3. В.П. Горбатенко, Т.В. Новоселова Материаловедение / Невинномысск: ЭльДирект, 2018. – 324 с.;
4. А.Ф. Дресвянников, И.О. Григорьева Физикохимия наноструктурированных алюминийсодержащих материалов / Казань: Изд-во «Фэн» АН РТ, 2007. – 358 с.;
5. Д.С. Реченко, Ю.В. Титов, Н.С. Артеменко, И.А. Логачев Исследование обрабатываемости интерметаллидных соединений // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. №1. С.224-229;
6. А.В. Картавых, С.Д. Калошкин, В.В.Чердынцев, М.В. Горшенков, Т.А. Свиридова, Ю.В. Борисова, Ф.С. Сенатов, А.В Максимкин Применение микроструктурированных интерметаллидов в турбостроении. Часть I: Современное состояние и перспективы // Материаловедение. 2012. № 5. С.3-11;
7. Goda, DJRichards, NLChaturvedi, MC The effect of processing variables on the structure and chemistry of Ti-aluminide based LMCS // Sep 1 2002 | Materials science and engineering A-structural materials properties microstructure and processing 334 (1-2), pp.280-290;
8. Э.В. Клопов, Тайлашев А.С. Фазовые превращения в твердых растворах и сплавах // ОМА-2005: сб. тр. УШ Междунар. симпозиума, 2005. Ч. 1. С.170-175;
9. Ф.Г. Ловшенко, Г.Ф. Ловшенко, А.С. Федосенко Формирование фазового состава, структуры и свойств механически легированных композиционных порошков на основе системы «железо – алюминий» и покрытий из них // Вестник белорусско-российского университета. 2012. №1 (34). С.36-50;
10. Рябов, В.Р. Алитирование стали. – М.: Металлургия, 1973. – 240 с.;
11. В.С. Синельников, В.А. Поддергин, В.Н. Речкин Алюминиды. – Киев: Наука думка, 1965. – 657 с.;
12. Ф.А. Шанк, Структуры двойных сплавов. – М.: Металлургия, 1973. – 760 с.;
13. Минкевич А.Н. Химико-термическая обработка металлов и сплавов. 2-е. изд., перераб. – М.: Машиностроение, 1965. – 492 с.;



14. Talako, T. L., Mecanoactivated SHS of FeAl-Based Nanocomposite Powders // International Journal of Self-Propagating High-Temperature Synthesis. – 2009. – Vol. 18, № 2. P.125–132;
15. В.Н. Шаршин, С.В. Скитович, В.А. Кечин, Д.В. Субботин Исследование процессов растворения и насыщения алюминиевых расплавов железом // Литейное производство. 2007. № 2. С. 31-36;
16. А.И. Лецко, Т.Л. Талако, А.Ф. Ильющенко, Т.Ф. Григорьева, Н. З. Ляхов Механоактивация шихты для самораспространяющегося высокотемпературного синтеза алюминидов железа // Химия в интересах устойчивого развития Т.17. 2009. № 6. С.621-628;
17. В.Н. Гадалов, В.Г. Сальников, С.В. Шеставина, Л.Н. Серебровская, Ю.Г. Алехин Использование самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (свс) для повышения эксплуатационных свойств деталей и инструмента // Вестник Курской государственной сельскохозяйственной академии. 2012. С.130-133;
18. А.Ф. Дресвянников, М.Е. Колпаков Синтез интерметаллида Fe<sub>3</sub>Al // Вестник Казанского технологического университета. 2010. №1. С.7-10;
19. Т.В. Григорьева, А.П. Баранова, Н.З. Ляхов Механохимический синтез интерметаллических соединений // Успехи химии. 2001. №1. С.54 – 71;
20. В.А. Сурков Анализ методов получения интерметаллидов p, d – металлов // Вестник Казанского технологического университета. 2014. С.27-33;
21. Ч.Т. Симс Суперсплавы II: Жаропрочные материалы для аэрокосмических и промышленных энергоустановок. – М.: Металлургия, 1995. – 384 с.;
22. ГОСТ 4784-2019 Алюминий и сплавы алюминиевые деформируемые;
23. Шешуков О.Ю. Использование ферроалюминия для раскисления стали // Сталь. 2004. № 9. С.26-27;
24. Патент 2281343 РФ, МПК, С22С 33/04. Способ выплавки ферроалюминия / О.Ю. Шешуков, В.И. Жучков, И.Ю. Бурлак, Л.И. Леонтьев, Л.А. Маршук // Изобретения, 2006. №22;
25. N. Cinca, C.R.C. Lima, J.M. Guilemany An overview of intermetallics research and application: Status of thermal spray coatings // Journal of Materials Research and Technology. 2013. Vol. 2, iss. 1. P. 75–86.

**А.А. Буренин<sup>1</sup>, Л.В. Ковтанюк<sup>2</sup>, Г.Л. Панченко<sup>2</sup>**

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЯЖЕЛОГО СЛОЯ, УДЕРЖИВАЕМОГО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТЬЮ**

<sup>1</sup>*Институт машиноведения и металлургии*

*Дальневосточного отделения РАН, Комсомольск-на-Амуре*

<sup>2</sup>*Институт автоматики и процессов управления*

*Дальневосточного отделения РАН, Владивосток*

Рассматривается тяжелый слой материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами, помещенный на жесткую наклонную плоскость (рис.1). Контакт материала с этой плоскостью полагается жестким. Свободная поверх-

ность слоя подвергается нагреву, а также к ней прилагаются сжимающая и сдвиговая нагрузки.

Математическое моделирование деформационного процесса осуществляется в рамках модели больших упругопластических деформаций [1]. Вязкие свойства материала учитываются как на стадии деформирования, предшествующей пластическому течению, так и на стадии течения. Необратимые деформации накапливаются в материале с самого начала процесса деформирования и первоначально являются деформациями ползучести. Далее при достижении напряженным состоянием поверхности нагружения в материале начинают накапливаться вязкопластические деформации. Для описания поведения материала в условиях накопления им сначала необратимых деформаций ползучести, а затем пластических деформаций применяется подход о последовательном накоплении необратимых деформаций ползучести и пластичности, предложенный в работах [2-4]. Согласно данному подходу, необратимые деформации не разделяются на свои составляющие, а их различие связано с разными механизмами накопления. Считается, что на стадии деформирования, предваряющей пластическое течение, и при разгрузке вязкие свойства материала обеспечивают процесс ползучести и таким способом медленный рост необратимых деформаций. При быстром росте необратимых деформаций в условиях пластического течения вязкие свойства выступают в качестве механизма, тормозящего данное течение. Накопление необратимых деформаций, таким образом, происходит последовательно: первоначально в процессе ползучести, далее при пластическом течении и, наконец, снова за счет ползучести материала (при разгрузке). На упругопластических границах, продвигающихся по деформируемому материалу, происходит перемена в механизме роста необратимых деформаций с ползучести на пластичность и наоборот. Такая перемена возможна только в условиях непрерывности необратимых деформаций, что накладывает требование о согласованности законов ползучести и пластичности.

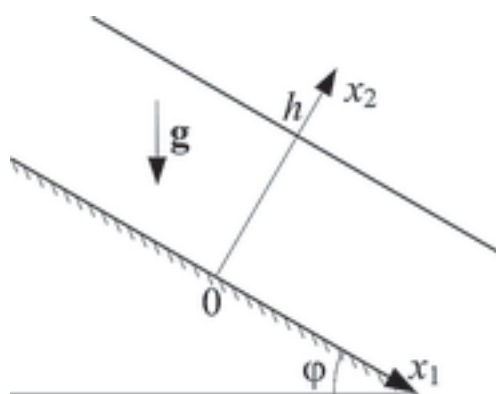


Рис. 1. Тяжелый слой на наклонной плоскости

В качестве закона ползучести выбирается классический степенной закон ползучести Нортона [5]. В процессе накопления материалом пластических деформаций используется условие пластичности Треска с учетом вязкого сопротивления пластическому течению [6].

При воздействии температуры на материал от нее зависят и параметры материала. Поэтому при расчетах учитывается, что предел текучести, коэффициент вязкости и параметры ползучести зависят от температуры.

Рассчитываются деформации, напряжения и температура в каждый момент времени процесса деформирования. Указываются условия возникновения и завершения вязкопластического течения и закономерности продвижения упруго-пластических границ как при активном процессе нагрева и нагружения, так и при остывании и при разгрузке.

### Литература

1. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Большие необратимые деформации и упругое последствие – Владивосток: Дальнаука, 2013. – 312 с.;
2. Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 470. – № 3. – С. 275-278;
3. Бегун А.С., Ковтанюк Л.В., Лемза А.О. Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования // Известия РАН. МТТ. – 2018. – № 1. – С. 103-112;
4. Begun A.S, Burenin A.A, Kovtanyuk L.V, Lemza A.O. On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // Archive of Applied Mechanics. – 2020. – Vol. 90. – P. 829-845;
5. Norton F.H. The Creep of Steel at High Temperatures – New York: McGraw Hill Book Company, 1929. – 110 p.;
6. Знаменский В.А., Ивлев Д.Д. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 114-118.

**Н.П. Великанова<sup>1</sup>, П.Г. Великанов<sup>1,2</sup>, Н.А. Протасова<sup>3</sup>, А.А. Галимарданов<sup>2</sup>**

### **ОЦЕНКА ДОЛГОВЕЧНОСТИ РАБОЧИХ ЛОПАТОК И ДИСКОВ ТУРБИН ГАЗОГЕНЕРАТОРА НАЗЕМНОЙ ГТУ ДЛЯ ГПА НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПОДХОДА**

<sup>1</sup>*Казанский национальный исследовательский технический университет  
им. А.Н. Туполева-КАИ,*

<sup>2</sup>*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*

<sup>3</sup>*ООО «АХТЗ», Казань*

Методика основана на анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) рабочих лопаток (РЛ) и дисков турбин, а также изменении НДС указанных деталей в процессе длительной эксплуатации в соответствии с особенностями работы наземных ГТУ для газоперекачивающего агрегата (ГПА). В работе исследуются статистические данные о механических характеристиках и долговечности материала РЛ турбин - жаропрочного сплава ЖС6У-ВИ на никеле-

вой основе и дисков - жаропрочного деформируемого сплава ЭИ698-ВД на никелевой основе.

Объектом исследования в работе являются РЛ и диски первой ступени турбины высокого давления (ВД) газогенератора серийных одноконтурных двухвальных газотурбинных наземных установок НК-16СТ для ГПА, разработанных на основе конвертированных авиационных двигателей семейства НК-8-2У конструкции Н.Д. Кузнецова. Опыт создания приводных агрегатов на базе авиационного двигателя показывает, что до 75% узлов и деталей базового двигателя удается сохранить [1]. Изменения проводятся в узлах, связанных с новым назначением изделия, сменой вида используемого топлива и появлением в составе конвертированного двигателя силовой турбины, которая создается заново.

РЛ и диски турбин авиационных ГТД и наземных ГТУ являются основными деталями, во многом определяющими получение высоких рабочих параметров и ресурса двигателей. Разрушение РЛ и дисков турбины, как в полете, так и на газоперекачивающих станциях, приводит, как правило, к значительным разрушениям внутри силовой установки. Поэтому проблема точного прогнозирования долговечности РЛ и дисков турбины, сводящего к минимуму вероятность разрушения, всегда была и остается актуальной на всех стадиях создания, доводки и эксплуатации двигателей.

В процессе длительной эксплуатации происходит изменение основных параметров работы двигателей, обусловленное деградационными изменениями (износ, эрозия и коррозия, выработка уплотнений, загрязнение и изменение размеров деталей проточной части). Вследствие этого изменяются основные параметры работы двигателей, в частности частот вращения роторов и температур газа в турбине, определяющих НДС, что необходимо учитывать при прогнозировании долговечности, особенно для двигателей большого ресурса, характерного для гражданской авиации и наземных ГТУ.

Исходные характеристики механических свойств и долговечности материалов обладают определенным рассеянием в связи с производственными факторами, а под действием деформационного и температурного старения, протекающего в процессе эксплуатации двигателя, имеют тенденцию к изменению, что предопределяет необходимость применения методов теории вероятности и математической статистики для прогнозирования долговечности ответственных деталей, какими являются РЛ и диски турбин.

Для НК-16СТ введена межрегламентная наработка в 3000 часов с проведением мероприятий: диагностика деталей и промывка проточной части специальным составом, регулировка параметров двигателя. Это позволяет восстановить параметры работы двигателей до исходных значений.

Соответствие результатов расчетного исследования НДС РЛ и дисков турбин их реальной нагруженности подтверждается данными их металлургического исследования после длительной эксплуатации [2, 3]. Т.к. НК-16СТ эксплуатируется в различных климатических зонах, в интервале температур от  $-50^{\circ}\text{C}$  до  $+45^{\circ}\text{C}$ , для получения информации о нагруженности РЛ и дисков турбин и

ее статистических характеристиках были построены приближенные зависимости, которые для 100 значений условий эксплуатации и вычисленных по ним 100 значений действующих в РЛ и дисках турбин напряжений были подвергнуты статистической обработке. Для длительного статического нагружения, характерного для РЛ и дисков турбин, был использован, предложенный И.А. Биргером [4], двумерный вероятностный критерий разрушения.

Предложенный метод прогнозирования долговечности деталей турбин по параметру длительной прочности на основе вероятностного подхода позволяет определять долговечность РЛ и дисков турбин авиационных двигателей и газогенератора наземной ГТУ для ГПА при любом уровне эксплуатационной наработки. Метод применим для оценки индивидуального ресурса при эксплуатации по техническому состоянию.

### Литература

1. Зрелов В.А., Карташов Г.Г. Двигателя НК. Самара: Самар. Дом печати, 1999. 288 с.;
2. Протасова Н.А., Великанова Н.П., Великанов П.Г., Ахмадеев А.А. Влияние эксплуатационной наработки на свойства и микроструктуру рабочих лопаток турбины двигателей ГПА // Насосы. Турбины. Системы. № 1 (30). Воронеж, 2019. С. 18-25;
3. Протасова Н.А., Великанова Н.П., Великанов П.Г., Ахмадеев А.А., Салих И.Ш.С. Закономерности снижения значений прочностных характеристик материала дисков турбины двигателей газоперекачивающих агрегатов после различных сроков эксплуатации // Известия вузов. Авиационная техника. № 2. Казань, 2020. С.38-44;
4. Биргер И.А. Вероятность разрушения и запасы прочности при многомерных критериях разрушения//Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении: Сб. статей. Вып.3. М.,1985. С.7-22 (Тр. ЦИАМ:№ 1109).

**П.Г. Великанов**<sup>1,2</sup>

## НЕПРЯМОЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

<sup>1</sup>*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*

<sup>2</sup>*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань*

Задачи расчета, сочетающих в себе легкость, экономичность, высокую прочность и надежность, тонкостенных конструкций актуальны для современного машиностроения. Задачи теории пластин и оболочек относятся к классу краевых задач, аналитическое решение которых в силу различных обстоятельств (нелинейность дифференциальных уравнений, сложность геометрии и граничных условий, неоднородность, многосвязность области и др.) определить невозможно. Решить эту проблему помогают численные методы. Среди численных методов незаслуженно мало внимания уделено методу граничных эле-

ментов. В связи с этим дальнейшее развитие непрямого метода граничных элементов (метода компенсирующих нагрузок) (НМГЭ) для решения задач устойчивости изотропных пластин, основанных на применении предварительно вычисленных точных фундаментальных решений, является актуальным.

Рассматриваются малые деформации тонкой линейно-упругой пластинки, деформирование которой описывается моделью, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява в рамках теории малого изгиба [1].

Дифференциальное уравнение изгиба тонкой изотропной линейно-упругой пластины, лежащей на упругом основании и находящейся под действием температурного поля, имеет вид [1]:

$$D\nabla^2\nabla^2w = p_z(x, y) - p(w) - (1 + \nu) \frac{\alpha_t}{h} \Delta T,$$

где  $\nabla^2$ - оператор Лапласа;  $w$  – прогиб точки срединной поверхности пластины;  $p_z$  – интенсивность нормального давления, действующего на пластину;  $p$  – реактивное давление, которое зависит от упругого основания, на котором лежит пластина;  $\nu$  – коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации)  $\alpha_t$  – коэффициент линейного температурного расширения;  $h$  – толщина пластины;  $\Delta T$  – изменение температуры между поверхностями пластины.

Рассмотрим упругое основание, которое характеризуется следующей функцией:

$$p(w) = K_1w + K_2w^2 + K_3w^3 - g_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - g_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

где  $K_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и  $g_i$  ( $i=1,2$ ) – коэффициенты упругого основания.

В работе рассматривается случай всестороннего сжатия квадратных и круглых платин. Можно легко показать, что эта задача устойчивости аналогична задаче изгиба изотропной пластины (в отсутствии термомеханического нагружения) с упругим основанием, для которого  $K_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и  $g_1 = g_2 = g \neq 0$ . Для решения поставленной задачи НМГЭ предварительно было определено (методом двумерного интегрального преобразования Фурье, методом последовательного интегрирования и методом выделения особенностей [2, 3]) фундаментальное решение дифференциального уравнения.

Для отдельных случаев граничных условий для первоначального дифференциального уравнения в частных производных удалось осуществить снижение порядка. Для решения новой задачи НМГЭ также предварительно было определено точное фундаментальное решение дифференциального уравнения.

Правильность определения всех фундаментальных решений была проверена с помощью формулы дифференцирования обобщенных функций [4] и с помощью проверки равновесия пластины, ограниченной кривой, при действии на нее единичной нагрузки. Результаты проверок подтверждают правильность найденных фундаментальных решений.

Искомые критические нагрузки задач устойчивости были определены из равенства нулю определителя, составленного из функций при компенсирующих нагрузках. Вектор перемещений пластин определяется из решения системы линейных алгебраических уравнений, описывающих изгиб пластины. Решение системы выполняется НМГЭ, в соответствии с которым область, представляющая план полой оболочки, дополняется до бесконечной плоскости, и на кон-

туре, который ограничивает область, к бесконечной пластинке прикладываются компенсирующие нагрузки. В работе приведены интегральные уравнения НМГЭ.

Для отработки методики были решены несколько задач устойчивости изотропных пластин и их результаты сравнены с известными решениями другими методами [5]. Таким образом, с помощью НМГЭ были получены высокоточные результаты, еще более сходящиеся к точным решениям при увеличении числа граничных элементов.

### Литература

1. Великанов П.Г. Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропных пластин, лежащих на сложном двухпараметрическом упругом основании // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. Т. 8, вып. 1. Саратов: ООО "Принт", 2008. С.36-42;
2. Великанов П.Г., Артюхин Ю.П., Куканов Н.И. Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов // Актуальные проблемы механики сплошных сред. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2020. С.105–111;
3. Великанов П.Г., Халитова Д.М. Определение фундаментального решения задачи среднего изгиба анизотропной пластины // Межд-ая научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа — 2021". С.161-163;
4. Артюхин Ю.П., Грибов А.П. Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов. Казань: Фэн, 2002. 199 с.;
5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

**П.Г. Великанов**<sup>1,2</sup>

### МЕТОД КОМПЕНСИРУЮЩИХ НАГРУЗОК ДЛЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ИЗГИБА АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

<sup>1</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет,

<sup>2</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань

В ответственных конструкциях, применяемых, например, в авиа-, судостроении, в химическом машиностроении, часто встречаются элементы, состоящие из анизотропных материалов с приложенными к ним сосредоточенными силой или моментом. Исследования показывают, что в местах приложения таких нагрузок имеет место резкая концентрация напряжений, а остальная часть пластины практически не работает. С целью выравнивания внутренних силовых факторов, а также обеспечения требуемой прочности и жесткости конструкции, в местах приложения локальной нагрузки приходится усиливать пластину с помощью жесткой накладки (штампа).

Существуют несколько путей решения контактных задач. Более простым представляется путь, если удастся определить точное фундаментальное решение (ФР) для пластины (для этого в работе были использованы такие методы,

как метод двумерного интегрального преобразования Фурье, метод последовательного интегрирования, метод выделения особенностей [1]). Точное ФР значительно сокращает объем вычислительной работы благодаря тому, что заранее выполняются краевые условия и условия сопряжения решений на границе области контакта. Остается лишь сформулировать условия совместности перемещений в области контакта.

Методами фотоупругости было подтверждено, что в малой окрестности сосредоточенной силы, приложенной к тонкостенному элементу, напряженное состояние близко к тому, которое наблюдается в полуплоскости под действием сосредоточенной силы. В результате представим ФР для произвольной пластины в виде [2]:  $\vec{G}^{(k)}(\vec{r}, \vec{r}') = \vec{G}_0^{(k)}(\vec{r}, \vec{r}') + \vec{G}_n^{(k)}(\vec{r}, \vec{r}')$ , где  $\vec{G}_0^{(k)}(\vec{r}, \vec{r}')$  - вектор-функция перемещения границы полупространства от действия единичной силы в направлении  $k$  ( $k=1,2,z$ ), приложенной в точке  $\vec{r}'$ ,  $\vec{G}_n^{(k)}(\vec{r}, \vec{r}')$  - вектор-функция влияния, построенная по классической теории пластин. Первое слагаемое непрерывно всюду, за исключением точки  $\vec{r} = \vec{r}'$ , где оно имеет особенность порядка  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ . Второе слагаемое всюду непрерывно и ограничено по модулю. Поэтому при такой постановке интегральное уравнение условия контакта становится сингулярным интегральным уравнением первого рода. Такие уравнения путем регуляризации сводятся к уравнениям Фредгольма второго рода, и задача становится математически и физически корректной. В работе рассматриваются контактные задачи без учета касательного взаимодействия между объектами. Для таких задач возможен следующий путь упрощения: замены сингулярного ядра для полупространства на ядро для слоя постоянной толщины  $h/2$ , моделируемого упругим основанием с одним коэффициентом постели. Такая замена для тонких оболочек вполне оправдана и дает решения, хорошо согласующиеся с решениями теории упругости.

Таким образом, ФР примет вид:  $\vec{G}^z(\vec{r}, \vec{r}') = \vec{G}_n^z(\vec{r}, \vec{r}') + k \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ , где  $\delta(\vec{r}, \vec{r}')$  -  $\delta$ -функция Дирака,  $k$  - коэффициент постели основания толщиной  $h/2$ . Для малых  $h$  этот коэффициент может быть получен из асимптотического решения для слоя и равен [3]  $k = h(1+\nu)(1-2\nu)/(2E(1-\nu))$ .

Пусть жесткому плоскому штампу придадут перемещения, в результате чего он описывается линейной функцией  $f(x, y) = \alpha + \gamma_x x + \gamma_y y$ . Начало координат - в центре штампа, тогда  $\alpha$  будет осадкой штампа, а  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$  - тангенсы углов наклона штампа относительно центра в направлении осей.

Штамп действует на пластину посредством искомым нормальных контактных напряжений, которые обозначим  $\sigma(\chi)$ , в области  $S$ . По методу компенсирующих нагрузок (МКН) прогиб пластины ищем в виде:

$$w(t) = \int_S G(t, \chi) \sigma(\chi) dS(\chi) + \int_\Gamma G(t, \zeta) q(\zeta) d\Gamma(\zeta) - \int_\Gamma \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n(\zeta)} m(\zeta) d\Gamma(\zeta), \quad t \in \Omega,$$

где  $\sigma(\chi)$  - контактное напряжение, а  $q(\zeta)$  и  $m(\zeta)$  - компенсирующие нагрузки;  $G(t, \zeta)$  - фундаментальное решение задачи изгиба анизотропной пластины.



В полученном представлении прогиб пластины неизвестными являются три подынтегральных функции  $\sigma(\chi)$ ,  $q(\zeta)$  и  $m(\zeta)$ . Для их определения используем два стандартных граничных условия закрепления пластины и условие контакта (т.о. получим систему разрешающих интегральных уравнений МКН). Условие контакта ставится по перемещениям исходя из того, что в области контакта сторона пластины, на которой закреплен жесткий штамп, принимает заданные форму и положение штампа. В области контакта прогиб срединной плоскости пластины получим в виде (условие контакта):  $k\sigma(t) + w(t) = \alpha + \gamma_x x + \gamma_y y, t \in \mathcal{S}$ . Слагаемое  $k\sigma(t)$  имеет смысл прогиба контактной поверхности пластины вследствие обжатия, возникающего от действия контактных напряжений.

Для отработки методики были решены несколько контактных задач.

### Литература

1. Великанов П.Г., Артюхин Ю.П., Куканов Н.И. Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов//Актуальные проблемы механики сплошных сред. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2020. С.105–111;
2. Артюхин Ю.П., Малкин С.А. Решение МГЭ контактных задач взаимодействия пластин с жесткими телами//XX Международная конференция. Математическое моделирование в МСС. Методы граничных и конечных элементов. Тр. Т. 2. С.-Петербург. 2003. С.39-44;
3. Артюхин Ю.П., Грибов А.П. Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов. – Казань: Фэн, 2002. – 199 с.

**Е.Е. Абашкин<sup>1</sup>**

## **ТЕХНОЛОГИЯ СВАРКИ ЛИСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ ЗАСЫПКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ АЛЮМОТЕРМИТНОГО ПОРОШКА**

<sup>1</sup>*Институт машиноведения и металлургии  
Дальневосточного отделения РАН, Комсомольск-на-Амуре*

В современном производстве при сборке металлоконструкций большая часть работ осуществляется с помощью сварки. Одной из проблем является сварка листов толщин от 8 мм и более. Применяемые способы сварки имеют ряд недостатков, в том числе: трудоёмкость процесса, расход дорогостоящих сварочных материалов, повышенные затраты электроэнергии, характерные для автоматической сварки под слоем флюса. Многопроходность при сварке изделий больших толщин влияет на конечное качество металла сварного соединения.

Анализ и рассмотрение задач совершенствования сварочных технологий и оборудования, позволяет выделить перспективное направление использование алюмотермитных сварочных материалов для получения высококачественной, экономичной и технологичной продукции [1]. Разработка новых сварочных ма-

териалов и методов сварки направлена на обеспечение условий для экономии электродного металла, снижения себестоимости изготовления сварных изделий, использования отходов предприятий металлургической отрасли.

Поставленным требованиям отвечает технология сварки с применением алюмотермитного наполнителя [2]. Использование наполнителя при автоматической сварке под слоем флюса позволит уменьшить количество проходов при сварке толстых стальных листов, сократить расход сварочных материалов, обеспечить значительное снижение трудозатрат при производстве продукции.

Термитный наполнитель состоит из алюминиевого порошка, окалины ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), содержащей не менее 25% О и 70% Fe и легирующих компонентов. Процесс алюмотермитного горения проходит по экзотермическому типу реакций. Продуктами реакции являются восстановленный металл и шлак (электрокорунд -  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ). Выход восстановленного металла (термитного) из исходной железной окалины составляет не менее 50%. Окислы железа восстанавливаются до железа с ферритной структурой [2]. Электрокорунд обладает большой теплоемкостью, защищает сварочный шов и околошовную зону от быстрого охлаждения. При введении в алюмотермитный наполнитель легирующих элементов можно получать электродный металл требуемого химического состава [3].

Экспериментальная отработка метода осуществлялась свариванием пластин с разделкой кромки по типу С18 ГОСТ 8713-79 «Сварка под флюсом. Соединения сварные. Основные типы, конструктивные элементы и размеры» толщиной 10 мм, шириной 250 мм и длиной 600 мм. Материал свариваемых элементов - сталь Ст3сп. Процесс производился при помощи агрегата АДФ-1000 методом автоматической сварки под слоем флюса. Алюмотермитный наполнитель засыпается в разделку кромки соединяемых пластин в стык согласно схемы, представленной на рис.1.

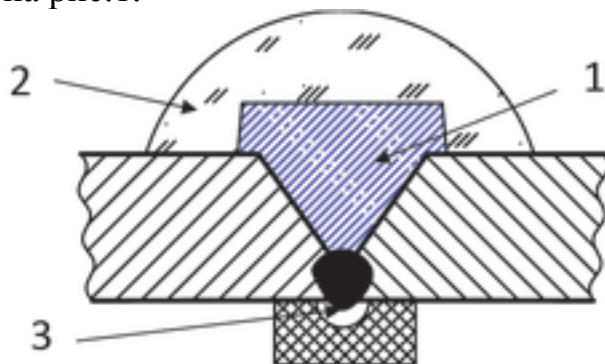


Рис. 1. Схема сварки с термитным наполнителем:

1 – алюмотермитный наполнитель, 2 – сварочный флюс; 3 – корень шва

При сварке образующийся алюмотермитный металл под действием электромагнитных сил дуги, переносится в зону сварочной ванны. Для восстановления алюмотермитного металла не требуется изменять параметры режима сварки по классическому способу. Экспериментально установлена возможность сварки на пониженных токах, при меньших (в сравнении с традиционным процессом) расходах электродного материала (Св-08а). По окончании горения дуги экзотермическая реакция прекращается в зоне сварочной ванны и производится подварка кратера шва. Образованный шлак с электрокорундом облада-

ет значительной теплоемкостью, что позволяет избежать быстрого охлаждения металла сварного шва и околошовной зоны, обеспечивая сопутствующую термообработку.

В эксперименте отслеживалось влияние геометрических параметров засыпки на выход алюмотермитного металла с учетом доли (около 15%) электродного металла. Выявлено, что засыпка по площади поперечного сечения 650 мм<sup>2</sup> при сварке проволокой диаметром 3 мм обеспечивает оптимальный выход сплава. Масса наплавленного металла за один проход составила 75 г/см<sup>2</sup> сварного шва против 15-17 г/см<sup>2</sup> при традиционном способе. 5-кратное увеличение массы наплавленного металла за один проход позволяет снизить расход сварочных материалов, электроэнергии, трудоемкости изготовления конструкции.

*\*Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.*

### Литература

1. Новохацкий В.А., Жуков А.А., Макарычев Ю.П. / Малоотходная технология производства стальных отливок с экзотермическими прибылями. - М.: Машиностроение, 1986. С. 16-24;

2. Жилин С. Г., Комаров О. Н., Ткачева А. В. / Влияние теплового режима совместного электродугового и алюмотермического воздействия на формирование структуры и свойств наплавленного металла // Вестник ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение. – 2018. – Т. 20. – № 2. – С. 62-74;

3. Abashkin E. E., Zhilin S. G., Komarov O. N. Structure formation of the heat-affected zone of the permanent joint made by the automatic submerged arc welding with the use of the flux-cored wire with thermite filler // Cite as: Proceedings of the International Conference on Advanced Materials with Hierarchical Structure for New Technologies and Reliable Structures 2019 AIP Conf.Proc. 2167, 020001-1-020001-4.

**А.М. Сергеева<sup>1</sup>, Н.С. Ловизин<sup>1</sup>**

## **ПОЛУЧЕНИЕ МЕТАЛЛОИЗДЕЛИЙ ИЗ ДЕФОРМИРУЕМЫХ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ, ПУТЕМ НЕПРЕРЫВНОГО ЛИТЬЯ В КРИСТАЛЛИЗАТОР С ПОДВИЖНЫМИ СТЕНКАМИ**

<sup>1</sup>*Институт машиноведения и металлургии*

*Дальневосточного отделения РАН, Комсомольск-на-Амуре*

Алюминиевые сплавы занимают одно из ведущих мест в аэрокосмической технике, автомобилестроении, кораблестроении, строительстве, легкой промышленности. Необходимо отметить, что значимость алюминиевых сплавов как конструкционных материалов постоянно растет. Большое внимание уделяется развитию новых инновационных технологий получения полуфабрикатов из алюминия и алюминиевых сплавов. Получение высококачественных металлоизделий за короткий производственный цикл – важная и актуальная междисциплинарная задача.

Уровень развития современного машиностроения требует разработки высокотехнологичных материалов и экономически выгодных технологий для их получения. Наиболее важными требованиями, предъявляемыми к конструкционным материалам, являются максимальная прочность, максимальный ресурс работы, высокая надежность, минимальный вес. Разработка новых материалов сопряжена с необходимостью проведения исследований их свойств. Изучение закономерностей механики сплавов в период затвердевания и формообразования позволяет успешно бороться с дефектами в получаемых металлоизделиях. Знание таких закономерностей позволяет планировать и разрабатывать новые технологии получения металлических заготовок и регулировать существующие технологические процессы.

Получение металлоизделий с помощью непрерывного литья известно давно. Известно, что при кристаллизации под действием внешнего давления на затвердевающий расплав у получаемых металлоизделий повышаются механические характеристики. Процесс совмещения непрерывного литья и внешнего воздействия на затвердевающий расплав, безусловно, можно отнести к перспективным технологиям получения металлоизделий, но такой процесс мало изучен, так как достаточно сложно разработать устройство, которое бы реализовывало такую технологию. В данной работе рассматривается получение металлоизделий из сплава Д1 путем непрерывного литья в кристаллизатор с подвижными стенками [1]. Ранее рассматривался вопрос о положительном влиянии такого совмещения технологий на повышение прочностных свойств и пластичности технического чистого алюминия АД0 [2, 3].

На рис.1 представлено устройство, реализующее процесс циклического внешнего воздействия на кристаллизирующийся расплав. Обжимные стенки 1 состоят из вертикального участка 2 и наклонного участка 3. Две боковые стенки 4, совершающие возвратно-поступательное движение вверх-вниз, обеспечивая продвижение готового металлоизделия вниз. Обжимные стенки оснащены системой охлаждения, а также обеспечивают ограничение внутренней области кристаллизатора и поверхностями 2 осуществляют деформацию кристаллизуемого расплава.

Организованный подобным образом кристаллизатор с подвижными стенками позволяет в пределах его внутреннего объема выделить зону кристаллизации и обжата. Приводные валы с эксцентриковыми втулками приводят в движение обжимные и боковые стенки.

Герметичность стыков между составными частями кристаллизатора обеспечивается неподвижными опорными плитами, которые прижимают обжимные и боковые стенки друг к другу. Устройство обеспечивает одноручевой выход металлоизделия вниз под установку.

Совмещение в устройстве процесса непрерывного литья с циклически повторяющимся внешним воздействием на кристаллизирующийся расплав, находящийся в кристаллизаторе, позволяет получать металлоизделия заданного поперечного сечения сразу по выходу из кристаллизатора. Внешний вид получаемых металлоизделий представлен на рис.2.

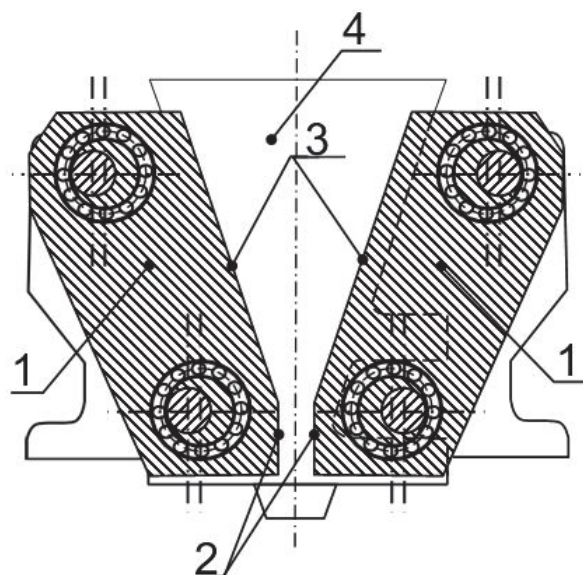


Рис. 1. Схема устройства



Рис. 2. Внешний вид металлоизделия из сплава Д1

Основная часть дефектов в заготовках возникает в процессе фазового перехода сплава из жидкого состояния в твердое. При объемном механизме кристаллизации под действием циклически повторяющегося механического внешнего воздействия в определенные моменты времени большие объемы сплава за твердеющих заготовок находятся в двухфазном жидко-твердом состоянии и компенсация дефектов может осуществляться только за счет перемещения двухфазной массы.

В процессе исследований выяснено, что в полученных металлоизделиях оксидные и шлаковые включения обнаруживаются не по всему объему заготовки, а сосредоточены в областях расположенных ближе к поверхности. Немаловажным является тот факт, что по всему объему заготовки отсутствуют усадочные и газовые поры.

В получаемых металлоизделиях преобладает мелкозернистая структура, границы зерен широкие, состоящие из сплетения дислокаций и содержащие большое количество петель, дисков, диполей. На рис.3 представлена микроструктура металлоизделий из сплава Д1, полученных путем непрерывного литья в кристаллизатор с подвижными стенками.

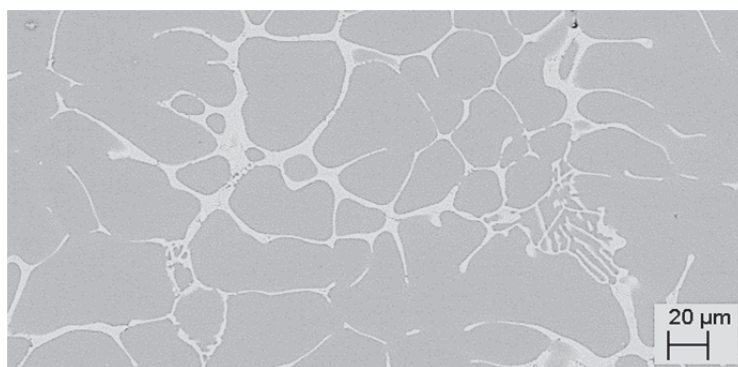


Рис. 3. Структура металлоизделий из сплава Д1, полученных путем непрерывного литья в кристаллизатор с подвижными стенками

При циклическом воздействии на затвердевающий расплав, в твердой фазе возникают напряжения, превышающие предел текучести при сжатии и приводящие к микропластическим деформациям. Сформированная при таком воздействии структура способствует не только повышению механических свойств заготовок, но также влияет на повышение коррозионной стойкости и жаропрочных свойств [5, 6].

Исследования механических свойств полученных образцов проводили путем испытания на разрыв плоских образцов и измерения твердости по Бринеллю. Полученные результаты показывают, что рассматриваемая технология влияет на изменение механических свойств сплава Д1. Полученные плоские заготовки приобрели повышенные механические свойства: временное сопротивление разрыву  $\approx 240$  МПа, предел текучести  $\approx 155$  МПа, относительное удлинение  $\approx 25\%$ , твердость по Бринеллю  $\approx 781$  НВ(МПа).

Сравнивая твердости сплава Д1 в состоянии поставки (временное сопротивление разрыву  $\approx 193$  МПа, предел текучести  $\approx 108$  МПа, относительное удлинение  $\approx 10\%$ , твердость по Бринеллю  $596,39 \div 614,07$  НВ(МПа)) и полученных заготовок можно с уверенностью утверждать, что твердость сплава увеличилась на 28,9-32,3%, причем такое улучшение свойств, происходило сразу после выхода заготовки из кристаллизатора, без введения дополнительных процедур обработки слитка. Необходимо отметить, что твердость полученных плоских заготовок из сплава Д1 отстает от максимально возможной твердости сплава Д1 всего лишь на 17%.

Таким образом, технология совмещения непрерывного литья металлов с одновременной их деформацией в твердожидком состоянии, можно отнести к перспективным технологиям [7], которые способствуют повышению качества металлоизделий в процессе формообразования и заслуживают быть предметом дальнейших исследований.

*\*Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.*

### Литература

1. Патент РФ № 2041011. Устройство для непрерывного литья заготовок / Одинокое В.И. Опубл. 09.08.1995. Бюл. №22;
2. Н.С. Ловизин, А.М. Сергеева, А.А. Соснин Исследование микроструктуры металлоизделий из сплава АД0, полученных с применением новой технологии непре-



рывного литья // Актуальные проблемы современной науки в 21 веке: сборник материалов 8-й международной научно-практической конференции, (г. Махачкала, 30 августа, 2015 г.) – Махачкала: ООО "Апробация", 2015. – С. 6–7;

3. А.М. Сергеева, Н.С. Ловизин, А.А. Соснин, В.И. Одинокое Исследование структуры и механических свойств металлоизделий из сплава АД0, полученных с помощью новой технологии непрерывного литья // Перспективные материалы. 2016, № 4. С. 13-18;

5. Б.А. Колачев, В.И. Елагин, В.А. Ливанов Металловедение и термическая обработка цветных металлов и сплавов. М.: МИСИС, 1999, 414 с.;

6. В.И. Добаткин Свойства конструкционных алюминиевых сплавов в рекристаллизованном и полигонизованном состояниях // Известия АН СССР. Металлы, 1982, № 2, с. 76 – 81.;

7. М.Я. Бровман Совмещенные процессы непрерывного литья и прокатки. Саарбрюккен (Германия): LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. - 626 с.

**С.Г. Жилин<sup>1</sup>, Н.А. Богданова<sup>1</sup>**

## **ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ПРЕССОВОК ИЗ ВОСКООБРАЗНЫХ МАТЕРИАЛОВ В ПОЛЕ ДЕЙСТВИЯ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ**

<sup>1</sup>*Институт машиноведения и металлургии*

*Дальневосточного отделения РАН, Комсомольск-на-Амуре*

В процессах литья по выплавляемым моделям повышение геометрической точности литых заготовок обеспечивается в результате формирования моделей прессованием порошков воскообразных материалов [1]. В ходе рассматриваемого процесса реализуется ряд мероприятий, направленных на устранение дефектов, возникающих по причине теплофизических явлений в материалах, сопровождающих ряд технологических этапов получения отливки. Среди таких явлений следует отметить усадку модельного материала, образование трещин в слоях керамической формы и ее разрушение.

В результате уплотнения порошка формируется поверхность, геометрия которой регламентирована параметрами образующей полости пресс-матрицы и количеством узлов, обеспечивающих направленную передачу нагрузки от прессующих пуансонов материалу. При формировании тел вращения сложной конфигурации использование пресс-матрицы, обеспечивающей несколько направлений уплотнения становится затруднительно. Решение проблемы видится в использовании процессов, обеспечивающих уплотнение материала без пресс-пуансонов, за счет его центробежного нагружения [2]. При реализации такого процесса в экспериментальных условиях для достижения требуемой плотности прессовки из воскообразного модельного материала (например фракции 0,4 мм) необходимо обеспечить вращение пресс-матрицы с частотой 6000-15000 об/мин.

Обеспечение такой скорости вращения усложняет конструкцию центробежной машины, энергетически затратно. Для решения проблемы при формирова-

нии выплавляемой модели тела вращения процесс уплотнения разбивается на 2 этапа [3]: первый - дозированная подача материала в виде порошка в форму и ее вращение до скорости 3000-4000 об/мин, после чего форму останавливают; на втором этапе в форму с размещенным и уплотненным в ней материалом помещают металлические шарики диаметром 1-12 мм и вновь вращают со скоростью 3500-4000 об/мин. Дозированная подача воскообразного модельного материала в форму обеспечивает требуемый объем выплавляемой модели. Технологически приемлемая плотность выплавляемой модели с пористостью в диапазоне 0-12%, получаемой прессованием, например, порошка ПС50/50, при которой достигаются требуемые размерно-геометрические и прочностные характеристики прессовки, принадлежит диапазону  $0,810 \div 0,921 \text{ г/см}^3$ . Такая плотность по данным работы [4] обеспечивает выплавляемым моделям пористость в диапазоне 0-12%, что позволяет повысить трещиностойкость оболочковых форм, сформированных по таким выплавляемым моделям. По аналогии с материалом ПС50/50 пористые модели, выполненные, например из парафина марки Т1 с пористостью 0-12% будут иметь плотность в диапазоне  $0,76-0,86 \text{ г/см}^3$ .

Получение выплавляемой модели с требуемой плотностью определяется не столько массой уплотняемого материала, сколько массой металлических шариков, а также частотой вращения формы и величиной ее внутреннего радиуса. Значения рабочей частоты вращения формы, внутреннего радиуса формы, массы дозированного воскообразного материала и металлических шариков определены экспериментально и представлены в таблице 1.

В таблице 1 также приведены экспериментально полученные значения плотности использованного в эксперименте воскообразного материала при центробежном уплотнении, при различных частотах вращения для получения выплавляемой модели из материала марки Т1. Из таблицы следует, что требуемая плотность прессовки  $0,76-0,86 \text{ г/см}^3$  достигается при условиях, характерных для второго этапа ее формирования.

Таблица 1

№ этапа	Масса металлических шариков, г	Масса воскообразного материала, г	Скорость вращения, об/мин	Плотность модели, г/см
1	0	50	1000	0,374
			2000	0,383
			3000	0,405
			4000	0,421
			4500	0,432
2	125	50	2000	0,589
			3000	0,730
			3500	0,761
			4000	0,862
			4500	0,890

*\*Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.*



## Литература

1. Zhilin S.G., Komarov O.N., Bogdanova N.A., Amosov O.S. Mathematical modeling of forming processes in the conditions of uniaxial compaction of powder wax-like materials // CEUR Workshop Proceedings. 6. Сер. "ITHPС 2021 - Short Paper Proceedings of the 6th International Conference on Information Technologies and High-Performance Computing" 2021. С. 148-154;
2. Жилин С.Г., Комаров О.Н., Богданова Н.А., Предеин В.В., Стражко Д.А. Способ получения выплавляемой модели тела вращения // Патент РФ на изобретение №2757139, Оpubл.: 11.10.2021, Бюл. № 29;
3. Жилин С.Г., Богданова Н.А., Комаров О.Н. Способ получения выплавляемой модели // Патент РФ на изобретение №2768661, Оpubл.24.03.2022, Бюл.№9;
4. Жилин С.Г., Богданова Н.А., Комаров О.Н., Соснин А.А. Снижение упругого отклика при уплотнении порошковой парафиностеариновой композиции // Деформация и разрушение материалов. 2020. № 1. С. 29-33.

**А.В. Ткачева<sup>1</sup>**

### **ВЛИЯНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ПЛОТНОСТИ, УДЕЛЬНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В СТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ (Ст40)**

<sup>1</sup>*Институт машиноведения и металлургии  
Дальневосточного отделения РАН, Комсомольск-на-Амуре*

Тепловые процессы получили широкое распространение в различных отраслях производства. Они влияют на качество и количество производимых товаров, поэтому оптимизировать расчеты, связанные с теплопередачей является важной задачей. Чем проще математическая модель, тем меньше потребуется времени для решения технологической проблемы инженеру проектировщику. Это касается расчетов теплопередачи. С другой стороны математическая модель теряет свой смысл при достаточном отбрасывании разных факторов влияющих на производственный процесс.

На примере одномерной задачи теплопроводности в настоящей работе исследуются расчеты распространения тепла в стальной пластине, полученные в зависимости от учета плотности, удельной теплоемкости и теплопроводности от температуры. Как известно распространения тепла описывается уравнением теплопроводности:

$$\rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda(T)\text{grad}(T)) - \psi(T - T_0), \quad (1)$$

где  $T = T(x, y, z, t)$  – температура, зависит от местоположения в пространстве  $(x, y, z)$  и времени  $t$ ,  $\rho(T)$  – плотность,  $c(T)$  – удельная теплоемкость,  $\lambda(T)$  –  $\psi(T - T_0)$  – эта функциональная составляющая служит для моделирования источника тепла либо теплоотвода. Она может иметь

очень важную роль, например для моделирования истопника тепла от сварки в работе [1]. В данной работе за  $\psi$  принимается коэффициент теплоотвода.

После преобразований уравнение теплопроводности примет вид:

$$\rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda(T)\left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2}\right) + \frac{d\lambda(T)}{dx}\frac{dT}{dx} + \frac{d\lambda(T)}{dy}\frac{dT}{dy} + \frac{d\lambda(T)}{dz}\frac{dT}{dz} - \psi(T - T_0) \quad (2)$$

Как известно, уравнение теплопроводности (2) не линейно и осложнено зависимостями  $\rho(T)$ ,  $c(T)$  и  $\lambda(T)$ . Во многих работах, посвященных решениям температурных задач, эти функции принимают за константы, но к сожалению это не так [2]. Например, для Ст40 эти функции изображены на рис.1. Их сложно назвать даже линейными. Хотя принять их за кусочно-линейные возможно. Для разных участков температуры они будут линейными, что в значительной степени упрощает решение и без того сложного уравнения теплопроводности (2)

$$\begin{aligned} \lambda(T) &= -0.0375T + 56.105 \text{ при } T < 800; \\ \lambda(T) &= 0.0109T + 15.882 \text{ при } 800 \leq T < 1300; \\ \rho(T)c(T) &= 1375.5T + 4 \cdot 10^6 \text{ при } T < 700; \\ \rho(T)c(T) &= 15249T + 10^6 \text{ при } 700 \leq T \leq 750; \\ \rho(T)c(T) &= -531.15T + 5 \cdot 10^6 \text{ при } 750 \leq T \leq 1300; \end{aligned} \quad (3)$$

На примере одномерной задачи теплопроводности исследуем распространения тепла в пластине. Ширина пластины 100 мм. По всей ее длине узкой полоской 20 мм задана температура  $T = 0,9T_p$ , а остальная площадь пластины имеет температуру  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . С течением времени тепло распространится по пластине. Уравнение теплопроводности для одномерной задачи запишем в виде:

$$\rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda(T)\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right) + \frac{d\lambda(T)}{dx}\frac{dT}{dx} - \psi(T - T_0). \quad (4)$$

Начальные  $t = 0$  и граничные условия:

$$T = 0,9T_p \text{ при } 0 \leq x \leq 0,2s; \quad T = T_0 \text{ при } 0,2s < x \leq s$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = s. \quad (5)$$

$$T_0 = 20^\circ\text{C}$$

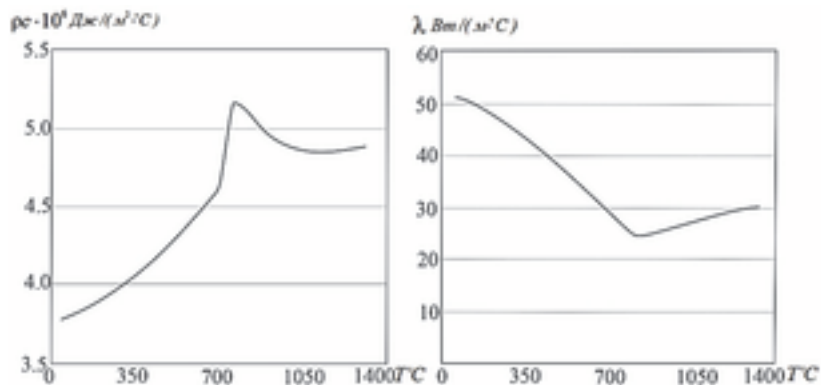


Рис. 1. Зависимость  $\rho c$  и  $\lambda$  от температуры углеродистой стали Ст 40

Поскольку замкнутая система не линейна (3, 4, 5), то получаем решение с использованием итерационного процесса.

На рис. 2 представлено распространение тепла в пластине в различные моменты времени. Теплоотвод принимается нулевым. Это сделано для того, чтобы продемонстрировать возможности распространения тепла в достаточно толстой пластине, где теплоотвод будет играть незначительную роль. Как видно из рис. 2 варианты распространения тепла в пластине значительно различаются друг от друга в зависимости температуры от  $\rho$ ,  $c$  и  $\lambda$  от и без учета последних.

Далее принимаем  $\psi = 0.1$ . Распространение температуры в пластине изображено на рис. 3. На рис.2 и 3. сплошной линией представлена температура, рассчитанная с учетом зависимости тепловых параметров от температуры, штриховая – без данного учета.

Разница в решениях уменьшается. А при  $\psi = 7.0$ , моделируется обычное остывание в комнатных условиях. Разница в решениях стирается совсем. На рис. 4 это показано.

Заключение.

Если возникает необходимость в исследованиях тонкой пластины в естественных условиях или пластины в условиях мощного теплоотвода, то усугублять задачу теплопроводности функциональными зависимостями  $\rho(T)$ ,  $c(T)$  и  $\lambda(T)$  от температуры не стоит, в противном случае учитывать их чрезвычайно важно.

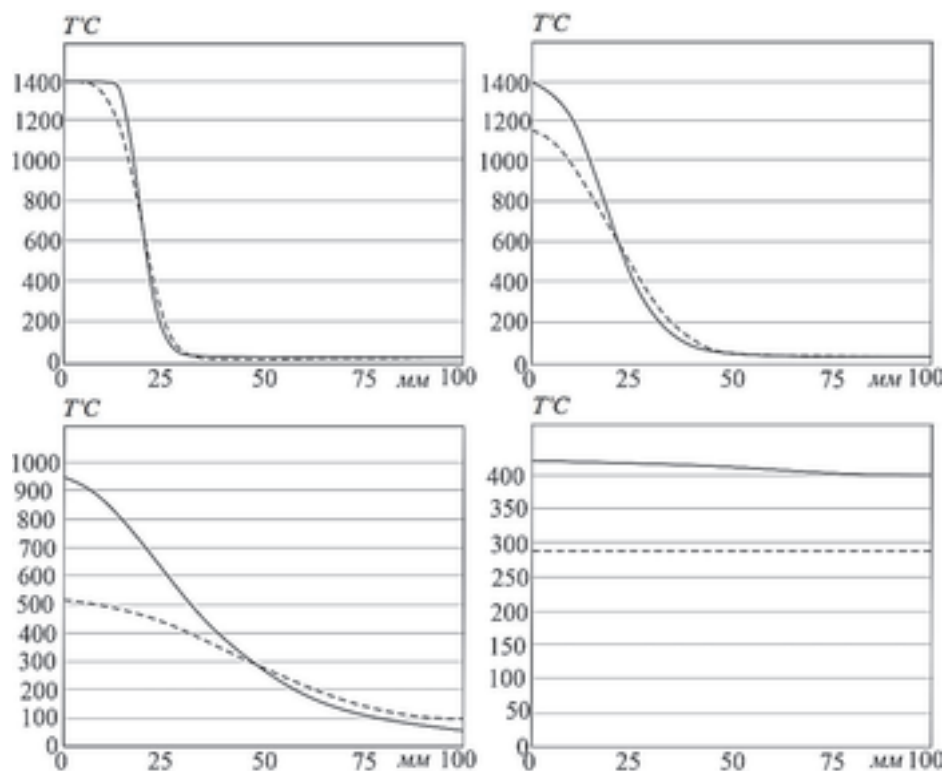


Рис. 2. Распространение тепла в пластине в разные моменты времени  $\psi = 0$

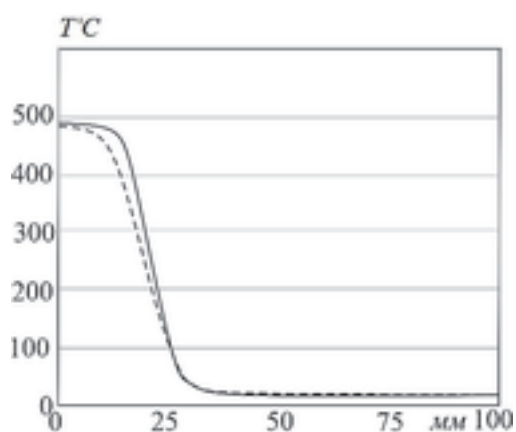


Рис. 3. Распространение тепла в пластине в произвольный момент времени  $\psi = 0.1$

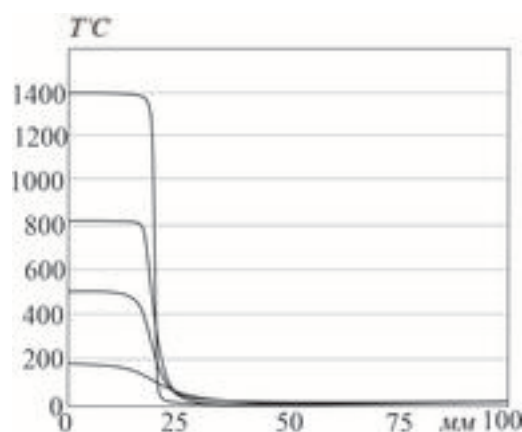


Рис. 4. Распространение тепла в пластине в произвольный момент времени  $\psi = 7.0$

*\*Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 20-01-00147.*

#### Литература

1. O. Prokhorenkova, S. Hainutdinova, V. Prokhorenkova, Ch. Pulkab, V. Senchyshyn Numerical simulation of the kinetics of temperature and phase composition in a butt joint made from steel DC04 during a single-pass submerged arc welding Procedia Structural Integrity 36 (2022) 290–297;
2. Промышленные печи. Справочник руководство для расчетов и проектирования. Казанцев Е.И. М.: Металлургия. 1975. 368 с.

**Н.А. Богданова<sup>1</sup>, С.Г. Жилин<sup>1</sup>, О.Н. Комаров<sup>1</sup>**

### **ПРИНЦИПЫ ФОРМИРОВАНИЯ БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ОТЛИВОК ПОВЫШЕННОЙ РАЗМЕРНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ**

<sup>1</sup>*Институт машиноведения и металлургии  
Дальневосточного отделения РАН, Комсомольск-на-Амуре*

В машиностроении с целью сокращения производственных издержек при получении высокоточных отливок из цветных сплавов и увеличения их конструкционной прочности используют биметаллические заготовки. Такие заготовки представляют собой каркас из стальных сплавов с нанесенной на него поверхностью из цветного сплава [1, 2]. Одним из предпочтительных способов изготовления металлоизделий сложной конфигурации с высокой размерно-геометрической точностью является литье по выплавляемым моделям [3, 4].

Технологический процесс получения биметаллической отливки состоит из следующих этапов [5, 6].

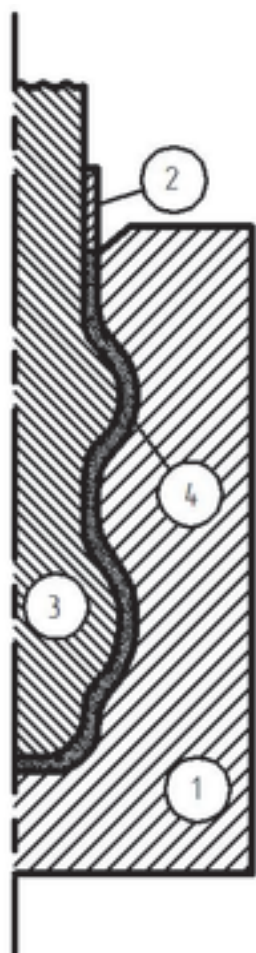


Рис. 1. Схема формирования поверхностного слоя из воскообразного материала:  
 1 – пресс-форма; 2 – пуансон;  
 3 – каркас; 4 – слой воскообразного модельного материала

1. Формирование поверхностного слоя из воскообразного модельного материала. На рис.1 представлена схема пресс-формы 1, снабженной подвижным пуансоном 2. Во внутреннюю полость пресс-формы, имеющую размеры и конфигурацию будущей отливки, устанавливают металлический каркас 3. В зазор между каркасом и пресс-формой запрессовывают воскообразный модельный материал 4, формируя поверхность отливки.

2. Формирование огнеупорной керамической оболочки.

3. Выплавление из огнеупорной керамической оболочки воскообразного модельного материала.

4. Заливка расплава цветного металла в зазор между огнеупорной керамической оболочкой и каркасом.

Ввиду того, что воскообразные модельные материалы не являются конструкционными, обладают уникальными физико-механическими свойствами и математическое прогнозирование процесса формирования поверхностного слоя

затруднено ввиду большого количества переменных факторов, целесообразным представляется проведение экспериментального исследования. Для имитирования процесса формирования поверхностного слоя из воскообразного модельного материала проводилось его выдавливание через мундштук, площадь поперечного сечения которого

относительно площади пресс-формы изменялась в ходе эксперимента от  $1/60$  до  $1/6$ .

Процесс прессования проводился на универсальной тестовой машине «AG-X plus Shimadzu» при скорости перемещения пуансона  $0,5$  мм/с и  $1,5$  мм/с, что соответствует скорости деформирования материала не выше  $6$  мм/с. В качестве воскообразного модельного материала использовались парафин марки Т1 и парафино-стеариновая смесь ПС 50/50 в виде порошков фракций  $0,63$  мм и  $2,5$  мм.

Экспериментально определено, что максимальная нагрузка, требуемая для мундштучного выдавливания парафина марки Т1, выше чем для ПС 50/50. При этом установлено, что с увеличением размера частиц порошка происходит рост максимальной нагрузки на  $10 - 15\%$ . При увеличении скорости перемещения пуансона нагрузка растет. Увеличение соотношения площади поперечного сечения мундштука к площади поперечного сечения пресс-формы приводит к

уменьшению максимальной нагрузки, требуемой для начала процесса выдавливания воскообразного модельного материала.

Изучив качество получаемых прессовок, можно сделать вывод, что для получения технологически допустимого качества напрессованного поверхностного слоя из воскообразного модельного материала, величина зазора между стенками пресс-формы и каркасом должна быть не менее 10 % от площади поперечного сечения каркаса.

*\*Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.*

### Литература

1. Марукович Е.И., Пумпур В.А. Новые технологии литья – машиностроению // *Механика машин, механизмов и материалов*. 2012. № 3-4 (20-21). С. 131-133;
2. Чайковский А.А., Хасан О.С., Ольшевский В.С. Получение двухслойных отливок методом внутриформенного модифицирования // *Новые материалы и технологии в машиностроении*. 2009. № 9. С. 101-104;
3. Литье по выплавляемым моделям/В.Ф. Гаранин, В.Н. Иванов, Казеннов и др.; Под общ.ред. В.А. Озерова. – 4 изд., переработ. и доп. – М.: Машиностроение, 1994. – 448 с.: ил.;
4. Жилин С.Г., Богданова Н.А., Комаров О.Н., Соснин А.А. Снижение упругого отклика при уплотнении порошковой парафиностеариновой композиции // *Деформация и разрушение материалов*. 2020. № 1. С. 29-33;
5. Богданова Н.А., Жилин С.Г., Комаров О.Н. Способ получения биметаллической отливки. Патент РФ № 2696118 Заявл. 21.11.2018, Опубл. 31.07.2019, Бюл. № 22;
6. Жилин С.Г., Комаров О.Н., Богданова Н.А. Механизмы формирования поверхности точной биметаллической отливки на технологических этапах ее получения. *Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2020. № 3 (45). С. 214-221.

**С.В. Фирсов<sup>1</sup>**

## **СОВМЕСТНЫЙ УЧЁТ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ**

<sup>1</sup>*Институт машиноведения и металлургии  
Дальневосточного отделения РАН, Комсомольск-на-Амуре*

Задача вращения цилиндров и дисков являются одной из классических задач механики деформируемого твёрдого тела, имеющее широкое практическое применение. Изучается как чисто упругое их деформирование [1], так и упругопластическое [2], и вязкоупругое [3]. Последнее время начали изучать влияние ползучести на распространение пластического течения. Этому посвящена и данная работа.

Рассматривается вращение трубы с зафиксированными торцами и жёстким покрытием боковой стенки. Внутренний и внешний радиусы трубы обозначены  $R_1$  и  $R_2$  соответственно, угловая скорость  $\omega(t)$  сначала возрастает до максимального значения, затем рассматривается накопление деформаций при фиксированной угловой скорости. Решается задача плоского деформирования в рамках модели малых деформаций. Полные деформации  $\mathbf{d}$  представляются в виде суммы обратимых (упругих)  $\mathbf{e}$  и необратимых деформаций  $\mathbf{p}$ .

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}). \quad (1)$$

Напряжения  $\boldsymbol{\sigma}$  определяются в соответствии с законом Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\mathbf{e})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}. \quad (2)$$

Для описания пластических свойств среды используется теория пластического течения с ассоциированным с ней обобщённым условием максимальных октаэдрических напряжений Мизеса [4–6]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \phi \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_0) = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\tau} - \eta\boldsymbol{\theta}) \cdot (\boldsymbol{\tau} - \eta\boldsymbol{\theta})} - \sigma_0,$$

$$\phi > 0, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^p \mathbf{I}.$$

После преобразований данная формула примет вид [7]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{1}{\eta} \frac{\Sigma - \sigma_0}{\Sigma} \boldsymbol{\tau}. \quad (3)$$

Для описания вязких свойств (ползучести) используется теория течения с потенциалом, соответствующем степенному закону Нортона [3, 8]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v = \frac{d\Phi(\Sigma(\boldsymbol{\sigma}))}{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{d\Phi}{d\Sigma} \frac{d\Sigma}{d\boldsymbol{\sigma}}, \quad \frac{d\Phi}{d\Sigma} = B\Sigma^n.$$

Она преобразуется к виду [9]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v = \frac{3}{2} B \Sigma^{n-1} \boldsymbol{\tau}. \quad (4)$$

Уравнение равновесия запишется в виде

$$\sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = -\rho r \omega^2. \quad (5)$$

Скорость накопления необратимых деформаций будем принимать как сумма скоростей деформаций ползучести и пластического течения. Вне области пластического течения она будет соответствовать скоростям деформаций ползучести, если же не учитывать вязкость, то в области пластического течения она будет равняться скоростям деформаций пластичности.

Решив приведённые уравнения (1,2,5), получим разрешающие уравнения для нахождения перемещений и деформаций [10] на текущем временном шагу при заданных угловой скорости  $\omega(t)$  и накопленных необратимых деформациях  $\mathbf{p}$ . А их прирост на следующем шаге будем искать из соотношений (3), или (4), или их суммы. Результаты расчётов в безразмерных переменных  $\Sigma/\sigma_0$ ,  $\xi = \tau/R_2$  и  $\tau = t/t^*$  приводятся на рис. 1.a) для случая упругопластического деформирования и на рис. 1.b) для деформирования с учётом вязкости. Здесь  $t^*$  – время всего процесса деформирования, то есть  $0 \leq \tau \leq 1$ . Угловая скорость задавалась возрастающей до  $\tau = 1/2$ ; при  $\tau > 1/2$  она оставалась неизменной.



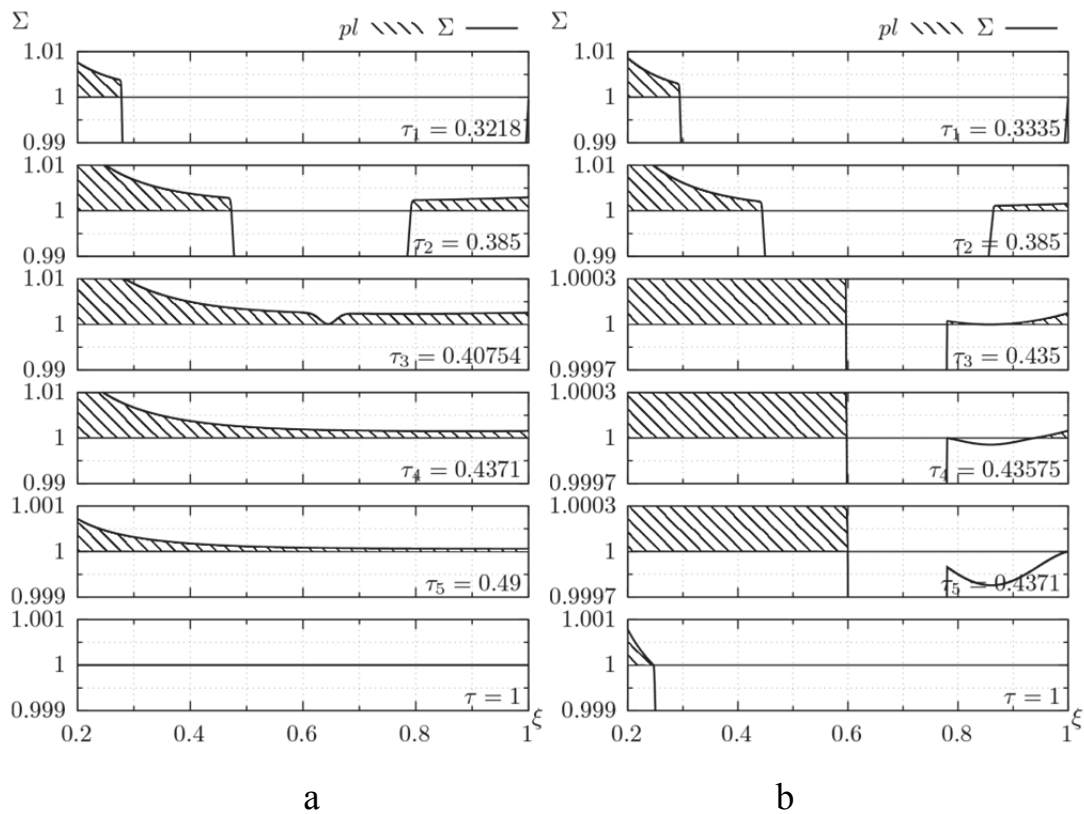


Рис. 1. Схема развития областей пластического течения для случаев деформирования без учёта (а) и с учётом ползучести (б)

В результате видно, что ползучесть приводит к более позднему началу пластического течения. Области пластичности также развиваются медленнее. Из-за интенсивной релаксации напряжений пластическое течение не успевает распространиться на всю область деформирования до того, как напряжения начинают сходиться с поверхности нагружения. Также вторая область пластического течения в этом процессе разбивается на две области упругого деформирования.

Стоит отметить, что ползучесть приводит к накоплению больших необратимых деформаций  $\mathbf{p}$  и увеличению перемещений  $\mathbf{u}$ .

*\*Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.*

### Литература

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости – М.: Наука, 1980;
2. Толоконников Л.А. Механика деформируемого твердого тела – М.: Высш. школа, 1979;
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций – 2-е изд. – М.: Наука, 2014;
4. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. – Владивосток: Дальнаука, 1998;
5. Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жёсткопластических сред – М.: Наука, 1988;



6. Ковтанюк Л. В., Шитиков А. В. О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестник ДВО РАН. – 2006. – № 4. – С. 87–93;

7. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра // Дальневосточный математический журнал. – 2018. – Т. 18, № 2. – С. 242–260;

8. Norton F. H. The Creep of Steel at High Temperatures (Classic Reprint). – New York: Fb&c Limited, 2017;

9. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Расчёт ползучести вращающегося цилиндра со свободными концами // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2018. – 1 (35). – С. 63–73;

10. Фирсов С. В. Пластическое течение и ползучесть в полом цилиндре с жестким внешним покрытием под действием внутреннего давления // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2021. – Т. 25, № 4. – С.696–715.

**В.В. Предеин<sup>1</sup>, О.Н. Комаров<sup>1</sup>**

## **РЕГУЛИРОВАНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АЛЮМОТЕРМИТНЫХ СПЛАВОВ ИЗМЕНЕНИЕМ НАЧАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ШИХТЫ И ФОРМЫ**

<sup>1</sup>*Институт машиноведения и металлургии*

*Дальневосточного отделения РАН, Комсомольск-на-Амуре*

Технологии получения стального литья с применением алюмотермитного процесса восстановления железа из побочных продуктов предприятий машиностроительного комплекса, таких как окалина и стружка цветных металлов (в данном случае алюминиевая и медная) позволяют существенно снизить себестоимость конечной продукции за счет применения более дешёвого сырья, тем самым повышают конкурентоспособность предприятий [1 - 3]. Экспериментальные отливки, имеющие брак в виде газовой пористости, трещин, ликвации элементов и т.д., могут быть использованы в качестве шихты в традиционных процессах переплава. На формирование структуры и свойств термитного литья оказывает влияние не только исходный состав смеси и фракционный состав ее компонентов, но и технологические параметры получения, такие как: температура формы и начальная температура шихтового состава, влияющая на скорость и температуру экзотермической реакции [4].

Изучение влияния представленных выше параметров и стало целью настоящего исследования.

Элементы оснастки для проведения термитных реакций (тигель-реактор и форма) изготавливались из электродного графита марки ЭГ15. В качестве шихты использовалась термитная смесь для получения сплава по химическому составу соответствующего литейной стали 20ДХЛ, состоящая из основы термит-

ной смеси в массовом соотношении: 77% железной окалины, 23% алюминиевого сплава общей массой 1 кг, к которой добавляли 1,8% ферромарганца ФМн78(А) (ГОСТ 4755-91), 1% феррохрома ФХ025А (ГОСТ 4757-91) и 0,21% меди М1 (ГОСТ 859-2001). Компоненты основы термитной смеси имели следующий химический состав (% по массе): железная окалина – 22,639 O<sub>2</sub>, 0,150 C, 2,960 Si, 1,188 Mn, 71,500 Fe, 0,030 S, 0,030 P, 0,697 Al, 0,188 Ni, 0,173 Cr, 0,444 Cu; алюминиевый сплав – 2,961 Zn, 1,097 Si, 0,304 Mn, 0,166 Fe, 89,443 Al, 0,008 Ni, 3,917 Mg, 0,062 Cr, 2,040 Cu.

Предварительный нагрев термитной шихты и формы до инициации реакции осуществлялся в температурном диапазоне 25-400 °С, в следующем соотношении температур шихты/формы (T<sub>ш</sub>/T<sub>ф</sub>): 25/25 °С; 25/200 °С; 25/400 °С; 200/25 °С; 200/200 °С; 200/400 °С; 400/25 °С; 400/200 °С; 400/400 °С. После нагрева реактор с термитной смесью устанавливался над формой, смесь воспламенялась, осуществлялась экзотермическая реакция, по завершению которой пробивался запорный клапан, расположенный в нижней части реактора и расплав из него сливался в форму.

В результате эксперимента установлено, что полученные образцы, не имеют ликвации примесных элементов в структуре сплавов. Это связано с высокой температурой прохождения термитной реакции, в ходе которой происходит интенсивное взаимодействие и механическое перемешивание компонентов смеси.

Для исследования физико-механических свойств экспериментальных сплавов были выбраны образцы, полученные при T<sub>ш</sub>/T<sub>ф</sub>: 25/25 °С; 200/25 °С; 400/400 °С; 25/200 °С, так как не имеют газовой пористости в теле отливки.

Наибольшая прочность образцов при испытании на разрыв для сплавов, полученных при режимах T<sub>ш</sub>/T<sub>ф</sub> 25/25 °С и 25/400 °С, достигала 765 МПа, а наименьшая, полученных при режимах T<sub>ш</sub>/T<sub>ф</sub> 25/200 °С составила 477 МПа. Все образцы характеризуются хрупким изломом, площадка текучести отсутствует.

Твердость образцов, полученных при режимах T<sub>ш</sub>/T<sub>ф</sub> 25/25 °С, составила 28,2 HRC, а при режимах T<sub>ш</sub>/T<sub>ф</sub> 200/25 °С и T<sub>ш</sub>/T<sub>ф</sub> 400/25 °С значения твердости составляли около 53 HRC.

Результат химического анализа экспериментально полученных сплавов показал, что по химическому составу стали 20ДХЛ соответствуют только образцы полученные без предварительного подогрева шихты и формы, что соответствует режиму T<sub>ш</sub>/T<sub>ф</sub> 25/25 °С. При применении других температурных режимов получить сплав, соответствующий стали 20ДХЛ, также возможно, но шихтовый состав нуждается в корректировке.

Сравнительный анализ физико-механических свойств стали 20ДХЛ полученной в результате традиционного переплавного процесса и экспериментально полученных образцов (с соответствующим химическим составом) показал, что по пределу прочности и твердости экспериментальные сплавы не повергавшиеся термообработке превосходят традиционно полученные образцы 20ДХЛ, термообработка которых была проведена. Однако добиться значений относи-

тельного удлинения, характерных для традиционной стали 20ДХЛ, возможно после термообработки.

*\*Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.*

### Литература

1. Вареник, П.А. Резервы экономии металла в литейном производстве/ П.А. Вареник, Г.Д. Хуснутдинов, Ю.П. Зятковская, Л.В. Краля// Процессы литья. - 1990. – № 1. - С. 84-87;
2. Комаров, О.Н. Использование термитных материалов в технологиях получения стальных отливок: монография/ И.Г. Сапченко, О.Н. Комаров, С.Г. Жилин. – Владивосток: Изд-во Дальнаука, 2008. – 166 с.;
3. Новохацкий, В.А. Малоотходная технология производства стальных отливок с экзотермическими прибылями/ В.А. Новохацкий, А.А. Жуков, Ю.И. Макарычев. - М.: Машиностроение, 1986. - 64 с.;
4. A.V. Popov, O.N. Komarov, V.V. Predein, and S.G. Zhilin Nondestructive evaluation of the service life of casting products made of thermite alloys // Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures (MRDMS-2018) AIP Conf. Proc. 2053, 040076-1–040076-6.

**А.Н. Прокудин<sup>1</sup>, С.В. Фирсов<sup>1</sup>**

## **УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ С ЖЁСТКИМ ПОКРЫТИЕМ НА ВНЕШНЕЙ И ВНУТРЕННЕЙ СТЕНКАХ ПРИ УСЛОВИИ ИШЛИНСКОГО–ИВЛЕВА**

<sup>1</sup>*Институт машиноведения и металлургии*

*Дальневосточного отделения РАН, Комсомольск-на-Амуре*

Задача вращения цилиндров и дисков являются одной из классических задач механики деформируемого твёрдого тела, имеющее широкое практическое применение. Изучается как чисто упругое их деформирование [1], так и упругопластическое [2]. Рассматривается вращение трубы с зафиксированными торцами и жёстким покрытием боковой и внутренней стенок. Внутренний и внешний радиусы трубы обозначены  $a$  и  $b$  соответственно, угловая скорость  $\omega(t)$  монотонно возрастает до максимального значения. Её изменения происходит достаточно медленно, что позволяет отбросить влияние углового ускорения и рассматривать задачу в её квазистатической постановке. Решается задача плоского деформирования в рамках модели малых деформаций. Полные деформации  $\mathbf{d}$  представляются в виде суммы обратимых (упругих)  $\mathbf{e}$  и необратимых деформаций  $\mathbf{p}$ .

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}). \quad (1)$$

Напряжения  $\boldsymbol{\sigma}$  определяются в соответствии с законом Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu \text{tr}(\mathbf{e})\mathbf{I} + (1-2\nu)\mathbf{e}). \quad (2)$$

Расчёты будут производиться в безразмерных переменных

$$\beta = \frac{r}{b}, \delta = \frac{a}{b}, u = \frac{\sigma_0}{E} \frac{u_r}{b}, \tilde{\mathbf{d}} = \frac{\sigma_0}{E} \mathbf{d}, \tilde{\mathbf{e}} = \frac{\sigma_0}{E} \mathbf{e}, \tilde{\mathbf{p}} = \frac{\sigma_0}{E} \mathbf{p}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma_0}.$$

Знак тильды в дальнейшем не пишется. Уравнение равновесия запишется

$$\sigma_{rr,\beta} + \beta^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = -\Omega\beta, \Omega = \rho b^2 \sigma_0^{-1} \omega^2. \quad (3)$$

Для описания пластических свойств деформируемой среды используется теория пластического течения с ассоциированным с ней условием максимальных приведённых напряжений, или условием Ишлинского–Ивлева [3]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \phi \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_0) = \max \left( \left| \sigma_{rr} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \right|, \left| \sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \right|, \left| \sigma_{zz} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \right| \right) - \frac{2}{3}. \quad (4)$$

Так как в качестве условия пластического течения используется кусочно-линейная функция, то выше приведённый закон будет справедлив только для граней поверхности нагружения. Для её рёбер используется обобщение ассоциированного закона [4]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \phi_1 \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \phi_2 \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (5)$$

Соотношения (4–5) приводят к пластической несжимаемости. Исходя из этого получим соотношение

$$u_{,\beta} + \beta^{-1}u = (1-2\nu)(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}). \quad (6)$$

Граничные условия запишутся в виде

$$u(\delta) = 0, u(1) = 0. \quad (7)$$

Соотношения (1–3) с граничными условиями (7) позволяют получить упругое решение, а также значение параметра нагружения  $\Omega$ , при котором начнётся пластическое течение одновременно на внутренней ( $\beta=\delta$ ) и боковой ( $\beta=1$ ) поверхностях

$$\Omega_p = \frac{4(1-\nu)}{(1-\delta^2)(1-2\nu)}. \quad (8)$$

Начиная с этого момента в материале цилиндра наряду с областью упругого деформирования образуются две области пластического деформирования распространяющиеся от внутренней и боковой поверхностей, которые соответствуют граням призмы Ивлева:

$$2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} = 2, 2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} = -2. \quad (9)$$

Из данных условий и приведённых уравнений (1–6) можно получить соотношения для нахождения перемещений, напряжений и необратимых деформаций. Коэффициенты интегрирования в данных уравнениях определяются из граничных условий (7) и условий равенства перемещений ( $u$ ) и радиальной компоненты напряжений ( $\sigma_{rr}$ ) на границах областей упругого и пластического деформирования. Положения этих границ находится из условий (9), которые должны выполняться на границе упругой области. При дальнейшем росте параметра нагружения  $\Omega$  наблюдается переход напряжений с грани на ребро призмы Ивлева на границе между областями упруго и пластического деформирования у внутренней полости ( $\beta=\delta$ ). Условие на ребре выглядят следующим образом

$$2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} = 2, 2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -2. \quad (10)$$

Это приводит к появлению ещё двух областей пластического течения, соответствующих приведённому ребру и грани призмы Ивлева со вторым условием из (9). Используя данные условия и соотношения (1–6) можно также найти перемещения, напряжения и пластические деформации в данных областях. Они опять будут зависеть от параметра нагружения  $\Omega$  и коэффициентов интегрирования, которые будут находится как и ранее. Следующим происходит выход на ребро на границе областей упругого и пластического деформирования, распространяющейся от боковой поверхности ( $\beta=1$ ). Ребру соответствуют условия

$$2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 2, 2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} = -2. \quad (11)$$

Опять же образуется ещё две области пластического течения. Наконец при значении параметра нагружения  $\Omega_{fr}$  две области пластического течения соединяются и в цилиндре прекращается упругое деформирование. На его месте возникает новая пластическая область, соответствующая ребру

$$2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 2, 2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -2. \quad (12)$$

В результате имеем в цилиндре семь областей пластического деформирования, три из которых соответствуют ребрам (10–12), а четыре – граням призмы Ивлева, условия для которых приведены в соотношениях (9) и (12).

*\*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-11-00163.*

### Литература

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости – М.: Наука, 1980;
2. Толоконников Л.А. Механика деформируемого твердого тела – М.: Высш. школа, 1979;
3. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003;
4. Koiter W.T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface // Quarterly of Applied Mathematics. 1953. V. 11, № 3. С. 350–354.

И.Н. Захаров<sup>1</sup>, В.П. Багмутов<sup>1</sup>, Е.Г. Солодкова<sup>2</sup>, В.Х. Лэ<sup>1</sup>

## **КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РОГОВИЦЫ С КЕРАТОКОНУСОМ ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ В ХОДЕ ДИАГНОСТИКИ И ЛЕЧЕНИЯ**

<sup>1</sup>Волгоградский государственный технический университет, Волгоград

<sup>2</sup>Волгоградский филиал ФГАУ «НМИЦ» МНТК «Микрохирургия глаза»  
им. акад. С. Н. Федорова» Минздрава России, г. Волгоград

Современный уровень разработки и обоснования методик лечения пациентов с эктазиями роговицы требует построения и экспериментальной верификации комплекса математических моделей для компьютерного моделирования топографических параметров, биомеханических свойств, напряженно-деформированного состояния и поведения роговицы при внешних силовых и энергетических воздействиях в ходе диагностики, выбора методики и прогнозирования хирургического лечения пациентов на разных стадиях заболевания.

В работе на базе системы конечно-элементного анализа Comsol Multiphysics решается ряд задач биомеханики роговицы, предназначенных для диагностики текущего состояния пациента, выбора методики и режимов хирургического воздействия, а также описания различных вариантов прогноза эффективности лечения или возможного развития заболевания.

На первом этапе выстраивается геометрическая модель роговицы в виде пространственного сегмента выпуклой тонкостенной оболочки с переменной толщиной стенки и произвольной формой внешней (передней) и внутренней (задней) поверхностей, задаваемых путем интерполяции экспериментальных данных (карт высот), полученных из топографического исследования роговицы конкретного пациента с помощью кератотопографа Pentacam HR.

Материал оболочки, моделирующей роговицу, считается однородным, изотропным и нелинейно-упругим, коэффициенты жесткости которого устанавливаются и уточняются из сопоставления результатов численного моделирования параметров деформации роговицы при воздействии воздушного импульса и их натурального определения на бесконтактном тонометре Corvis ST. Для описания действия воздушного потока при тонометрии на внешней поверхности модельной оболочки задается распределенная импульсная нагрузка, параметры которой соответствуют параметрам воздушного импульса используемого прибора.

При наличии эктатического процесса в окрестности соответствующей зоны роговицы в модели вводится локальная область со снижающимися коэффициентами жесткости материала. Размеры, форма, положение и характер снижения жесткости внутри такой области устанавливаются из решения обратных задач по минимизации разницы между результатами моделирования и экспериментального измерения кератотопометрических и деформационных параметров в характерных точках роговицы.

Для моделирования процедуры кросслинкинга в стенке оболочки вводится дополнительная зона (кругового профиля) с повышенными коэффициентами жесткости. Изменение характеристик жесткости материала по глубине и радиусу данной зоны задается в соответствии с экспериментальными данными о распределении фотосенсибилизирующего вещества при его диффузии в роговице и плотности потока ультрафиолетового излучения заданной мощности.

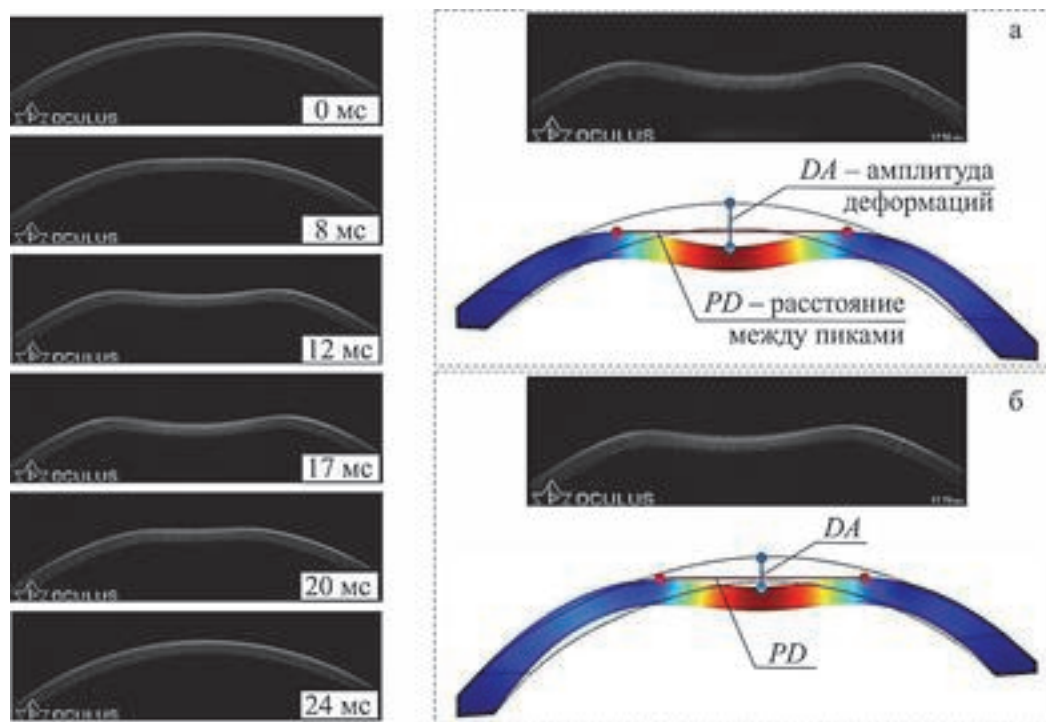


Рис. 1. Экспериментальные и расчетные картины деформаций роговицы при действии воздушного импульса (а – нормальная роговица, максимальный прогиб; б – роговица после кератоконуса, максимальный прогиб)

В качестве примера получаемых результатов на рис.1 показаны картины деформации роговицы в различные моменты времени, снятые высокоскоростной камерой прибора Corvis ST, и схемы сопоставления расчетных и экспериментальных данных для нормальной роговицы (рис.1, а) и роговицы после кросслинкинга (рис.1, б). Оценка погрешности производилась для каждого из 140 зафиксированных моментов времени (снимков).

По результатам моделирования устанавливаются и исследуются закономерности изменения основных расчетных топографических, томографических и биомеханических показателей роговицы, а также параметров напряженно-деформированного состояния в ее характерных точках в зависимости от исходного состояния пациента и режимов лечения, дается обоснование стратегии лечения заболевания.

*\*Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-20085).*

**В.П. Багмутов<sup>1</sup>, И.Н. Захаров<sup>1</sup>, М.Д. Романенко<sup>1</sup>, В.В. Баринов<sup>1</sup>**

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ И СВОЙСТВ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ ПРИ ПОВЕРХНОСТНОМ УПРОЧНЕНИИ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ**

<sup>1</sup>*Волгоградский государственный технический университет, Волгоград*

Поверхностная упрочнение металлических сплавов интенсивными термодинамическими воздействиями широко используется для получения сбалансированного комплекса повышенных служебных характеристик по износостойкости, выносливости и трещиностойкости при циклических нагрузках за счет поиска необходимых компромиссных сочетаний специфических ультрамелкодисперсных структур, напряженно-деформированных состояний и прочностных свойств поверхностных слоев.

Для формирования заданного распределения напряженно-деформированных состояний и полей структурных составляющих разрабатываются комбинированные технологии поверхностного упрочнения титановых сплавов на базе электромеханической обработки (ЭМО), безабразивной ультразвуковой финишной обработки (БУФО) и термической обработки (ТО) металла. Сочетание, последовательность и режимы необходимых технологических операций назначаются из соображений наиболее полной реализации механизмов термического и деформационного упрочнения поверхностных слоев рассматриваемых сплавов для достижения наибольшей стойкости к износу без снижения характеристик статической и циклической прочности материала.

Данная задача решается на основе разработки и совместного анализа комплекса математических моделей, включая: 1) модели технологических воздействий при поверхностной обработке титановых сплавов (модели упруго-пластического деформирования неоднородного тела с формирующейся структурой под действием интенсивных термо-силовых полей); 2) модели описания трансформаций структуры металла при интенсивном нагреве, охлаждении и деформации; 3) модели прогнозирования механического поведения сформированного неоднородного тела при статических и циклических эксплуатационных нагрузках с учетом взаимодействия структурных элементов и полей наведенных остаточных напряжений.

Рассматриваются обратные задачи по реконструкции характеристик усталостной прочности и циклической трещиностойкости ультрадисперсных структур, образующихся в тонких поверхностных слоях. Из сопоставления результатов вычислительных и натуральных экспериментов для упрочненных и неупрочненных образцов идентифицируются параметры отдельных структурных составляющих, отражающие их предрасположенность к блокировке или к развитию трещиноподобных дефектов в условиях заданного закона изменения нагрузки и наведенной системы остаточных напряжений.



В ходе решения отыскиваются распределения остаточных напряжений (рис.1), эффективно тормозящих развитие усталостных разрушений за счет блокировки дефектов и снижения интенсивности рабочих напряжений в опасных точках.

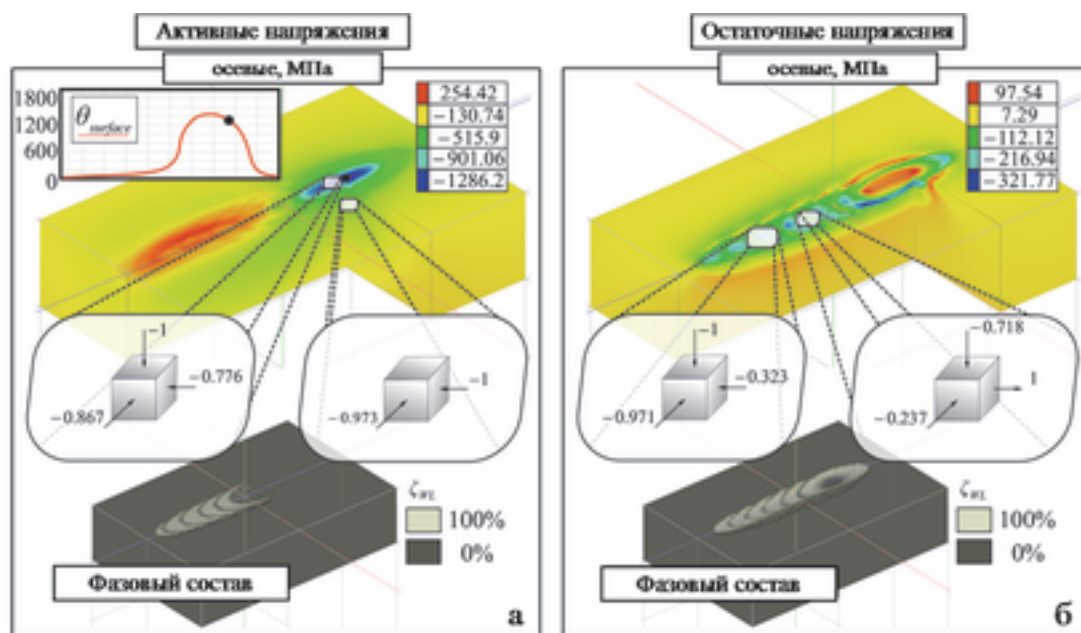


Рис. 1. Расчетные картины активных (а) и остаточных (б) напряжений в процессе формирования структуры при поверхностном упрочнении стали ЭМО

Из серии вычислительных экспериментов на основе разработанных моделей усталостной прочности и долговечности при мягком циклическом нагружении, и циклической трещиностойкости металлических образцов устанавливается вид эпюр остаточных напряжений, способствующих повышению соответствующих характеристик.

На каждом из этапов математическое моделирование сопровождается экспериментальными исследованиями формирующейся микроструктуры, механических и эксплуатационных свойств материала, полученного в рассматриваемой технологической системе, для идентификации параметров моделей и верификации результатов моделирования.

Основными научными результатами проекта, устанавливаемыми на основе экспериментальных исследований (металлографический анализ, оценка микротвердости, механические испытания, испытания на износ) и математического моделирования (с использованием разработанного авторами конечно-элементного комплекса), являются закономерности и механизмы формирования параметров структуры и свойств упрочненных поверхностных слоев металлических сплавов в зависимости от режимов высокоэнергетических комбинированных обработок. На основе полученных данных разрабатывается система управления технологическим процессом комплексного упрочнения.

*\*Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 22-29-01078 и гранта РФФИ № 20-38-90295\_аспиранты.*

**Б.Р. Белан<sup>1</sup>**

## **МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ БУРОВОГО ВООРУЖЕНИЯ**

*<sup>1</sup>Институт машиноведения и металлургии  
Дальневосточного отделения РАН, Комсомольск-на-Амуре*

Скальные породы обладают значительным запасом прочности - от  $f=5$  до  $f=20$  (по шкале проф. М.М. Протождяконова) [1], вследствие чего их добыча весьма затруднительна. Разрушение пород с помощью энергии взрыва является универсальным и самым эффективным способом подготовки скальных пород к выемке. Универсальность данного метода заключается в том, что с помощью энергии взрыва можно разрушить породу любой прочности и крепости, а эффективность этого процесса в том, что с его помощью можно получить существенно большее количество горной породы, готовой к выемке погрузочной техникой [2].

Вместе с тем, проведение взрывных работ сопряжено со значительными экологическими и финансовыми рисками и имеет ряд иных недостатков: высокий уровень потерь и разубоживания полезного ископаемого, особенно при разработке сложноструктурных залежей; большое количество вспомогательных операций; сложность организации производства; высокую стоимость взрывчатого вещества; отрицательное воздействие на окружающую среду.

Одной из задач современной горной науки является разработка передовых инновационных энерго- и ресурсосберегающих технологий и оборудования на основе новых методов разрушения и добычи горных пород [3]. В этой связи безвзрывной способ добычи полезных ископаемых признан перспективным методом, что определяет актуальность исследований, проводимых в данной области как в России, так и за рубежом.

На протяжении последних 50 лет в целях расширения области применения механических способов разрушения на более крепких породах ведутся работы по их совершенствованию, разработке новых, альтернативных безвзрывных способов разрушения. Рассматриваются возможности увеличения мощности исполнительных органов горных машин [4, 5], повышения износостойкости рабочего инструмента [6, 7], а также разрабатывается ряд новых конструкторских решений [8, 9].

Эффективное применение буровых установок, будь то роботизированные или традиционные, невозможно без наличия эффективного бурового вооружения. Для его эффективного использования в металлургии внедряют различные способы повышения эксплуатационных характеристик.

В течение XX в. технология производства бурового вооружения претерпела значительные изменения, заметно усложнился и процесс их изготовления; при этом эффективность и надежность бурового инструмента увеличились в разы.

Существенные возможности повышения производительности бурения заключаются в правильном выборе буровой стали и инструмента [10].

Спеченные твердые сплавы состоят из карбида вольфрама WC и кобальта Co в различных процентных отношениях. Карбид вольфрама придает сплаву высокую твердость и износостойкость, он немагнитен, имеет высокую теплопроводность и весьма хрупок.

Кобальт - ковкий и вязкий металл, в расплавленном состоянии он хорошо смачивает зерна карбида вольфрама и при затверждении прочно связывает их, обеспечивая прочность и упругость сплава, его сопротивляемость скалыванию.

Спеченный сплав типа ВК3, ВК6, ВК8, ВК10, ВК15, ВК20, ВК25 изготавливают из порошковой смеси карбида вольфрама и кобальта путем прессовки в специальных графитовых пресс-формах и спекания при температуре ниже температуры плавления карбидов. Цифры в марке сплава соответствуют процентному содержанию кобальта, в зависимости от которого сплавы отличаются, прежде всего, прочностью на изгиб, плотностью и твердостью.

При увеличении содержания кобальта и зернистости увеличивается ударная вязкость сплава. Предел прочности резцов из твердых сплавов может быть существенно повышен упрочнением, например, охлаждением в азоте или алмазным шлифованием. Алмазное шлифование удаляет с поверхности резцов дефектный слой, что существенно повышает предел прочности сплава на изгиб и ударную вязкость на 20-50 %, ударную долговечность - в 10 раз [11].

Помимо сталей марки ВК, для производства бурового вооружения также применяются безвольфрамовые твердые сплавы (БВТС) КНТ16, ТН20 и титановольфрамокобальтовые сплавы (ТК) Т30К4, Т15К6.

С учетом основных физико-механических свойств среднезернистые и крупнозернистые сплавы с малым содержанием кобальта применяют для армирования инструмента, работающего в условиях безударных нагрузок, т. е. бурового инструмента для вращательного бурения. Сплавы со средним и высоким содержанием кобальта используют для армирования инструмента, работающего в условиях ударных нагрузок, т. е. инструмента для ударновращательного бурения и шарошечных долот, предназначенных для бурения пород высокой твердости. Эти сплавы обладают наибольшей прочностью, но они менее износостойки.

Основной целью процесса армирования является придание рабочим поверхностям вооружения большей твердости и износостойкости.

Для армирования бурового инструмента используют в основном спеченные вольфрамокобальтовые твердые сплавы типа ВК, которые имеют большую твердость, сочетающуюся с высокой износостойкостью при нагреве до 1000 °С. Сплавы ВК почти не подвергаются заметной деформации, имеют большую прочность на сжатие, но в то же время обладают невысокой прочностью на изгиб и растяжение, небольшой ударной вязкостью.

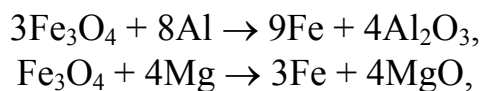
Среди многообразия бурового инструмента особое место занимают долота со стальным фрезерованным зубчатым вооружением. Процесс фрезерования позволяет создавать вооружение сложной конфигурации с максимально возможным вылетом и высокой разрушающей способностью. Однако это весьма металлоемкие процессы, так как при фрезеровании значительная часть металла заготовки идет в стружку.

Данная технология предусматривает использование широкой номенклатуры металлорежущего инструмента, которая значительно ограничивает создание зубчатого вооружения сложной геометрии. Это наиболее важно для бурильного инструмента больших размеров и предназначенного для бурения средней твердости и особенно мягких пород, где зубья вооружения имеют максимальный вылет, а геометрия вооружения образует сложную геометрическую структуру. Другим серьезным недостатком процесса фрезерования является ослабление формы зубьев (разрушение текстуры металла, надрезы на обработанной поверхности), которые создают остаточные напряжения и при циклических нагрузках являются очагами возникновения микротрещин, что вызывает в дальнейшем разрушение долота [12].

Также одним из способов армирования является применение армированной напайки, выполненной методом алюминотермии, он же СВС (самораспространяемый высокотемпературный синтез). Это способ получения металлов, неметаллов, а также сплавов путем восстановления их оксидов металлическим алюминием. Алюминотермическая реакция сопровождается выделением большого количества тепла, а температура самой смеси может достигать 3000 °С. Такая реакция объясняется тем, что из нескольких возможных химических реакций идет та реакция, при которой выделяется наибольшее количество теплоты. При окислении алюминия кислородом в  $Al_2O_3$  выделяется до 30 КДж/моль энергии, что превосходит теплоту сгорания (окисления) других металлов.

В настоящее время получение алюминидов Fe-Al осуществляется благодаря использованию изостатического прессования и спекания в вакууме, электрошлакового переплава, дугового плазменного распыления и т.п., которые являются технологически сложными и довольно дорогостоящими. Применение алюминотермического восстановления оксидов металлов с помощью СВС позволяет получить отливку из термитной стали [13].

Значителен подкласс реакций СВС, в которых в качестве как горючих, так и окислителей могут использоваться не сами элементы, а их оксиды или другие галогениды вместе с металлом–восстановителем. Это реакции СВС с восстановительной стадией. В них в качестве металла–восстановителя используются, главным образом, алюминий и магний. Прототипом таких реакций являются давно известные металлотермические реакции горения термитов, проводимые с целью получения расплавов металлов восстановлением из их оксидов:



В настоящее время целый ряд реакций СВС связан также с восстановлением химических элементов при горении из соответствующих оксидов и галогенидов.

В большинстве же процессов СВС восстановительная (термитная) стадия дополняется стадией образования тугоплавких соединений восстановленных элементов (стадия собственно СВС).



Указанная выше реакция, а также многие другие позволили синтезировать сотни самых разнообразных химических соединений, некоторые классы которых представлены в табл. 1. [14].

Таблица 1

Наиболее распространенные химические соединения

Класс соединений	Химические формулы конкретных соединений
Карбиды	TiC, ZrC, HfC, TaC, WC, Cr <sub>3</sub> C <sub>2</sub> , Mo <sub>2</sub> C, B <sub>4</sub> C, SiC, NbC–TaC, TiC–Cr <sub>3</sub> C <sub>2</sub> , TiC–Mo <sub>2</sub> C, NbC.
Бориды	TiB, TiB <sub>2</sub> , ZrB <sub>2</sub> , NbB <sub>2</sub> , TaB <sub>2</sub> , CoB, HfB <sub>2</sub> , V <sub>3</sub> B <sub>2</sub> , VB, VB <sub>2</sub> , CrB, CrB <sub>2</sub> , MoB, MoB <sub>2</sub> , WB, W <sub>2</sub> B, NiB, FeB, LaB, TiB <sub>2</sub> – CrB <sub>2</sub> .
Карбонитриды	NbC <sub>x</sub> N <sub>1-x</sub> , TaC <sub>x</sub> N <sub>1-x</sub> , TiC <sub>x</sub> N <sub>1-x</sub> , ZrC <sub>x</sub> N <sub>1-x</sub> , Nb <sub>x</sub> Zr <sub>1-x</sub> C <sub>x</sub> N <sub>1-x</sub> .
Интерметаллиды	NbAl, NbGe, TiNi, TiFe, TiCo, CuAl, TiAl, ZrAl, NiAl, VAl, FeAl

К сожалению, несмотря на многолетний опыт применения получения и применения твердосплавных сталей, а также использование технологий поверхностного армирования и постоянное их совершенствование, сталь и поверхностный слой, армированный твердым сплавом, получают хрупкими и неоднородным, вследствие чего при значительных знакопеременных ударных нагрузках в них зарождаются микротрещины, что в дальнейшем приводит к его интенсивному изнашиванию и выкрашиванию бурового инструмента.

В качестве альтернативного метода получения твердосплавных сталей и армирующего слоя предлагается применение наплавки, выполненной методом алюминотермии (СВС). Этим методом можно получить сталь с такими же (или приближенными к ним) характеристиками, что и у серийного бурового инструмента марки стали ВК6В, ВК8В и др. Это позволит значительно удешевить процесс производства, так как там не будут применяться дорогостоящие армирующие материалы и оборудование.

Несмотря на преимущества применения метода СВС в производстве, полученные соединения отличаются высокой хрупкостью, присущую всем интерметаллидам системы Fe–Al со значениями прочности при испытании на изгиб, превышающими 1000 МПа, поэтому данная тема требует дальнейшего изучения.

*\*Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.*

### Литература

1. Танайно А.С. О классификации полускальных и скальных горных пород по показателям прочности // Вестник Кузбасского государственного технического университета. 2008. № 2. С. 7–13;
2. Левинсон С.Я., Ланцевич М.А., Гендлина Л.И., Акишев А.Н. Новая технология и оборудование для безвзрывного формирования рабочей зоны глубоких картеров // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2016. № 5. С. 125–132;
3. Ржевский В. В., Трубецкой К. Н. Задачи горной науки в области открытой разработки месторождений полезных ископаемых // Горный журнал. 1988. № 1. С. 21–23;
4. Chen P., Fang T., Zhou Z., Wang J., Yuan X. A novel 8000m rig and its application for ultra-deep well drilling in submountain region. Society of Petroleum Engineers. 2018;

5. Dong Fan, Hongliang Tian, Ruize Wang. Development and Application of Light-weight Coring Drilling Rig in Tunnel. Institute of Physics Publishing. 2020. Vol. 5, No. 052005;

6. Еремин Е.Н., Юров В.М., Лауринас В.Ч., Гученко С.А., Камысов С.С. Сверхтвердые антифрикционные покрытия для буровых коронок и долот // Изд. Омский государственный технический университет, Омск. 2016. С. 158–159;

7. Исакова А.Р., Березин Н.А., Рышков Д.Е., Шапочка К.М. Основные свойства эльбора // Изд. Закрытое акционерное общество "Университетская книга". 2014. С. 333–336;

8. Лабутин В.Н., Ческидов В.И., Зайцев Г.Д. Опыт и перспективы применения на открытых горных работах безвзрывных технологий разработки массивов горных пород // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. 2014. Т. 1. № 1. С 182–190.

9. Чебан А.Ю. Технология доработки рудных тел добычной установкой, оборудованной автономным выемочным модулем // Маркшейдерия и недропользование. 2019. № 4. С. 22–24;

10. Белан Б.Р., Чебан А.Ю., Жилин С.Г., Комаров О.Н. Современные инструменты без-взрывной выемки тонких рудных жил и методы повышения эффективности бурового вооружения // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2022. № 1(50). С. 17–29;

11. Сергейчев К.Ф. Алмазные CVD-покрытия режущих инструментов (обзор) // Успехи прикладной физики 2015. Т.3, №4, С. 342-376;

12. Сериков Д.Ю. Анализ технологий изготовления стального армированного вооружения шарошечных буровых долот // Строительство нефтяных и газовых скважин на суше и на море. 2017. № 4. С. 8–14;

13. Комаров. О.Н., Жилин С.Г., Предеин В.В., Попов А.В. Механизмы формирования железосодержащих интерметаллидов получаемых алюминиотермией и влияние на их свойства методов специальной обработки // Металлург. 2020. № 8. С. 90–102;

14. Амосов А.П., Боровинская И.П., Мержанов А.Г. Порошковая технология самораспространяющегося высокотемпературного синтеза материалов // Учебное пособие. Под научной редакцией В.Н. Анциферова. М.: Машиностроение–1. 2007. С. 25.

**В.М. Козин<sup>1</sup>**

## **ЗАВИСИМОСТЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ОТ ФОРМЫ НАГРУЗКИ**

<sup>1</sup>*Комсомольский-на-Амуре государственный университет,  
Комсомольск-на-Амуре*

Целью данной работы являлось исследование влияние формы в плане поперечной статической нагрузки на напряженно-деформированное состояние (НДС) ледяного покрова, что определяет его несущую способность (грузоподъемность) при кратковременных режимах нагружения.

Для оценки влияния формы нагрузки на НДС ледяного покрова, т.е. решения поставленной в настоящей работе задачи, исследуем влияние соотношения размеров сторон  $a$  и  $b$  поперечной, статической, равномерно распределенной по

площади прямоугольника, постоянной по суммарной величине нагрузки на поведение бесконечной, изотропной упругой ледяной пластины, лежащей на упругом основании винклеровского типа.

Дифференциальное уравнение изгиба такой пластины имеет вид [1]:

$$D\nabla^4 w + \rho_B g w = q(x, y) \quad (1)$$

где:  $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$  – цилиндрическая жесткость пластины;  $E$  – модуль упругости льда;  $h$  – толщина ледяного покрова;  $w$  – прогиб ледяного покрова;  $\rho_B$  – плотность воды;  $g$  – ускорение или тяжести;  $q(x, y)$  – приложенная к пластине нагрузка.

Решение этого уравнения может быть представлено в виде: получено С.С. Голушкевичем в виде [1]:

$$w = \frac{4q}{\pi^2 D} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin \lambda a \sin \eta b \cos \lambda x \cos \eta y \, dy d\eta}{\lambda \eta [(\lambda^2 + \eta^2)^2 + \alpha^4]} \quad (2)$$

Максимальные по толщине пластины напряжения запишутся так:

$$\begin{cases} (\sigma_x)_{max} = \frac{6M_x}{h^2} = -\frac{6D}{h^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ (\sigma_y)_{max} = \frac{6M_y}{h^2} = -\frac{6D}{h^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ (\tau_{xy})_{max} = \frac{6M_{xy}}{h^2} = \frac{6D}{h^2} (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{cases} \quad (3)$$

где:  $M_x$ ;  $M_y$ ;  $M_{xy}$  – изгибающие моменты.

Из этих соотношений получим:

$$\begin{cases} (\sigma_x)_{max} = \frac{24q}{(\pi h)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\lambda^2 + \mu \eta^2) \sin \lambda a \sin \eta b \cos \lambda x \cos \eta y \, d\lambda d\eta}{\lambda \eta [(\lambda^2 + \eta^2)^2 + \alpha^4]} \\ (\sigma_y)_{max} = \frac{24q}{(\pi h)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\eta^2 + \mu \lambda^2) \sin \lambda a \sin \eta b \cos \lambda x \cos \eta y \, d\lambda d\eta}{\lambda \eta [(\lambda^2 + \eta^2)^2 + \alpha^4]} \\ (\tau_{xy})_{max} = \frac{24q(1-\mu)}{(\pi h)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin \lambda a \sin \eta b \cos \lambda x \cos \eta y \, d\lambda d\eta}{(\lambda^2 + \eta^2)^2 + \alpha^4} \end{cases} \quad (4)$$

Расчеты по формулам (2) и (4) были выполнены для  $h=0,50$  м,  $\mu = 0,33$ ,  $E=3$  ГПа,  $\rho_L = 920 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_B = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

Результаты расчетов прогибов и нормальных напряжений для расчетных случаев (рис.1) при  $q=2 \text{ кПа}$ ,  $S=4ab=200 \text{ м}^2$  показаны на рис.2.

Аналогичные расчеты также были выполнены для распределенной по площади круга и квадратной в плане нагрузок при одинаковой ее суммарной величине, т.е. при выполнении условия  $qS = \text{const}$ .

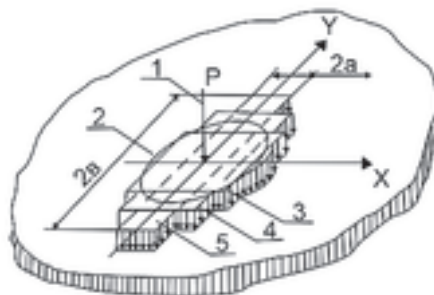


Рис. 1. Схема расчетных случаев: 1 – сосредоточенная сила; 2 – нагрузка распределена по площади круга; нагрузка распределена по площади прямоугольника: 3 –  $b/a=1,0$ ; 4 –  $b/a=2,0$ ; 5 –  $b/a=5,5$

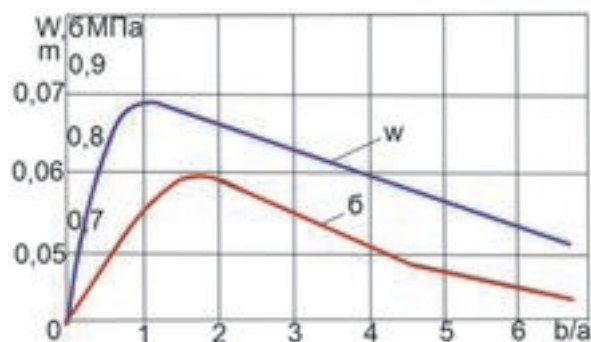


Рис. 2. Зависимость  $w_{\max}$  и  $\sigma_{\max}$  от отношения сторон прямоугольника в плане нагрузки

Как и следовало ожидать, ледяной покров получает наибольший прогиб, если на него действует сосредоточенная, нежели неизменная по суммарной величине распределенная нагрузка. Нагрузки, распределенные по равновеликим площадям круга и квадрата, практически не влияют на поля прогибов и напряжений в ледяной пластине. При неизменной интенсивности нагрузки, прогибы пластины возрастают при  $a \rightarrow b$ , и достигают максимального значения в случае  $b/a \approx 1,8$  (см. рис. 2). С увеличением  $b/a$  от 1 до 5,5 возникающие во льду максимальные прогибы и напряжения уменьшаются примерно на 50% (см. рис. 2). Таким образом, при использовании ледяного покрова в качестве грузонесущих платформ (например, при обустройстве складских помещений) или транспортировки по льду грузов со скоростями ниже критических [2] следует уменьшать интенсивность нагрузки (увеличивать ее площадь распределения) и избегать при этом круглую или квадратную формы, т.е. отдавать предпочтение площадям с наибольшими относительно их ширины длинами.

### Литература

1. Голушкевич С.С. О некоторых задачах теории изгиба ледяного покрова. Л.: Воениздат. 1947. 231 с.;
2. Кобеко П.П., Шишкин Н.И., Марей Ф.И., Иванова Н.С. Пролом и грузоподъемность льда // Журнал технической физики. 1946, Т.16. Вып. 3. С. 273 – 276.

**П.Г. Великанов<sup>1</sup>**

### МЕТОД КОМПЕНСИРУЮЩИХ НАГРУЗОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
Казанский национальный исследовательский технический университет им.  
А.Н. Туполева-КАИ, Казань*

Современное машиностроение порой ставит задачи по расчету тонкостенных конструкций со взаимоисключающими свойствами: с одной стороны, исследуемые конструкции должны сочетать в себе высокую прочность и



надежность, а с другой, - легкость и экономичность. Для обеспечения вышеперечисленных свойств, представляется вполне оправданным использование в конструкциях анизотропных материалов и пластиков. Задачи теории пластин и оболочек относятся к классу краевых задач, аналитическое решение которых в силу различных обстоятельств (нелинейность дифференциальных уравнений, сложность геометрии и граничных условий, неоднородность, многосвязность области и др.) определить невозможно. Решить эту проблему помогают численные методы. Среди численных методов незаслуженно мало внимания уделено методу граничных элементов. В связи с этим дальнейшее развитие метода компенсирующих нагрузок (непрямого метода граничных элементов) для решения задач теории анизотропных пластин и пологих оболочек, основанных на применении предварительно вычисленных точных фундаментальных решений, является актуальным.

В статье используется метод компенсирующих нагрузок (МКН) для решения задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и пологих оболочек сложного контура в условиях термомеханического нагружения при различных граничных условиях. Рассматриваются малые деформации тонкой линейно-упругой анизотропной пластинки и пологих оболочек, деформирование которых описывается моделью, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява в рамках теории среднего изгиба [1]. При рассмотрении анизотропных пластин и пологих оболочек постоянной толщины получена система дифференциальных уравнений равновесия анизотропной пластинки и пологих оболочек, в которой слева был выделен линейный дифференциальный оператор плоского напряженного состояния и изгиба анизотропных пластин [2].

Так как ядра системы сингулярных граничных интегральных уравнений, к которым сводится решение поставленной задачи МКН, выражаются через фундаментальное решение и его производные, то, прежде всего, в статье приводятся методики определения точного фундаментального решения задачи изгиба и точных компонент матрицы фундаментального решения задачи о плоском напряженном состоянии анизотропной пластины. Для их определения были использованы такие методы вычисления фундаментальных решений, как метод двумерного интегрального преобразования Фурье [2, 3], метод последовательного интегрирования [4], метод выделения особенностей [5], а также идея Хермандера [6]. Правильность определения всех фундаментальных решений была проверена с помощью формулы дифференцирования обобщенных функций [2] и с помощью проверки равновесия пластины, ограниченной кривой, при действии на нее единичной нагрузки. Результаты проверок подтверждают правильность найденных фундаментальных решений.

Вектор перемещений анизотропных пластин и пологих оболочек определяется из решения системы линейных алгебраических уравнений, описывающих изгиб и растяжение анизотропной пластины. Решение системы выполняется МКН, в соответствии с которым область, представляющая план пологой оболочки, дополняется до бесконечной плоскости, и на контуре, который ограничивает область, к бесконечной пластинке прикладываются компенсирующие нагрузки. В статье приведены интегральные уравнения МКН, для которых

предварительно были исследованы предельные значения потенциалов по методике Панича [2]. Изучение нелинейного деформирования анизотропных пластин и пологих оболочек проводится с помощью зависимостей “прогиб – нагрузка”. За ведущий параметр принимался прогиб в заданной точке срединной поверхности оболочки.

Для отработки методики были решены несколько задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и пологих оболочек МКН и их результаты сравнены с известными решениями другими методами. Таким образом, с помощью МКН были получены высокоточные результаты, еще более сходящиеся к точным решениям при увеличении числа граничных элементов.

### Литература

1. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1975. 326 с.;
2. Артюхин Ю.П., Грибов А.П. Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов. Казань: Фэн, 2002. 199 с.;
3. Грибов А.П., Великанов П.Г. Применение преобразования Фурье для получения фундаментального решения задачи изгиба ортотропной пластины // Мат. моделирование и краевые задачи: Труды Всероссийской научной конференции. Самара: СамГТУ, 2004. Ч. 3. С. 67–71;
4. Великанов П.Г., Артюхин Ю.П., Куканов Н.И. Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов // Актуальные проблемы механики сплошных сред. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2020. С. 105–111;
5. Великанов П.Г., Халитова Д.М. Определение фундаментального решения задачи среднего изгиба анизотропной пластины // Межд-ая научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа — 2021". С. 161-163;
6. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4 т. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье / пер. с англ. Москва: Мир, 1986. 464 с.

**Н.Я. Головина<sup>1</sup>**

### **СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ РЕСУРСА, ПОСТРОЕННЫХ НА РАЗНЫХ МОДЕЛЯХ МАТЕРИАЛА**

<sup>1</sup>*Тюменский индустриальный университет, Тюмень*

Одной из причин, препятствующих расчету процесса малоциклового деформирования конструкции в течение всего ресурса является отсутствие необходимых моделей материала. Для исследования вопроса о влиянии выбора модели материала на результат моделирования его ресурса выбраны три закона деформирования, одинаково хорошо приближающие выборку экспериментальных точек кривой деформирования. Первая модель ресурса построена на эмпирическом законе Рамберга-Осгуда [1], вторая модель на эмпирическом законе деформирования, альтернативном закону Рамберга-Осгуда [2,3], третья модель

на теоретическом законе [4,5] (кривая деформирования как экстремаль некоторого функционала).

Все законы деформирования, приведены к безразмерному виду так, чтобы все кривые проходили через точки (0; 0) и (1; 1). Для этого напряжения  $\sigma$  нормированы на напряжение предела прочности  $\sigma_c$ , а деформации  $\varepsilon$  на деформацию предела прочности  $\varepsilon_c$ :

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\sigma_c}; \quad \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \quad (1)$$

Первый закон материала – закон Рамберга-Осгуда [1] в безразмерных переменных [2-5]:

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma^*}{E_0^*} + \left(1 - \frac{1}{E_0^*}\right) (\sigma^*)^n \quad (2)$$

Здесь  $\varepsilon^*$  – нормированная деформация;  $\sigma^*$  – нормированное напряжение;  $E^*$  – нормированный касательный модуль в произвольной точке кривой;  $E_0^*$  – нормированный касательный модуль в начальной точке кривой;  $n$  – формальный параметр кривой.

Второй закон материала – эмпирический закон деформирования, альтернативный закону Рамберга-Осгуда [2, 3]:

$$\sigma^* = \begin{cases} E_0^* \varepsilon^* & \text{для } 0 \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_e^* \\ E_0^* \varepsilon^* - (E_0^* - 1) \left(\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*}\right)^\eta & \text{для } \varepsilon_e^* \leq \varepsilon^* \leq 1 \end{cases} \quad (3)$$

Третий закон материала - теоретический закон [4,5]:

$$\sigma^*(\varepsilon^*) = \begin{cases} E_0^* \varepsilon^* \\ 1 + (\sigma_p^* - 1) \frac{(\varepsilon^* - 1)m\varepsilon_p^{*m-1} - (\varepsilon^{*m} - 1)}{(\varepsilon_p^* - 1)m\varepsilon_p^{*m-1} - (\varepsilon_p^{*m} - 1)} + \\ + E_0^* \frac{(\varepsilon_p^* - 1)(\varepsilon^{*m} - 1) - (\varepsilon_p^{*m} - 1)(\varepsilon^* - 1)}{(\varepsilon_p^* - 1)m\varepsilon_p^{*m-1} - (\varepsilon_p^{*m} - 1)} \end{cases} \quad (4)$$

На примере сплава ВТ-6 показано (рис. 1), что все три закона приближают выборку экспериментальных точек примерно с одинаковой точностью и в равной степени пригодны для описания упругопластических свойств выбранного материала.

При формулировке моделей ресурса использованы следующие гипотезы. Во-первых, материал образца циклически стабильный, т.е. кривые уравнений закона деформирования не зависят от номера цикла. Цикл отнулевой, мягкий. Такое упрощение не приводит к фатальным последствиям, а лишь закономерно упрощает систему гипотез ресурса [6-8], давая результаты, идущие «в запас». Во-вторых, оператор уравнения закона Гука при нагрузке  $\sigma^* = \sigma_+^*(\varepsilon^*)$  в разных моделях материала (сплава ВТ6) определяется различными кривыми деформирования (2), (3) и (4). И в-третьих, во всех моделях оператор уравнения закона Гука при разгрузке  $\sigma^* = \sigma_-^*(\varepsilon^*)$  соответствует линейному закону Гука для всех моделей:

$$\sigma_-^*(\varepsilon^*; \varepsilon_\Delta^*) = E_0^*(\varepsilon^* - \varepsilon_\Delta^*) \quad (5)$$

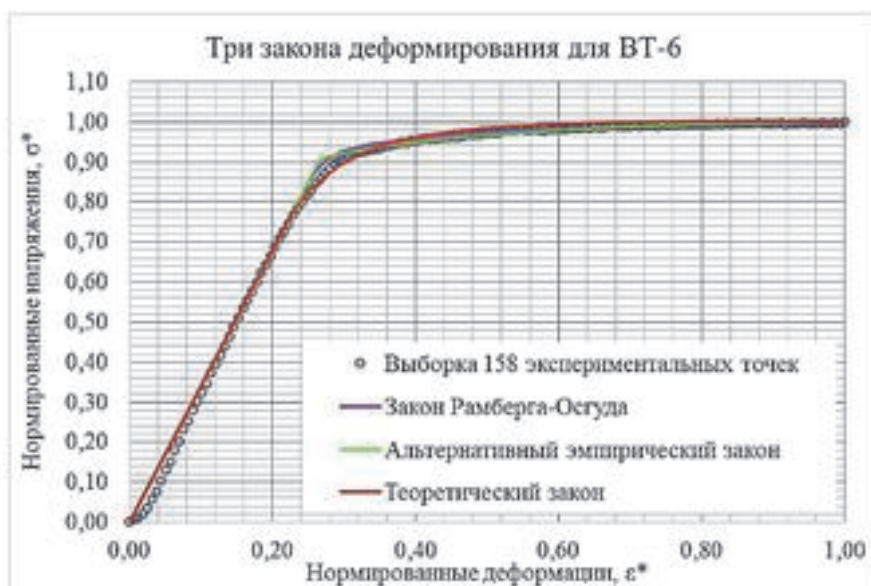


Рис. 1. Кривые деформирования сплава ВТ-6 в соответствии с законом Рамберга-Осгуда, альтернативным эмпирическим и теоретическим законами

Остаточная деформация в цикле  $\varepsilon_{\Delta}^*$  для любого номера цикла вычисляется в соответствии с (5):

$$\varepsilon_{\Delta}^* = \Delta\varepsilon^* - \frac{\Delta\sigma^*}{E_0^*} \quad (6)$$

Из (6) максимальная остаточная деформация, когда  $\Delta\varepsilon^* = 1, \Delta\sigma^* = 1$ , определяется соотношением:

$$\varepsilon_{\Delta\max}^* = 1 - \frac{1}{E_0^*} \quad (7)$$

Если полагать, что остаточные деформации в каждом цикле суммируются, то гарантированное число циклов нагружения  $N$  с размахом  $\Delta\sigma^*$  вычисляется по соотношению:

$$N \leq \frac{\varepsilon_{\Delta\max}^*}{\varepsilon_{\Delta}^*} = \frac{1 - \frac{1}{E_0^*}}{\Delta\varepsilon^* - \frac{\Delta\sigma^*}{E_0^*}} = \frac{E_0^* - 1}{E_0^*\Delta\varepsilon^* - \Delta\sigma^*} \quad (8)$$

Таким образом, число циклов (8) и размах напряжения в соответствии с (2), (3) и (4) являются функциями размаха деформации:

$$\begin{cases} N = \varphi(\Delta\varepsilon^*) \\ \Delta\sigma^* = \sigma_+^*(\Delta\varepsilon^*) \end{cases} \quad (9)$$

Соотношения (9) можно рассматривать как параметрическое задание кривой Веллера, где роль параметра играет размах деформации. Для исключения размаха деформации, определим функцию  $\bar{\varphi}$ , обратную функции  $\varphi$ , так что  $\Delta\varepsilon^* = \bar{\varphi}(N)$ . Тогда кривая Веллера может быть представлена как явная функция размаха напряжения от числа гарантированных циклов:

$$\Delta\sigma^* = \sigma_+^*(\bar{\varphi}(N)) \quad (10)$$

Изложенная модель исчерпания ресурса предложена и исследована в работах [9-10] для описания весьма частного вида разрушения – квазистатическо-

го, наблюдаемого при достаточно больших нагрузках мягкого асимметричного циклического нагружения и весьма небольшом числе циклов. Единственным отличием предложенной модели ресурса от квазистатического разрушения является более жесткая и грубая гипотеза о независимости остаточных деформаций от номера цикла. Это упрощает систему гипотез ресурса и позволяет использовать ее для сравнительного анализа влияния выбора различных моделей кривой деформирования на вид усталостной кривой во всем диапазоне числа циклов.

Используя данную модель исчерпания ресурса получены три разных модели для кривой Веллера, построенные на разных законах деформирования материала. Кривая Веллера, построенная для сплава ВТ-6, деформирующегося по закону Рамберга-Осгуда [11]:

$$\Delta\sigma^* = N^{-1/n}, \quad \Delta\sigma^* = 10^{-(\lg N)/n} \quad (11)$$

Кривая Веллера, построенная для сплава ВТ-6, деформирующегося по эмпирическому закону, альтернативному закону Рамберга-Осгуда [11]:

$$\Delta\sigma^* = E_0^* \varepsilon_p^* + E_0^* (1 - \varepsilon_p^*) N^{-1/\eta} - (E_0^* - 1) N^{-1} \quad (12)$$

Формулировка модели ресурса материала, деформирующегося по третьему, теоретическому, закону, при тех же гипотезах ресурса, приводит к параметрической записи кривой Веллера [11], в которой роль параметра играет размах деформации  $\Delta\varepsilon^*$ . Размах напряжений, выраженный через размах деформаций:

$$\Delta\sigma^*(\Delta\varepsilon^*) = \begin{cases} E_0^* \Delta\varepsilon^* \\ 1 + (\sigma_p^* - 1) \frac{(\Delta\varepsilon^* - 1) m \varepsilon_p^{*m-1} - ((\Delta\varepsilon^*)^m - 1)}{(\varepsilon_p^* - 1) m \varepsilon_p^{*m-1} - (\varepsilon_p^{*m} - 1)} + \\ + E_0^* \frac{(\varepsilon_p^* - 1) ((\Delta\varepsilon^*)^m - 1) - (\varepsilon_p^{*m} - 1) (\Delta\varepsilon^* - 1)}{(\varepsilon_p^* - 1) m \varepsilon_p^{*m-1} - (\varepsilon_p^{*m} - 1)} \end{cases} \quad (13)$$

Число гарантированных циклов:

$$N = \left(1 - \frac{1}{E_0^*}\right) \left[ \Delta\varepsilon^* - \frac{1}{E_0^*} - \frac{(\sigma_p^* - 1) (\Delta\varepsilon^* - 1) m \varepsilon_p^{*m-1} - ((\Delta\varepsilon^*)^m - 1)}{E_0^* (\varepsilon_p^* - 1) m \varepsilon_p^{*m-1} - (\varepsilon_p^{*m} - 1)} - \frac{(\varepsilon_p^* - 1) ((\Delta\varepsilon^*)^m - 1) - (\varepsilon_p^{*m} - 1) (\Delta\varepsilon^* - 1)}{(\varepsilon_p^* - 1) m \varepsilon_p^{*m-1} - (\varepsilon_p^{*m} - 1)} \right]^{-1} \quad (14)$$

С учетом того, что соотношение (13) линейно относительно размаха напряжения, остается обратить (14), выразить размах деформации через число гарантированных циклов и исключить из (13) размах деформации, выразив его через число циклов. Сравнительный анализ кривых Веллера для трех различных моделей сплава ВТ6 в комбинации с одной и той же совокупностью гипотез ресурса удобно провести, используя рис. 2.

В качестве пробных моделей материала были выбраны три закона деформирования. Все три модели материала практически одинаково хорошо определяют кривую деформирования одного и того же материала (титанового сплава ВТ6), при построении теории ресурса используется одна и та же, достаточно лаконичная, система гипотез ресурса. По этим причинам в вариантах теории

ресурса наиболее ярко проявляются различия, привнесенные именно моделью материала.

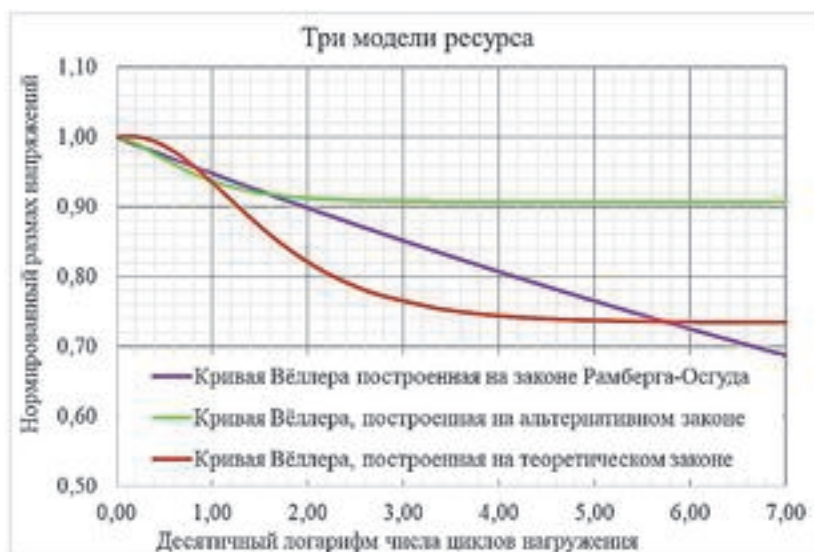


Рис. 2. Кривые Вёллера для сплава ВТ-6, построенные на разных законах деформирования

При этом классический закон Рамберга-Осгуда исключает существование ненулевого предела выносливости, при котором материал выдержит бесконечно большое число циклов нагружения. Для моделей ресурса упругопластических материалов, построенных на альтернативном эмпирическом и теоретическом законах деформирования, установлено, что они не просто допускают существование ненулевого предела выносливости, при котором материал выдержит бесконечно большое число циклов нагружения, но и жестко связывают его с пределом пропорциональности. Поскольку предел пропорциональности является физическим параметром материала, то его можно определять по пределу выносливости, также отражающему индивидуальные свойства материала. Очевидно, что справедливо и обратное предположение: теоретическая модель материала наследуется любой моделью ресурса, что делает актуальной задачу теоретического моделирования упругопластических свойств материалов.

### Литература

1. Ramberg W., Osgood W.R. Description of stress–strain curves by three parameters / Technical Note N 902, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington DC, 1943;
2. Головина Н. Я. Об одной эмпирической модели нелинейного деформирования упругопластических материалов // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2020. Т. 17. № 3. С. 48–55;
3. Belov P.A., Golovina N.Y. Generalization of the Ramberg–Osgood Model for elastoplastic materials // Journal of Materials Engineering and Performance. 2019. V. 28. N 12. P. 7342–7346;
4. Головина Н. Я., Белов П.А. Модель кривой нелинейного деформирования стали 20ХГР и стали 35 // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 83. № 3. С. 305–316;

5. Golovina N. Ya. The nonlinear deformation curve model as a solution of the fourth order differential equation // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2021. V. 189. P. 104258;
6. Nieslony A., Chalid el Dsoki, Kaufmann H., Krug P. New method for evaluation of the Manson–Coffin–Basquin and Ramberg–Osgood equations with respect to compatibility // Int. J. Fatigue. 2008. V. 30. P. 1967–1977;
7. Серенсен С. В., Шнейдерович Р. М., Гусенков А. П. и др. Прочность при малоцикловом нагружении / Под ред. С. В. Серенсена. М.: Наука, 1975. 285 с.;
8. Susmel L., Taylor D. An elasto-plastic reformulation of the theory of critical distances to estimate lifetime of notched components failing in the low/medium-cycle fatigue regime // Journal of Materials Science & Technology. 2010. V. 132. P. 021002;
9. Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность. Справочник. М.: Машиностроение, 1985. 224 с.;
10. Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность. Руководство и справочное пособие. М.: Машиностроение, 1975. 488 с.;
11. Головина Н.Я., Белов П.А., Лурье С.А., Егорова О.В. Модель ресурса для различных моделей упругопластического материала // Деформация и разрушение материалов. 2022. № 2. С. 2-11.

**И.Э. Келлер<sup>1,2</sup>, Д.Н. Трушников<sup>1</sup>, А.В. Казанцев<sup>1</sup>, Д.С. Дудин<sup>1,2</sup>,  
Н.К. Салихова<sup>1,2</sup>, Г.Л. Пермяков<sup>1</sup>, А.А. Осколков<sup>1</sup>**

## **ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ, МИКРОСТРУКТУРА И ПРОЧНОСТЬ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА, ВЫРАЩЕННОГО ПРОВОЛОЧНО-ДУГОВОЙ НАПЛАВКОЙ С ПОСЛОЙНОЙ ПРОКОВКОЙ**

<sup>1</sup>*Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

<sup>3</sup>*Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, Пермь*

Аддитивное производство проволочно-дуговой наплавкой позволяет создавать легкие и прочные металлические конструкции сложной формы при значительной экономии материала. Для достижения характеристиками прочности и ресурса материала значений, присущих катаному металлу, разрабатываются эффективные технологии наплавки, последующей термообработки, а также подбираются рациональные режимы процессов. В последние десять лет разрабатываются гибридные технологии аддитивного производства, в которых наплавленный слой линейного элемента сегментированной конструкции проковываются пневматическим ударным инструментом или обкатывается роликом. Подобной послойной обработкой пластическими деформациями можно а) устранять искажения геометрии линейного элемента с наплавленным слоем вследствие неоднородности температурного поля и усадки, б) понижать пористость, лимитирующую усталостный ресурс материала, и в) получать вместо

дендритной кристаллической структуры мелкое равноосное зерно и, как следствие, повышенные характеристики прочности и пластичности материала. Изучение закономерностей указанных процессов требует постановки соответствующих задач механики и организации экспериментального сопровождения.

Численно исследовано формирование напряженно-деформированного состояния в призматическом брусе при его односторонней обработке пластическим деформированием [1]. С помощью пакета LS-DYNA<sup>®</sup> моделируется процесс, состоящий из этапа односторонней поверхностной обработки давлением закрепленного образца, и этапа освобождения образца от закреплений, для сплавов АМг6, ВТ6 и нержавеющей стали 12Х18Н10Т, для каждого из которых были определены константы закона упрочнения Джонсона – Кука по данным квазистатических и динамических испытаний. Воздействие пневмомолотка в численной модели определялось с помощью тензометрированной стальной мишени и подтверждалось по искажениям поперечного сечения прокованного бруса из сплава АМг6. Установлено: а) эквивалентные распределения пластических деформаций по глубине можно получить проковкой или обкаткой роликом, б) глубины половин максимумов распределений микротвердости и пластических деформаций соответствуют друг другу. Обнаружено существование критической величины обработки пластическим деформированием, после которой изменяется знак продольной кривизны образца и, следовательно, искажения выращенного линейного элемента усиливаются, а не исправляются. Предложен метод реконструкции распределения пластических деформаций и остаточных напряжений по глубине образца по кривизнам последовательно срезаемых тонких слоев материала. Исследована эволюция распределения пористости по поперечному сечению линейного элемента из алюминиево-магниевого сплава, синтезируемого проволочно-дуговой наплавкой методом холодного переноса металла с применением послойной проковки [2]. Построена численная модель процесса, где в качестве связанных уравнений пластической деформации материала и эволюции пористости взяты соотношения Гурсона – Твергарда – Нидлемана. Параметры модели откалиброваны по фотографиями шлифов поперечного сечения. Модель позволяет предсказывать размеры области под бойком, зависящие от параметров проковки, в пределах которой существенно снижается пористость.

Изучены закономерности протекания статической рекристаллизации при наплавке слоя металла на грань призматического образца, предварительно обработанную пластическим деформированием [3], для чего численно решались независимые задачи односторонней проковки образца и теплопроводности при плазменно-дуговой наплавке слоя на этот же образец. Далее по накопленным пластическим деформациям и истории изменения температуры с помощью модели Авраами определялась объемная доля статически рекристаллизованного материала в наклепанном слое образца в условиях термоцикла. Результаты расчета позволили определить необходимые условия послойной обработки давлением, которые должны обеспечивать необходимую толщину слоя рекристалли-



зованного материала. Найден и экспериментально подтвержден рациональный режим гибридного аддитивного производства с тройной проковкой каждого слоя, который обеспечивает более высокие характеристики прочности и пластичности синтезированного материала по сравнению с характеристиками материалов, полученных аддитивным производством без проковки или с однократной проковкой.

*\*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 21-19-00715.*

### Литература

1. Келлер И.Э., Казанцев А.В., Дудин Д.С., Пермяков Г.Л., Карташев М.Ф. Искажение формы, локализация пластической деформации и распределение остаточных напряжений при односторонней проковке/обкатке бруса. Применение результатов к аддитивному производству шпангоута с послойной обработкой давлением // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т.14, №4. С.434-443;

2. Келлер И.Э., Казанцев А.В., Дудин Д.С., Пермяков Г.Л., Трушников Д.Н. Моделирование распределения остаточной пористости металлического изделия при аддитивном производстве с послойной проковкой // Проблемы прочности и пластичности. 2022. Т. 84, № 2. С. 5-16;

3. Салихова Н.К., Дудин Д.С., Келлер И.Э., Осолков А.А., Казанцев А.В., Трушников Д.Н. Моделирование рекристаллизации сплава АМг6 в прокованном слое при наплавке материала в процессе гибридного аддитивного производства // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15, № 2.

**А.А. Роговой<sup>1</sup>, О.С. Столбова<sup>1</sup>**

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ МИКРОСТРУКТУРЫ ФЕРРОСПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

<sup>1</sup>*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*

Ферромагнитные сплавы с памятью формы (ФСДФ) являются функциональными (интеллектуальными) материалами. Они способны изменять свою форму и/или размеры при воздействии внешних полей: температурного, магнитного [1]. Если охлаждение из аустенитного состояния (высокотемпературной фазы) с кубической кристаллической решёткой происходит без приложения механической нагрузки, то в мартенситной фазе (тетрагональной низкотемпературной) образуются сдвоенные согласованные между собой структуры (двойники), которые могут раздвойниковываться при приложении напряжения и/или внешнего магнитного поля, что вызывает значительную деформацию до 6-10 %.

Поскольку температура мартенситного состояния в ФСДФ значительно ниже температуры Кюри, варианты мартенсита самопроизвольно намагничены, даже в отсутствии внешнего магнитного поля. Вектор локальной намагничен-

ности в каждом варианте мартенсита ориентирован вдоль оси легкого намагничивания. Области, составленные из связанных между собой вариантов мартенсита, в которых вектор намагниченности имеет одно направление, образуют магнитные домены. В результате в мартенситном состоянии формируется множество магнитных доменов с разным направлением векторов намагниченности, и этим доменам энергетически выгодно согласоваться между собой так, чтобы полная намагниченность материала в отсутствии внешнего магнитного поля была нулевой. При приложении же последнего начинается движение стенок магнитных доменов, вращение векторов намагниченности и реориентация (раздвойникование) вариантов мартенсита.

Так как процессы раздвойникования, движения стенок магнитных доменов и поворота магнитного векторного момента в каждом мезоэлементе происходят на уровне структуры материала, необходимо строить микромеханические модели [2-7], которые, в отличие от феноменологических моделей [8, 9], позволяют явно учитывать физические процессы, происходящие в структурных элементах материала, не прибегая к дополнительным допущениям.

### 1. Описание процессов двойникования и раздвойникования

В работе [10] рассмотрена кинематика процессов двойникования (образования двойников из мартенситных вариантов) и раздвойникования (переориентация мартенситных вариантов, образующих двойник), сводящаяся к простому сдвигу. Для сплава Гейслера  $\text{Ni}_2\text{MnGa}$  приведено и конкретизировано решение уравнения двойникования (совместности) для пары вариантов  $(i, j)$  мартенсита, образующих двойник:

$$\mathbf{R}_{ij} \cdot \mathbf{U}_i = (\mathbf{g} + s \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{N}) \cdot \mathbf{U}_j, \quad (1)$$

в котором  $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_j^T \cdot \mathbf{R}_i$ ,  $\mathbf{R}_i$  – собственно ортогональный тензор в полярном разложении градиента места  $\mathbf{F}_i = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_i$ ,  $\mathbf{U}_i$  – тензор деформаций Бейна (симметричный положительно определенный тензор чистой деформации) для варианта  $i$ ,  $\mathbf{g}$  – единичный тензор,  $s$  – величина сдвига,  $\tilde{\mathbf{a}}$  – направление сдвига,  $\mathbf{N}$  – единичный вектор нормали к поверхности, на которой происходит скачек градиента места в промежуточной конфигурации (после растяжения-сжатия среды по трем взаимно перпендикулярным направлениям, что соответствует преобразованию кубической решетки аустенита в тетрагональную мартенситную). Для  $\text{Ni}_2\text{MnGa}$  получено, что в соотношении (1)

$$\mathbf{N} = 0.728554 \mathbf{e}_1 - 0.684988 \mathbf{e}_2, \quad \tilde{\mathbf{a}} = 0.684988 \mathbf{e}_1 + 0.728554 \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{R}_{21} = 0.998102(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 - 0.0615818(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1), \quad s = 0.123398$$

в ортонормальном базисе  $\mathbf{e}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  с векторами, параллельными ребрам кубической ячейки для пары вариантов  $(2:1)$ , как представлено на рис.1 (стрелочками показаны векторы намагниченности, направленные вдоль или против коротких осей в каждом варианте мартенсита).

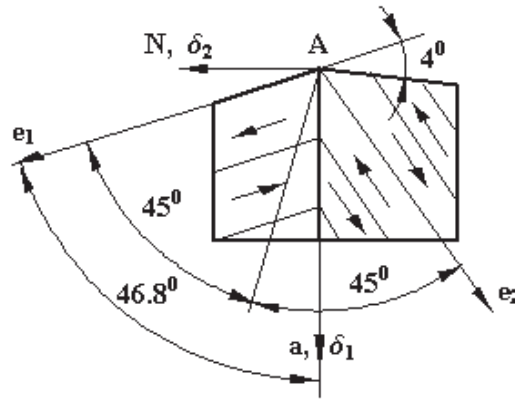


Рис. 1. Двойниковая структура, состоящая из двух вариантов мартенсита

Отсюда следует, что плоскость двойника пересекает плоскость векторов  $e_1$  и  $e_2$  под углом  $\phi \approx 46.8^\circ$  к вектору  $e_1$  (направление вектора  $\delta_1$  на рис.1) и в этом направлении в плоскости векторов  $e_1$  и  $e_2$  происходит простой сдвиг на угол  $\gamma \approx 7^\circ$  ( $s = \text{tg } \gamma$ ) относительно вектора  $\delta_2$ .

Так как двойникование производилось простым сдвигом, то и раздвойникование должно производиться также сдвигом. Если на ферромагнитный сплав не действует ничего, кроме магнитного поля напряженности  $\mathbf{H}$ , то мы предполагаем, что раздвойникование произойдет тогда, когда магнитный момент  $\mathbf{L}_{\text{mag}} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}$  ( $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $\mathbf{M}$  – вектор намагниченности) достигнет некоторого критического значения в определенном направлении относительно короткой оси каждого варианта мартенсита, которые образуют двойник.

## 2. Основные соотношения микромагнетизма

В рамках теории микромагнетизма [11] намагниченность каждой кристаллической ячейки при температуре, существенно ниже температуры Кюри, описывается вектором спонтанной намагниченности  $\mathbf{M}$ , который имеет постоянную длину  $|\mathbf{M}| = M_s$  ( $M_s$  – намагниченность насыщения) и ориентирован по одному из кристаллографических направлений – оси легкого намагничивания, как вдоль этой оси, так и против нее. Изменения направления этого вектора во внешнем и внутреннем (собственном) магнитных полях (его динамика) описывается уравнением Ландау – Лифшица – Гильберта:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}) + \alpha \left( \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right), \quad (2)$$

где  $\mathbf{m} = \mathbf{M} / M_s$  – единичный вектор намагниченности,  $\gamma$  – гиромагнитное отношение,  $\alpha$  – параметр затухания (диссипации),  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  – эффективное поле:

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H}_0 - \nabla \varphi + \frac{2A_{\text{exch}}}{\mu_0 M_s} \Delta \mathbf{m} + \frac{2K_{\text{anis}}}{\mu_0 M_s} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{p}_i) \mathbf{p}_i$$

Здесь  $\mathbf{H}_0$  – приложенное внешнее поле,  $\varphi$  – скалярный магнитный потенциал ( $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \nabla\varphi$ ),  $A_{exch}$  и  $K_{anis}$  – обменная постоянная и константа анизотропии,  $\mathbf{P}_i$  – направление легкой оси варианта  $i$ .

Скалярный магнитный потенциал  $\varphi$  находится (см., например, [6]) из решения уравнения Пуассона в занимаемой телом области  $\Omega^{(in)}$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = M_s \nabla \cdot \mathbf{m} \quad \forall x \in \Omega^{(in)} \quad (3)$$

и уравнения Лапласа во внешнем пространстве  $\Omega^{(ex)}$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \forall x \in \Omega^{(ex)} \quad (4)$$

при этом  $\varphi \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  и на поверхности  $\Gamma$ , отделяющей тело от окружающей его среды  $\varphi^{(in)}|_{\Gamma} = \varphi^{(ex)}|_{\Gamma}$ . Также должны выполняться следующие граничные условия:

$$(\nabla \varphi^{(in)} - \nabla \varphi^{(ex)})|_{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{и} \quad (\nabla \varphi^{(in)} - \nabla \varphi^{(ex)})|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} = M_s \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{n}$  – внешние единичный касательный вектор и единичная нормаль к поверхности тела  $\Gamma$ .

Для вектора намагниченности  $\mathbf{m}$  должно выполняться граничное условие  $[\mathbf{m} \times (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{m})]|_{\Gamma} = 0$ , или, с учётом того, что  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$ ,  $(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{m})|_{\Gamma} = 0$  (граничное условие Неймана).

Используя процедуру Галеркина, дифференциальным соотношениям (2), (3), (4), с учётом записанных граничных условий, поставлены в соответствие вариационные уравнения (см. подробнее в работе [6]). Для численного решения методом конечных элементов, эти вариационные уравнения были преобразованы таким образом, что варьируемыми величинами стали  $\varphi$ ,  $\mathbf{v} = \partial \mathbf{m} / \partial t$  и множитель Лагранжа  $\lambda$ . На первом этапе в отсутствии внешнего магнитного поля задается начальное распределение намагниченности и, решая вариационные уравнения, определяются начальные границы магнитных доменов и распределение намагниченности в них (формируются стенки магнитных доменов). Затем внешнее магнитное поле прикладывается по шагам и на каждом таком шаге решаются вариационные уравнения, описывающие теперь по другим, внутренним шагам по времени изменение магнитного поля при таком приращении внешнего поля.

### 3. Постановка задачи

Для численного моделирования рассмотрим задачу о намагничивании поликристаллического образца из сплава Гейслера  $\text{Ni}_2\text{MnGa}$ . Каждое зерно представляет собой сдвойникованный вариант мартенсита и имеет выраженные анизотропные свойства. На рис.2а представлена структура сдвойникового варианта мартенсита (стрелочками показаны векторы намагниченности, направленные вдоль или против коротких осей в каждом варианте мартенсита), на рис.2б – область, используемая для численного расчета (элементарная ячейка, дублирующаяся вдоль осей  $\delta_1$  и  $\delta_2$ ), с осями анизотропии  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ .

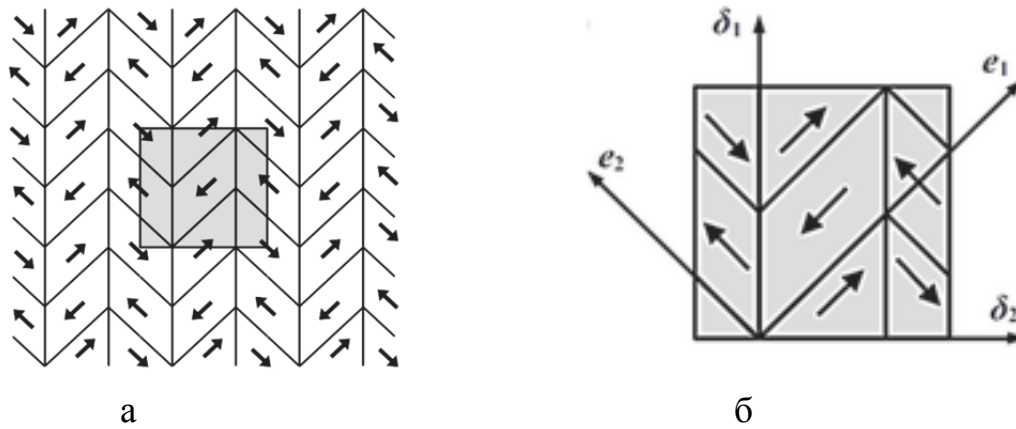


Рис. 2. Микроструктура магнитных доменов в сдвойнированном варианте мартенсита (а) и расчётная область (б)

Считаем, что выделенная расчётная область на рис.2б имеет размер  $380 \text{ нм} \times 380 \text{ нм}$ , поскольку размеры типичной структуры мартенситных пластин в сплаве  $\text{Ni}_2\text{MnGa}$   $100 - 200 \text{ нм}$ . Для этого сплава намагниченность насыщения  $M_s = 6.02 \cdot 10^5 \text{ А/м}$ , константа магнитокристаллической анизотропии  $K_{anis} = 2.45 \cdot 10^5 \text{ Дж/м}^3$ , обменная постоянная  $A_{exch} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ Дж/м}$  [4]. Порядок толщины доменной стенки  $\Delta \approx \sqrt{A_{exch} / K_{anis}} \approx 9 \text{ нм}$ , поэтому был выбран характерный размер  $l \approx$  таким образом, чтобы на доменную стенку приходилось примерно 2.4 характерных размера. Для численного расчёта использовались следующие безразмерные параметры:  $\tilde{M}_s = 1$ ,  $\tilde{K}_{anis} = K_{anis} / \psi_0 \approx 0.54$ ,  $\tilde{A}_{exch} = A_{exch} / (\psi_0 l^2) \approx 3$ , где  $\psi_0 = \mu_0 M_s^2 = 4.55 \cdot 10^5 \text{ Дж/м}^3$ . Обезразмеривалось также внешнее магнитное поле  $\tilde{H}_0 = H_0 / M_s$ . Считалось, что гиромагнитное отношение  $\gamma = 2.21 \cdot 10^5 \text{ м/(А} \cdot \text{с)}$  и параметр затухания  $\alpha = 0.5$  в соответствии с [4], а шаг по времени принимался как  $\tau = \gamma M_s t$ .

#### 4. Результаты численного моделирования

Вначале, в отсутствии внешнего магнитного поля, между магнитными доменами образуются 180-градусные (внутри одного варианта мартенсита) и 90-градусные (между вариантами) стенки, при этом средняя намагниченность рассматриваемой области равна нулю. При приложении внешнего магнитного поля намагниченность вначале растёт за счёт движения 180-градусных стенок магнитных доменов, затем, после их исчезновения, происходит постепенный поворот векторов намагниченности по направлению внешнего магнитного поля. В некотором критическом поле может происходить раздвойникование (переориентация мартенситных вариантов) при достижении магнитным моментом критического значения. В работе [10] показано, что раздвойникование в эксперименте происходит при  $|\tilde{L}|_{\text{mag}}^{\text{cr}} = 0.39$  ( $\tilde{L} = L / \psi_0$ ) в магнитном поле  $\tilde{H}_0^{\text{cr}} = 0.43$ , приложенном вдоль оси анизотропии первого варианта  $e_1$ . Исходя из этого,

считаем, что при любом другом направлении приложения внешнего поля, раздвойникование произойдет, если магнитный момент достигнет указанной выше

критической величины  $|\tilde{\mathbf{L}}_{\text{mag}}^{\text{cr}}| = 0.39$ .

Для построения кривых намагниченности в качестве макроскопического параметра рассматривается среднее значение проекции намагниченности на ось, вдоль которой направлено внешнее магнитное поле  $\tilde{\mathbf{H}}_0$ :

$$\langle m_{\parallel} \rangle = \frac{1}{S} \int_{\Omega^{(in)}} \left( \mathbf{m} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{H}}_0}{|\tilde{\mathbf{H}}_0|} \right) d\Omega^{(in)},$$

где  $S$  – площадь рассматриваемой области.

На рис.3 представлены зависимости среднего значения проекции намагниченности на ось, вдоль которой направлено внешнее магнитное поле от модуля приложенного магнитного поля в случае, когда поле направлено вдоль оси  $\mathbf{e}_1$  (сплошная линия) и вдоль оси  $\delta$  (пунктирная линия). В первом случае наблюдается процесс раздвойникования и связанный с ним скачок в намагниченности в районе  $0.43 \tilde{\mathbf{H}}_0$ , а во втором нет.

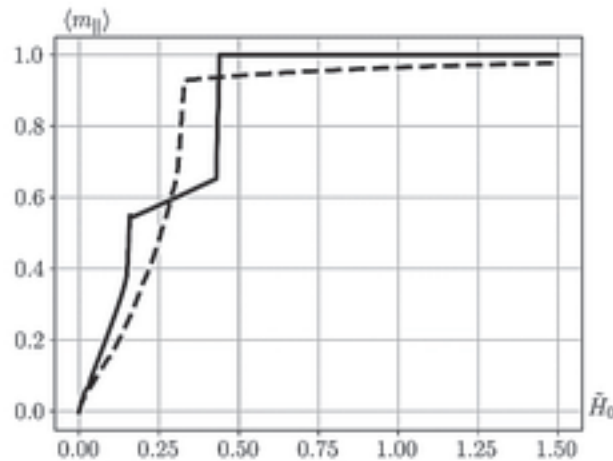


Рис. 3. Кривые намагниченности для сдвойникованных вариантов мартенсита

Рассмотрим поликристаллические образцы, состоящие из сдвойникованных вариантов мартенсита, помещённые во внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}_0$ . Пусть в части образца объёма  $V_1$  зёрна ориентированы таким образом, что направление оси анизотропии первого варианта совпадает с направлением приложенного магнитного поля ( $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{e}_1$ ), а в части образца объёма  $V_2$  зёрна ориентированы таким образом, что приложенное магнитное поле находится в плоскости двойникования ( $\mathbf{H}_0 \parallel \delta$ ). Предполагая, что

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \frac{\langle \mathbf{m} \rangle_1 V_1 + \langle \mathbf{m} \rangle_2 V_2}{V_1 + V_2},$$

где  $\langle m \rangle_1$ ,  $\langle m \rangle_2$  и  $\langle m \rangle$  — средние значения намагниченности в объемах  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V = V_1 + V_2$ , получим кривые намагниченности для поликристаллических образцов.

На рис.4 представлены зависимости среднего значения проекции намагниченности на ось, вдоль которой направлено внешнее магнитное поле от модуля приложенного магнитного поля для поликристаллов, в которых  $V_1 = V_2 = 50\%$  (сплошная линия),  $V_1 = 85\%$  и  $V_2 = 15\%$  (пунктирная линия),  $V_1 = 15\%$  и  $V_2 = 85\%$  (штрихпунктирная линия). Здесь, как и в предыдущем случае, раздвойникование (переориентация мартенситных вариантов, образующих двойник) происходит только в объеме  $V_1$ , и величина скачка намагниченности в районе  $0.43 \tilde{H}_0$  на этих кривых пропорциональна величине этого объема в поликристаллическом образце.

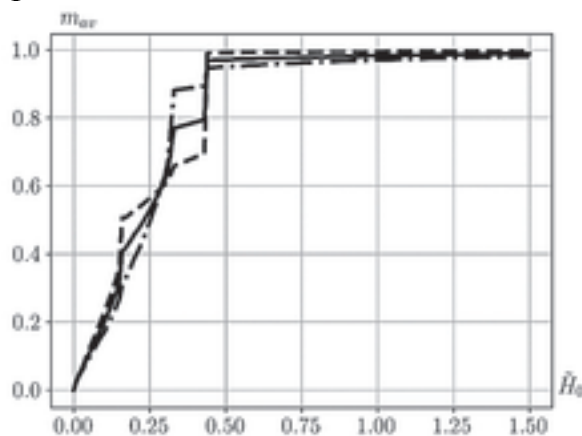


Рис. 4. Кривые намагниченности для поликристаллов

### Заключение

В работе представлена микроструктурная модель поведения ферромагнитного сплава с памятью формы в магнитном поле. С помощью численного моделирования получены кривые намагниченности при приложении внешнего магнитного поля в различных направлениях в сдвойникованных вариантах мартенсита с учётом кинематики возможного раздвойникования. Построены кривые намагниченности для поликристаллов, состоящих из сдвойникованных вариантов мартенсита, расположенных под разными углами к приложенному внешнему магнитному полю.

*Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 20-01-00031.*

### Литература

1. Васильев А.Н., Бучельников В.Д., Такаги Т., Ховайло В.В., Эстрин Э.И. Ферромагнетики с памятью формы // Успехи физических наук. 2003. Т. 173. №6. С. 577-607. DOI: 10.3367/UFNr.0173.200306a.0577;
2. Hane K.F., Shield T.W., Symmetry and microstructure in martensites // Philosophical Magazine A. 1998. V. 78(6). P. 1215-1252. DOI: 10.1080/01418619808239984;

3. Jin Y.M. Domain microstructure evolution in magnetic shape memory alloys: Phase-field model and simulation // *Acta Mater.* 2009. V. 57. P. 2488–2495. DOI: 10.1016/j.actamat.2009.02.003;
4. Mennerich C., Wendler F., Jainta M., Nestler B. A phase-field model for the magnetic shape memory effect // *Arch. Mech.* 2011. V. 63. P. 549-571;
5. Rogovoy A.A., Stolbov O.V., Stolbova O.S. The microstructural model of the ferromagnetic material behavior in an external magnetic field // *Magnetochemistry.* 2021. V. 7. N. 1. P. 1-19. DOI: 10.3390/magnetochemistry7010007;
6. Роговой А.А., Столбова О.С., Столбов О.В. Численное моделирование эволюции магнитной микроструктуры в сплавах гейслера // *ПМТФ.* 2021. Т. 62. № 5 (369). С. 195-207. DOI: [10.15372/PMTF20210519](https://doi.org/10.15372/PMTF20210519);
7. Rogovoy A.A., Stolbova O.S. Comparison of two approaches for microstructural modeling of the ferromagnetic alloys behavior // *IEEE Magnetic Letters.* 2022. V. 13. 2500404. DOI: 10.1109/LMAG.2021.3127112;
8. Haldar K., Kiefer B., Lagoudas D.C. Finite element analysis of the demagnetization effect and stress inhomogeneities in magnetic shape memory alloy samples // *Phil. Mag.* 2011. V. 91. P. 4126-4157. DOI: 10.1080/14786435.2011.602031;
9. Роговой А.А., Столбова О.С. Конечные деформации в сплавах и полимерах с памятью формы // *Ученые записки КнАГТУ.* 2018. Т. 1. № 3 (35). С. 6-17;
10. Rogovoy A.A., Stolbova O.S. Microstructural model of the behavior of a ferroalloy with shape memory in a magnetic field (представлена в журнал);
11. Браун У.Ф. Микромагнетизм – М.: Наука, 1979.

**Ю.Н. Радаев<sup>1</sup>**

## **ДВУХТОЧЕЧНЫЕ И ОДНОТОЧЕЧНЫЕ ТЕНЗОРЫ КОНЕЧНОГО ПОВОРОТА В ГЕОМЕТРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ**

<sup>1</sup>*Институт проблем механики РАН, Москва*

В работе рассматриваются деформированные состояния континуума, допускающие сравнения со своими отсчетными прообразами. Последние считаются погружаемыми в трехмерное евклидово пространство. Обсуждается построение двухточечного тензора конечного поворота и его неконвенциональная ортогональность. Вводятся одноточечные тензоры поворота. Осуществляется переход к двум одноточечным тензорам поворота, ортогональность которых конвенциональна. Приоритет в работе отдается простым алгоритмическим процедурам построения естественных компонент мер и тензоров конечной деформации, а также трансформациям, выполняемым с помощью тензора и соответствующего ему вектора конечного поворота. Вводится псевдовектор конечного поворота, служащий наряду с псевдовектором “экстра” поворота, основным кинематическим параметром в математических моделях микрополярных тел.

1. Деформация континуума распознается по изменению взаимных расстояний между положениями избранных для наблюдения материальных точек, измеряемых в отсчетном и актуальном (деформированном) состояниях. Положе-



ния (места) указанных точек характеризуются координатами (вообще говоря, криволинейными)  $X^\alpha$  — в отсчетном положении и  $x^k$  — в актуальном. Деформация, таким образом, представляет собой дифференцируемое преобразование переменных (лагранжевых в эйлеровы пространственные):

$$X^\alpha \rightarrow x^k. \quad (1)$$

Поскольку деформация проявляется как изменение метрических характеристик континуума, то в теории конечных деформаций рано или поздно приходится сравнивать отсчетную  $\mathcal{G}_{\alpha\sigma}$  и конвективную  $\mathcal{G}_{\alpha\sigma}$  метрики. Метрику пространства обозначим через  $\mathcal{G}_{ks}$ . В дальнейшем изложении тензоры (в том числе и двухточечные (см. [1])) всегда будут рассматриваться относительно одного из двух тензорных базисов (или их подходящей комбинации в случае двухточечного тензора): отсчетного и пространственного.

Допустимо также описание деформации обратным преобразованием (inversed description)

$$X^\alpha \leftarrow x^k. \quad (2)$$

Оба описания деформации совершенно равноправны, хотя первому из них отдается несомненный приоритет. Для того чтобы подчеркнуть равноправие двух способов описания деформации будем использовать запись

$$X^\alpha \rightleftharpoons x^k. \quad (3)$$

В нелинейной механике континуума двухточечный тензор дисторсии определяется частными дифференцированиями эйлеровых координат по лагранжевым. Обозначая через  $\partial_\alpha$  операторы частного дифференцирования по переменным  $X^\alpha$ , запишем компоненты тензора дисторсии в виде

$$\partial_\alpha x^k \quad (\alpha, k = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Для тензора дисторсии (4) будем использовать также сокращенное обозначение:

$$x_\alpha^k.$$

При обратном описании деформации приходится оперировать с обратным тензором дисторсии

$$\partial_k X^\alpha \quad (\alpha, k = 1, 2, 3), \quad (5)$$

для которого, в свою очередь, принимается также обозначение

$$X_k^\alpha.$$

Полярное разложение Коши тензора дисторсии (4) имеет две различные формы. Это обстоятельство характерно для всей теории конечных деформаций, поскольку в ее основе заложен принцип взаимности: каждому тензорному полю с отсчетными лагранжевыми индексами всегда можно поставить в соответствие взаимное (двойственное) тензорное поле с эйлеровыми пространственными индексами. Принцип взаимности чаще всего полагается в основу классификации мер и тензоров деформации.

Рассмотрим сначала полярное разложение дисторсии в форме

$$\partial_\alpha x^i = |x|_{\alpha\beta} \lambda^{i\beta}, \quad (6)$$

где  $|x|_{\alpha\beta}$  – модуль дисторсии,  $\lambda^{i\beta}$  – тензор конечного поворота. Модуль дисторсии  $|x|_{\alpha\beta}$  представляет собой одноточечный симметричный тензор второго ранга, все собственные значения которого положительны:  $|x|_\alpha > 0$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Тензор конечного поворота является двухточечным и характеризуется следующими свойствами “двухточечной ортогональности”:

$$\lambda^{i\beta} \lambda_{k\beta} = \delta_k^i, \quad \lambda^{k\alpha} \lambda_{k\sigma} = \delta_\sigma^\alpha. \quad (7)$$

Сразу же приведем двойственный по отношению к (6) вариант полярного разложения тензора дисторсии:

$$\partial_\alpha x^i = |x|^{ik} \lambda_{k\sigma}. \quad (8)$$

Не составляет труда заметить, что взаимный модуль дисторсии  $|x|^{ik}$  получается из исходного поднятием нижних греческих индексов с помощью тензоров конечного поворота

$$|x|^{ik} = |x|_{\alpha\beta} \lambda^{i\alpha} \lambda^{k\beta}. \quad (9)$$

Таким образом, тензор конечного поворота выступает в качестве простого инструмента преобразования греческих индексов в латинские. Замечательное соотношение (9) как раз и характеризует такую возможность, предоставляемую двухточечным тензором поворота.

**2. Механика конечных деформаций** весьма тщательно изложена в нескольких классических монографиях (см., например, [1-5]). Коротко остановимся на классификации мер и тензоров конечной деформации, основанной на принципе взаимности. При этом все тензоры являются одноточечными, имеют ранг 2 и определяются своими *естественными* компонентами в тензорных базисах, образованных диадными произведениями локальных векторов отсчетной и пространственной систем координат.

Для *мер конечной деформации* имеем следующие три пары взаимных тензоров (показатели алгебраических степеней тензора располагаются над корневым символом, для них используются конвенциональные символы и термины):

$$U_{\alpha\beta} = |x|_{\alpha\beta} \quad \text{правый тензор растяжений Био,}$$

$$V^{ik} = |x|^{ik} \quad \text{левый тензор растяжений Био;}$$

$$C_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta}^2 = g_{\alpha\beta} = x_\alpha^i x_\beta^k g_{ik} = g^{\gamma\sigma} |x|_{\alpha\gamma} |x|_{\beta\sigma} \quad \text{правый тензор деформации Коши,}$$

$$B^{ik} = V^{ik2} = x_\alpha^i x_\beta^k g^{\alpha\beta} = g_{ls} |x|^{il} |x|^{ks} \quad \text{левый тензор деформации Коши, тензор деформации Фингера;}$$

$$C^{\alpha\beta} = g^{ks} X_k^\alpha X_s^\beta \quad \text{тензор деформации Фингера,}$$

$$c_{ik} = B_{ik} = g_{\alpha\beta} X_i^\alpha X_k^\beta \quad \text{тензор деформации Коши (Фингера, Пиола).}$$

Ниже приводятся три наиболее распространенных в механике континуума пары тензоров конечной деформации:

$$\gamma_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \quad \text{тензор деформации Био,}$$

$$p^{ik} = V^{ik} - g^{ik} \quad \text{тензор деформации Альманси–Гамеля;}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(C_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) \quad \text{тензор деформации Грина–Лагранжа (Грина–Сен-Венана),}$$

$$b^{ik} = \frac{1}{2}(B^{ik} - g^{ik}) \quad \text{конвенциональный термин отсутствует;}$$

$$A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\beta} - C^{\alpha\beta}) \quad \text{тензор деформации Альманси,}$$

$$a_{ik} = \frac{1}{2}(g_{ik} - B_{ik}) \quad \text{тензор деформации Эйлера–Альманси.}$$

Заметим, что компоненты тензоров деформации с греческими индексами инвариантны при поворотах локальных пространственных координатных триэдров (и в этом смысле они *объективны*); в свою очередь, компоненты тензоров деформации с латинскими индексами инвариантны при поворотах локальных отсчетных координатных триэдров (т.е. они материально *индифферентны*). Ясно, что двухточечный тензор конечного поворота  $\lambda^{i\beta}$  не обладает ни одним из указанных свойств.

Необходимо также отметить, что компоненты правого тензора деформации Коши  $C_{\alpha\beta}$  суть компоненты конвективной метрики. Несложные выкладки позволяют продемонстрировать, что

$$g_{\alpha\beta} = g^{\gamma\sigma} |x|_{\alpha\gamma} |x|_{\beta\sigma}.$$

**3.** Двухточечный тензор конечного поворота в силу (9) определяет поворот главных осей деформации в отсчетном состоянии (соответствующий триэдр состоит из взаимно ортогональных собственных векторов тензора  $|x|_{\alpha\beta}$ ) к их новому пространственному положению (которое задается собственными векторами тензора  $|x|^{ik}$ ). Дисторсия (4), будучи производной по отсчетным координатам, не изменяется при трансляциях пространственных и отсчетных координат на постоянный вектор. То же самое можно сказать и о модуле дисторсии. Однако поворот локальной координатной системы (как отсчетной, так и пространственной) оказывает влияние на дисторсию.

Обратимся к метрическим соотношениям, характерным для тензора  $\lambda^{i\beta}$ . Как и в случае с преобразованием (9), тензор поворота позволяет трансформировать

латинские индексы в греческие у компонент отсчетной и пространственной метрик. Так, нетрудно видеть, что справедливо соотношение

$$g_{ij} \lambda^{i\beta} \lambda^{j\gamma} = g^{\beta\gamma}, \quad (10)$$

а также двойственное ему метрическое соотношение

$$g_{\beta\gamma} \lambda^{i\beta} \lambda^{j\gamma} = g^{ij}. \quad (11)$$

Данные выше соотношения устанавливают, что произвольный отсчетный вектор  $p_\beta$  в результате трансформации, определяемой тензором  $\lambda^{i\beta}$ , переходит согласно

$$q^i = \lambda^{i\beta} p_\beta \quad (12)$$

в пространственный вектор  $q^i$  точно такой же длины, если измерять длины соответствующих векторов на основании отсчетной и пространственной метрик. Сформулированное свойство тензора  $\lambda^{i\beta}$  позволяет характеризовать его как *неконвенционально ортогональный* и трактовать преобразование (12) как поворот.

С прикладной точки зрения представляется совершенно ясным, что неконвенционально ортогональный тензор конечного поворота неудобен, поскольку к нему не может быть непосредственно применен богатый арсенал линейной алгебры. Поэтому возникает необходимость перехода к одноточечным ортогональным тензорам поворота. Конвенционально ортогональный тензор  $\alpha^{ij}$  определяется фундаментальным соотношением

$$\alpha^{*ij} = \alpha^{-1ij},$$

из которого могут быть получены следующие равенства:

$$\alpha^{ij} \alpha_{kj} = \delta_k^i, \quad \alpha^{ij} \alpha_{ik} = \delta_k^j. \quad (13)$$

Собственно ортогональный тензор полностью определяется пространственной осью (указывается с помощью единичного директора  $c_k$ ) и углом поворота  $\theta$ . В геометрических терминах собственно ортогональный тензор имеет следующее хорошо известное представление:

$$\alpha^{ij} = \cos \theta g^{ij} + (1 - \cos \theta) c^i c^j - \sin \theta e^{ijk} c_k, \quad (14)$$

в котором  $e^{ijk}$  есть дискриминантный тензор, первые два слагаемых составляют симметричную часть тензора  $\alpha^{ij}$ , а третье слагаемое – антисимметричную. Единичный директор  $c_k$  есть собственный вектор тензора  $\alpha^{ij}$ , соответствующий вещественному собственному значению  $+1$ :

$$\alpha^{ij} c_j = c^i.$$

Указанный вектор вычисляется согласно

$$c_k = -\frac{1}{2 \sin \theta} e_{kij} \alpha^{[ij]}.$$

Угол поворота находится на основании формулы

$$2 \cos \theta = g_{ls} \alpha^{ls} - 1$$

4. Учитывая сказанное выше, становится необходимым осуществить переход к двум взаимным конвенционально ортогональным тензорам  $\lambda^{\alpha\beta}$  и  $\lambda^{ij}$ , характеризующим поворот главных осей деформации. С этой целью удобнее всего ввести следующие двухточечные символы:

$$g_k^{\cdot\alpha} = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}^\alpha, \quad g_\alpha^{\cdot k} = \mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}^k, \quad (15)$$

представляющие собой скалярные произведения локальных базисных векторов отсчетной и пространственной координатной систем.

Символы (15) обладают рядом замечательных свойств. Например, легко проверяется, что

$$g^{ks} g_k^{\cdot\alpha} = g^{\alpha\beta} g_\beta^{\cdot s}$$

и, кроме того, справедливы следующие двойственные друг другу соотношения (ср. с (10), (11)):

$$g_{\alpha\omega} = g_{js} g_\alpha^{\cdot j} g_\omega^{\cdot s},$$

$$g_{il} = g_{\sigma\tau} g_i^{\cdot\sigma} g_l^{\cdot\tau}$$

С помощью символов (15) одноточечные тензоры конечного поворота можно определить согласно

$$\lambda^{\alpha\beta} = g_k^{\cdot\alpha} \lambda^{k\beta}, \quad (16)$$

$$\lambda^{ij} = g_\alpha^{\cdot j} \lambda^{i\alpha}. \quad (17)$$

Первый из них естественно назвать лагранжевым тензором поворота, а второй – эйлеровым.

Оба указанных тензора (16), (17) удовлетворяют конвенциональным условиям ортогональности, аналогичным (13). Оба характеризуются одинаковым углом поворота  $\vartheta$ , поскольку их первые инварианты совпадают:

$$g_{\alpha\beta} \lambda^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} g_k^{\cdot\alpha} \lambda^{k\beta} = g_{\alpha\beta} g_{ks} g^{\alpha\sigma} g_\sigma^{\cdot s} \lambda^{k\beta} = g_{ks} g_\beta^{\cdot s} \lambda^{k\beta} = g_{ks} \lambda^{ks}$$

Пространственный вектор конечного поворота  $\lambda_k$  есть ( $\vartheta$  – угол мгновенного поворота триэдра главных осей деформации)

$$\lambda_k = -\frac{1}{2 \sin \vartheta} e_{kij} \lambda^{[ij]} \quad (18)$$

Вектору поворота  $\lambda_k$  соответствует псевдовектор  $\lambda_k^{[-1]}$  веса  $-1$ , который вычисляется по формуле

$$\lambda_k^{[-1]} = -\frac{1}{2 \sin \vartheta} \varepsilon_{kij} \lambda^{[ij]}$$

где  $\varepsilon_{kij}$  – альтернирующий символ, который как известно представляет собой псевдотензор веса  $-1$ .

Вектор и псевдовектор поворота и “экстра” поворота служат основными кинематическими параметрами в математических моделях микрополярных тел [6]. Микрополярная теория упругости по-прежнему довольно быстро развивается в связи с ее многочисленными приложениями к механике неплотно связанных сыпучих и гранулированных сред, волокнистых материалов и сотовых конструкций. Гемитропные микрополярные механические свойства оказываются присущими биоматериалам, чувствительным к зеркальным отражениям их механических состояний. Псевдовекторы поворота и “экстра” поворота не изменяют своих компонент при преобразованиях отражения локальных базисных систем и наиболее просто связываются с антисимметричными частями ортогональных тензоров поворота.

Уравнения микрополярной теории упругости достаточно хорошо известны. Их вывод, основанный на принципе виртуальных перемещений, имеется в статье [7]. В случае микрополярного континуума “полный” поворот элемента тела, определяемый кинематически “независимым” вектором поворота, состоит из “жесткого” поворота элемента среды за счет трансляционно-инвариантной дисторсии и “экстра” поворота. Другими словами, “экстра” поворот отражает наличие микроструктуры континуума, которая в простейших моделях микрополярной теории упругости описывается характерной определяющей микродлиной и еще тремя физически безразмерными определяющими постоянными.

*Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект № 20-01-00666.*

### Литература

1. Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Ed. S. Flugge. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1960, pp. 226-902;
2. Prager W. Introduction to the Mechanics of Continua. Ginn and Company, Boston, 1961. X+230 pp.;
3. Sedov L.I. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. London, Addison-Wesley Publishing Company, 1965. XVI+270 pp.;
4. Berdichevsky V.L. Variational Principles of Continuum Mechanics. I. Fundamentals. Heidelberg, Dordrecht, London, New York, Springer, 2009. XVIII+586 pp.;
5. Lurie A. I. Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005, 1050 pp.;
6. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt, Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.;
7. Radayev Y. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories. Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517.

Ю.Н. Радаев<sup>1</sup>, Е.В. Мурашкин<sup>1</sup>

## ОБ ОДНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ В АНАЛИЗЕ ПСЕВДОТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва*

В работе обсуждаются вопросы реализации ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензорных полей произвольных рангов и весов, представляя интерес с точки зрения механики континуума, т.к., например, градиент деформации и тензор напряжений Пиола–Кирхгофа представляют собой двухточечные тензорные поля. Вводится понятие двухточечного псевдотензорного поля, основанного на формуле его преобразования при замене систем координат. Приводится формула преобразования двухточечного псевдотензорного поля к двухточечному абсолютному тензорному полю. Вводятся определения полных и неполных операторов Гамильтона, частного и ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензоров. Рассматриваются важные примеры двухточечных псевдотензорных полей из нелинейной механики деформируемого твердого тела. Обсуждаются псевдотензор напряжений Схоутена и двухточечный первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа.

1. Двухточечные тензоры играют исключительно важную роль в нелинейной механике континуума [1-4]. К таким тензорам относятся градиент деформации, тензор конечного поворота, тензор силовых напряжений Пиола–Кирхгофа и т.д. Некоторые из таких полей имеют псевдотензорную природу. Без последовательного использования псевдотензорного формализма двухточечных полей невозможно также и корректное построение моделей гемитропных микрополярных упругих континуумов [5-7]. Поиск сведений о правилах ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензорных полей сопряжено с большими трудностями.

В настоящем исследовании вводится понятие двухточечного псевдотензорного поля, основанного на формуле его преобразования при замене систем координат. Приводятся определения полных и неполных операторов частного и ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензоров. Получены формулы для ковариантных производных двухточечного псевдотензорного поля. Более глубокое и полное изложение подходов псевдотензорного формализма можно найти в книгах по тензорному анализу и механике сплошных сред [1, 8-12]. Основы алгебры и анализа абсолютных двухточечных тензорных полей можно найти в работе [1]. Ранее авторами в работах [5-7, 13, 14] рассматривались правила ковариантного дифференцирования одноточечных псевдотензорных полей, используемых в механике микрополярных континуумов и механике растущих тел.

2. Введем в евклидовом пространстве две системы координат  $X^\alpha$  и  $x^s$ . Следуя терминологии нелинейной механики континуума, будем называть одну из них  $X^\alpha$  отсчетной (лагранжевой), а вторую  $x^s$  – пространственной (эйлеровой). Греческие и латинские индексы будут соответственно ассоциироваться с

отсчетными  $X^\alpha$  и пространственными  $x^s$  координатами. Штрих слева от символа будет соответствовать объектам в отсчетной конфигурации.

Обозначим через  $\dot{\gamma}_\alpha$  и  $\dot{\gamma}_s$  векторы ковариантных базисов, а через  $\dot{e}$  и  $e$  – фундаментальные ориентирующие псевдоскаляры.<sup>1</sup> Введем также метрические тензоры

$$\dot{g}_{\alpha\gamma} = \dot{\gamma}_\alpha \cdot \dot{\gamma}_\gamma, \quad g_{sk} = \dot{\gamma}_s \cdot \dot{\gamma}_k.$$

Двухточечный псевдотензор с корневым символом  $T$  рангов  $\dot{n}$  и  $n$  с весами  $\dot{w}$  и  $w$  будет зависеть от пары переменных  $X^\alpha$  и  $x^s$  и его компоненты будут содержать как латинские, так и греческие индексы:

$$\begin{matrix} [\dot{w}, w] \\ T \\ (n, n) \end{matrix} \begin{matrix} lm \dots s & \alpha\beta \dots \gamma \\ \dots ij \dots k \dots \lambda \mu \dots \nu \end{matrix}. \quad (1)$$

При переходе к другим системам координат  $x^{\underline{s}}$  ( $\underline{s} = 1, 2, \dots, N$ ) и  $X^{\underline{\alpha}}$  ( $\underline{\alpha} = 1, 2, \dots, N$ ) при одновременном преобразовании координат ( $X^\alpha \rightarrow X^{\underline{\alpha}}$ ,  $x^s \rightarrow x^{\underline{s}}$ ) компоненты двухточечного псевдотензора (1) преобразуются согласно закону

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} [\dot{w}, w] \\ T \\ (n, n) \end{matrix} \begin{matrix} lm \dots \underline{s} & \underline{\alpha}\underline{\sigma} \dots \underline{\tau} \\ \dots ij \dots k \dots \lambda \kappa \dots \nu \end{matrix} = [\det(\partial_{\underline{\beta}} X^\gamma)]^{\dot{w}} [\det(\partial_{\underline{p}} x^q)]^w \times \\ & \times (\partial_l x^l) (\partial_m x^m) \dots (\partial_s x^{\underline{s}}) (\partial_i x^i) (\partial_h x^h) \dots (\partial_k x^k) \times \\ & \times (\partial_\alpha x^{\underline{\alpha}}) (\partial_\sigma x^{\underline{\sigma}}) \dots (\partial_\tau x^{\underline{\tau}}) (\partial_\lambda x^\lambda) (\partial_\kappa x^\kappa) \dots (\partial_\nu x^\nu) \times \\ & \times \begin{matrix} [\dot{w}, w] \\ T \\ (n, n) \end{matrix} \begin{matrix} lm \dots s & \alpha\sigma \dots \tau \\ \dots ij \dots k \dots \lambda \kappa \dots \nu \end{matrix}, \quad (2) \end{aligned}$$

где для сокращенных операторов частного дифференцирования приняты обозначения

$$\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}, \quad \partial_{\dot{h}} = \frac{\partial}{\partial x^{\dot{h}}}, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial X^\alpha}, \quad \partial_{\underline{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial X^{\underline{\alpha}}},$$

а веса  $\dot{w}$  и  $w$  — целые числа. Дробные и иррациональные веса не допускаются, т.к. в этом случае степени якобиана в (2) могут быть комплексными. Нулевые веса и ранги не отражаются в обозначениях. То же самое касается весов фундаментальных величин и ориентирующих псевдоскаляров.

С помощью фундаментальных ориентирующих псевдоскаляров  $\dot{e}$  и  $e$  двухточечные псевдотензоры можно преобразовать в абсолютные согласно правилу

$$\begin{matrix} T \\ (n, n) \end{matrix} \begin{matrix} lm \dots s & \alpha\beta \dots \gamma \\ \dots ij \dots k \dots \lambda \mu \dots \nu \end{matrix} = \dot{e}^{-\dot{w}} e^{-w} \begin{matrix} [\dot{w}, w] \\ T \\ (n, n) \end{matrix} \begin{matrix} lm \dots s & \alpha\beta \dots \gamma \\ \dots ij \dots k \dots \lambda \mu \dots \nu \end{matrix}. \quad (3)$$

**3.** Введем следующие обозначения для неполных (частных) производных по явному вхождению переменных  $X^\alpha$  и  $x^k$ :

$$\partial_\alpha^{expl}, \quad \partial_k^{expl}.$$

В механике континуума введенные системы координат связаны между собой преобразованием деформации

$$X^\alpha \rightleftharpoons x^i.$$

<sup>1</sup> Которые определяются как косое произведение базисных векторов. Определение костоого произведения имеется в книге [15].



Операция полного (total) дифференцирования подразумевает вычисление производных не только по явным (explicit) вхождениям переменных, но и по неявным, определяемым преобразованием деформации. Полные производные по переменным  $X^\alpha$  и  $x^k$  будем обозначать через

$$\partial_\alpha^{total}, \quad \partial_k^{total}.$$

С целью сокращения записи уравнений поля для полных производных используют обычные обозначения

$$\partial_\alpha \equiv \partial_\alpha^{total}, \quad \partial_k \equiv \partial_k^{total}.$$

Очевидно, что полные и неполные производные связаны между собой следующими соотношениями

$$\partial_\alpha^{total} = \partial_\alpha^{expl} + (\partial_\alpha x^k) \partial_k^{expl}, \quad (4)$$

$$\partial_k^{total} = \partial_k^{expl} + (\partial_k X^\alpha) \partial_\alpha^{expl}. \quad (5)$$

Определим неполные операторы Гамильтона согласно

$$\nabla^{expl} = \overset{\alpha}{i} \partial_\alpha^{expl}, \quad \nabla^{expl} = \overset{k}{i} \partial_k^{expl}. \quad (6)$$

Вместо (6) для псевдотензора с весами  ${}^w, {}^w$  неполные операторы Гамильтона следует определять согласно

$$\nabla^{expl} = e^w \overset{\alpha}{i} \partial_\alpha^{expl} e^{-w}, \quad \nabla^{expl} = e^w \overset{k}{i} \partial_k^{expl} e^{-w}. \quad (7)$$

Неполные отсчетный и пространственный градиенты двухточечного псевдотензорного поля произвольных рангов и весов  ${}^w, {}^w$  можно принять в виде [13]:

$$e^w \nabla^{expl} \otimes e^{-w} \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)}, \quad e^w \nabla^{expl} \otimes e^{-w} \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)}. \quad (8)$$

Указанные определения обусловлены тем, что степени фундаментальных ориентирующих псевдоскаляров ковариантно постоянны. Подразумевается, что набла операторы действуют на все объекты, расположенные после них.

Преобразуем формулы (8) с учетом хорошо известных зависимостей

$$\partial_\nu^{expl} \overset{\mu}{i} = -\Gamma_{\alpha\nu}^\mu \overset{\alpha}{i}, \quad \partial_\nu^{expl} \overset{\mu}{i} = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \overset{\alpha}{i}, \quad \frac{\partial_\alpha^{expl} e}{e} = \Gamma_{\alpha\nu}^\nu; \quad (9)$$

$$\partial_p^{expl} \overset{m}{i} = -\Gamma_{sp}^m \overset{s}{i}, \quad \partial_p^{expl} \overset{m}{i} = \Gamma_{mp}^s \overset{s}{i}, \quad \frac{\partial_p^{expl} e}{e} = \Gamma_{ps}^s. \quad (10)$$

После несложных рассуждений можно заключить, что неполная ковариантная производная по пространственным координатам  $x^p$  реализуется в форме:

$$\begin{aligned} \nabla_p^{expl} \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)} \overset{lm\dots s}{\dots ij\dots k\dots \lambda\mu\dots\nu} \overset{\alpha\beta\dots\gamma}{\dots} &= \partial_p^{expl} \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)} \overset{lm\dots s}{\dots ij\dots k\dots \lambda\mu\dots\nu} \overset{\alpha\beta\dots\gamma}{\dots} + \\ &+ \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)} \overset{qm\dots s}{\dots ij\dots k\dots \lambda\mu\dots\nu} \overset{\alpha\beta\dots\gamma}{\dots} \Gamma_{qp}^l + \dots + \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)} \overset{lm\dots q}{\dots ij\dots k\dots \lambda\mu\dots\nu} \overset{\alpha\beta\dots\gamma}{\dots} \Gamma_{qp}^s - \\ &- \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)} \overset{lm\dots s}{\dots qj\dots k\dots \lambda\mu\dots\nu} \overset{\alpha\beta\dots\gamma}{\dots} \Gamma_{ip}^q - \dots - \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)} \overset{lm\dots s}{\dots ij\dots q\dots \lambda\mu\dots\nu} \overset{\alpha\beta\dots\gamma}{\dots} \Gamma_{kp}^q - \\ &- \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)} \overset{lm\dots s}{\dots ij\dots k\dots \lambda\mu\dots\nu} \overset{\alpha\beta\dots\gamma}{\dots} \Gamma_{qp}^q. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично, реализуется неполная ковариантная производная по отсчетным координатам  $X^\sigma$

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma^{\text{expl}} T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots q \alpha\beta\dots\gamma} &= \partial_\sigma^{\text{expl}} T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots q \alpha\beta\dots\gamma} + \\ &+ T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots q \zeta\beta\dots\gamma} \nabla_{\zeta\sigma}^\alpha + \dots + T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots q \alpha\beta\dots\zeta} \nabla_{\zeta\sigma}^\gamma - \\ &- T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots q \alpha\beta\dots\gamma} \nabla_{\lambda\sigma}^\zeta - \dots - T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots q \alpha\beta\dots\gamma} \nabla_{\nu\sigma}^\zeta - \\ &- \nabla_w T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots q \alpha\beta\dots\gamma} \nabla_{\zeta\sigma}^\zeta. \end{aligned} \quad (12)$$

По аналогии с (6) определим полные операторы Гамильтона в следующих формулах

$$\nabla^{\text{total}} = \dot{\gamma} \partial_\alpha^{\text{total}}, \quad \nabla^{\text{total}} = i \partial_k^{\text{total}}. \quad (13)$$

Тогда, полные отсчетный и пространственный градиенты двухточечного псевдотензорного поля произвольных рангов  $n, n$  и весов  $w, w$  примем в форме:

$$e^w e^{w'} \nabla^{\text{total}} \otimes e^{-w} e^{-w'} T_{(n,n)}^{[w,w]}, \quad (14)$$

$$e^w e^w \nabla^{\text{total}} \otimes e^{-w} e^{-w} T_{(n,n)}^{[w,w]}. \quad (15)$$

Вычисляя (14) и (15) с учетом (4) и (5) получим выражения, позволяющие реализовать полное ковариантное дифференцирование двухточечных псевдотензорных полей в следующем виде:

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma^{\text{total}} T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots s \alpha\beta\dots\gamma} &= \nabla_\sigma^{\text{expl}} T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots s \alpha\beta\dots\gamma} + \\ &+ (\partial_\sigma x^p) \nabla_p^{\text{expl}} T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots s \alpha\beta\dots\gamma}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \nabla_p^{\text{total}} T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots s \alpha\beta\dots\gamma} &= \nabla_p^{\text{expl}} T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots s \alpha\beta\dots\gamma} + \\ &+ (\partial_p X^\sigma) \nabla_\sigma^{\text{expl}} T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots s \alpha\beta\dots\gamma}. \end{aligned} \quad (17)$$

**4. Рассмотрим примеры, интересные с точки зрения механики континуума.** Псевдотензор силовых напряжений Схоутена [10, р.~142]) является одноточечной аффинорной плотностью веса +1.

Для дивергенции псевдотензора напряжений Схоутена будут справедливы равенства

$$\nabla_k^{[+1]} T_{(2)}^{ki} = \nabla_k^{\text{total}} T_{(2)}^{[+1]ki} = \nabla_k^{\text{expl}} T_{(2)}^{[+1]ki}, \quad (18)$$

играющие особенно важную роль в теориях поля [16, 17].

Запишем уравнения баланса импульса в отсчетной системе координат

$$\dot{\rho} \ddot{x}^k = \nabla_\alpha^{\text{total}} S^{\alpha k} + \dot{\rho} b^k. \quad (19)$$

Здесь  $\dot{\rho}$  — отсчетная плотность массы,  $S^{\alpha k}$  — первый тензор силовых напряжений Пиола–Кирхгофа (двухточечный тензор с нулевыми весами ( $w=0$ ,  $w=0$ )).

Тензор напряжений Пиола–Кирхгофа связан с тензором силовых напряжений Коши соотношением

$$S^{\alpha k} = J T^{ik} (\partial_i X^\alpha), \quad J = e^{\text{conv}} / \dot{e}. \quad (20)$$

Преобразуем уравнения (19) с использованием (16) к виду

$$\dot{\rho} \ddot{x}^k = \nabla_\alpha^{\text{expl}} S^{\alpha k} + (\partial_\alpha x^p) \nabla_p^{\text{expl}} S^{\alpha k} + \dot{\rho} b^k. \quad (21)$$

Вычисляя неполные ковариантные производные в (21) согласно (11) и (12) получим

$$\dot{\rho} \ddot{x}^k = \partial_\alpha^{\text{expl}} S^{\alpha k} + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha S^{\sigma k} + (\partial_\alpha x^h) \partial_h^{\text{expl}} S^{\alpha k} + (\partial_\alpha x^h) \Gamma_{ih}^k S^{\alpha i} + \dot{\rho} b^k. \quad (22)$$

После несложных преобразований получим

$$\dot{\rho} \ddot{x}^k = \frac{1}{\dot{e}} \partial_\alpha^{\text{total}} \dot{e} S^{\alpha k} + (\partial_\alpha x^h) \Gamma_{ih}^k S^{\alpha i} + \dot{\rho} b^k. \quad (23)$$

Условиях отсутствия массовых сил уравнение примет наиболее простой вид

$$\partial_\alpha^{\text{total}} \dot{e} S^{\alpha k} = 0. \quad (24)$$

В теориях поля [16, с. 142] уравнение (24) записывается в форме

$$\partial_\alpha^{\text{total}} \dot{e} S^{\alpha \cdot} = 0. \quad (25)$$

Уравнение (23) — фундаментальное уравнение нелинейной теории упругости, позволяющее сформулировать краевую задачу в терминах  $X^\alpha$  и отсчетной конфигурации и поставить граничные условия на известных граничных поверхностях.

*Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект № 20-01-00666.*

### Литература

1. Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226–902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6\_2.;
2. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. 579p.;
3. Maugin G. A. Material inhomogeneities in elasticity. – CRC Press, 2020.;
4. Весоловский З. Динамические задачи нелинейной теории упругости. Научная думка, 1981. 216 с.;
5. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, No 4. С. 399–412.;
6. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, No 3. С. 424–444.;
7. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, No 4. С. 752–761.;

8. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.];
9. Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi+324 pp.;
10. Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 1951. 275 pp.;
11. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ: с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматлит, 1963. 411 с.;
12. Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.];
13. Yu. N. Radayev, E. V. Murashkin, and T. K. Nesterov On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2022. Т. 26, No 1. Pp. 40–51;
14. Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона-Кэли // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 130-138;
15. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука. 1966. 648 с.;
16. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 156 с.;
17. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.

**А.П. Господариков<sup>1</sup>, М.А. Зацепин<sup>1</sup>**

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОРОДНОГО МАССИВА ПРИ СЕЙСМОНАГРУЗКАХ**

<sup>1</sup>*Санкт-Петербургский горный институт, Санкт-Петербург*

В области геодинамики видное место отводится задачам динамического разрушения массива горных пород. Современные расчетные методы определения напряженного состояния при известной статической нагрузке эффективно применяются при решении прикладных задач. Поэтому приобретает все большее значение решение актуальных динамических задач. В ряде научных работ, вышедших в последнее время в области геодинамического разрушения, были сделаны многочисленные попытки получения решений указанных задач [1,6-14]. Но они носят, как правило, единичный характер, связаны с получением решений достаточно узкого класса задач геодинамики или привязаны к конкретному объекту исследования. Последнее объясняется значительными математическими трудностями, возникающими при решении подобных задач. Отметим, что при определении напряженно-деформированного состояния (НДС) массива горных пород при воздействии на него динамических нагрузок приходится учитывать много обстоятельств: механические характеристики массива, гео-

метрические особенности горных сооружений, параметры динамических проявлений горного давления, тектонические явления и т.д. Описание контуров полостей, начальных и граничных условий в этом случае затруднительно, а соответственно, и построение решений таких задач. Исследователям приходится применять различные приближенные методы, позволяющие получать решения за счет некоторого упрощения геометрии формы исследуемого объекта, понижение порядка соответствующих краевых задач геодинамики и т.д.

Так, при определении параметров сейсмозрывных волн и вмещающего массива при ведении взрывных работ вблизи действующего газопровода, был разработан комплекс вычислительных программ, позволяющий моделировать процесс взаимодействия сейсмозрывных волн с подземными газопроводами в условиях магистрального газопровода «Ленинград-Выборг-госграница» [2]. С помощью разработанного программного комплекса определяется сейсмобезопасная масса заряда на основе проведения серии численных экспериментов с различными параметрами буровзрывных работ, в результате которых получены зависимости напряжений от времени в грунте и трубопроводе при прохождении сейсмозрывных волн. Если напряжения не превышают предела прочности (с учетом принятого коэффициента запаса), то заданные параметры буровзрывных работ, использованные в численных экспериментах, являются сейсмобезопасными.

Расчетная схема исследования в рамках применения метода конечных элементов включает в себя подобласти трубной цилиндрической оболочки, скального грунта, песчаной засыпки, а также подобласти идеально согласованных слоев и объемного генератора волн, в котором генерируется сейсмозрывная нагрузка с заданными параметрами. Между областями засыпки и скального грунта введены переходные области, в которых деформационные параметры плавно меняются от области скального грунта к мягкому грунту. Это сделано для получения устойчивости и сходимости численного решения в местах соединения областей с разными деформационными характеристиками (расчетная схема изображена на рис.1).

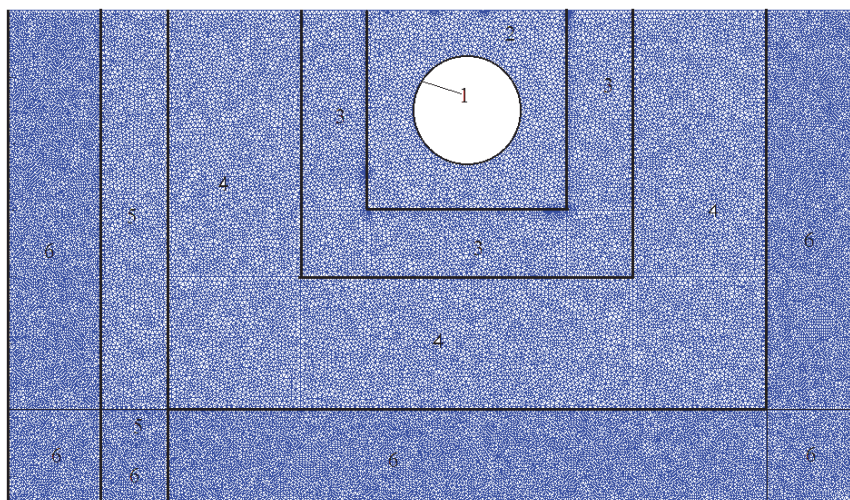


Рис. 1. Сетка конечных элементов: 1 – трубопровод; 2 – песчаная засыпка; 3 – переходные области; 4 – скальный грунт; 5 – объемный генератор волн; 6 – идеально согласованные слои

Деформационные характеристики песчаной засыпки, используемые в принятой модели деформирования мягких грунтов [2]: модуль объемного сжатия  $K = 95 \cdot 10^6$ , Па; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ; модуль сдвига  $G = 44 \cdot 10^6$ , Па; скорость объемных волн  $C_V = 235$ , м/с; скорость поперечных волн  $C_S = 160$ , м/с; начальная плотность  $\rho_0 = 1700$ , кг/м<sup>3</sup>; начальное давление  $p = 1 \cdot 10^5$ , Па; предельная плотность на упругом участке  $\rho_e = 1700,4$  кг/м<sup>3</sup>; предельное давление на упругом участке  $p_e = 1,2 \cdot 10^5$ , Па; предельное давление, после которого кривые нагрузки и разгрузки совпадают  $p_{lim} = 1,2 \cdot 10^5$ , Па; параметры кривой разгрузки  $\gamma_c = 2$ ,  $\gamma_p = 2$ .

Зависимость предела текучести в грунте от давления  $P$  описывается соотношением:

$$Y(p) = Y_0 + \frac{1}{\frac{1}{\mu p} + \frac{1}{Y_{pl} - Y_0}},$$

где  $Y_0$  – сцепление;  $\mu$  – величина, связанная с коэффициентом внутреннего трения;  $Y_{pl}$  – предельное значение сдвиговой прочности. В расчете приняты параметры:  $Y_0 = 2 \cdot 10^4$ , Па;  $\mu = 0,92$ .

Деформационные характеристики скального грунта, используемые в принятой модели деформирования скальных грунтов, следующие: модуль объемного сжатия  $K = 170$ , Па; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,1$ ; модуль сдвига  $G = 18,5 \cdot 10^6$ , Па; коэффициент динамической вязкости  $\eta = 1,3$ .

В качестве нулевого приближения к массе взрываемого заряда взята нижняя граница взрываемого заряда, то есть  $Q = 14$  кг.

Амплитуда скорости смещений в сейсмозрывной волне определяется по известной формуле М.А. Садовского:

$$v_{\max} = K \left( \frac{\sqrt[3]{Q}}{R} \right)^\eta,$$

где  $K$  – коэффициент сейсмичности;  $R$  – минимальное расстояние от линии зарядов до действующего газопровода;  $\eta$  – показатель затухания сейсмозрывных волн.

Для определения периода колебаний в сейсмозрывной волне применялась формула:

$$T = K_P \cdot \sqrt[6]{Q_l} \cdot (0,01 \cdot l + 1),$$

где  $K_P$  – экспериментальный коэффициент, определяемый по таблице;  $Q_l$  – линейная масса скважинного заряда, кг/м;  $l$  – длина скважинного заряда, м.

Задавая массу взрывааемого заряда  $Q$  и длину заряда  $l$ , можно рассчитать амплитуду и длину сейсмозрывной волны, а затем сгенерировать ее в объемном генераторе волн и произвести моделирование воздействия сейсмозрывной волны на газопровод. Были получены следующие параметры падающей сейсмозрывной волны:  $v_{\max} = 5,5$  см/с;  $T = 10$  мс.

На рис. 2-10 представлены результаты моделирования воздействия сейсмозрывной волны на газопровод.

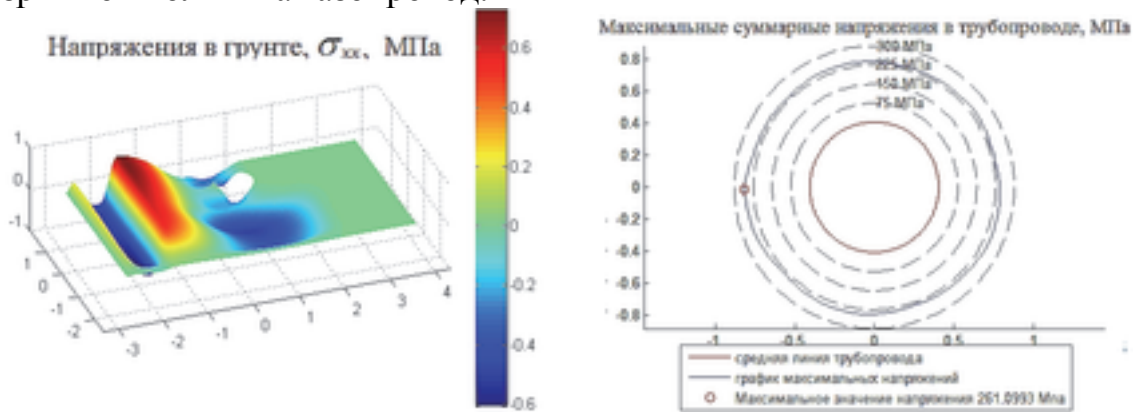


Рис. 2. Изополя напряжений в грунте и трубопроводе,  $T = 10$  мс

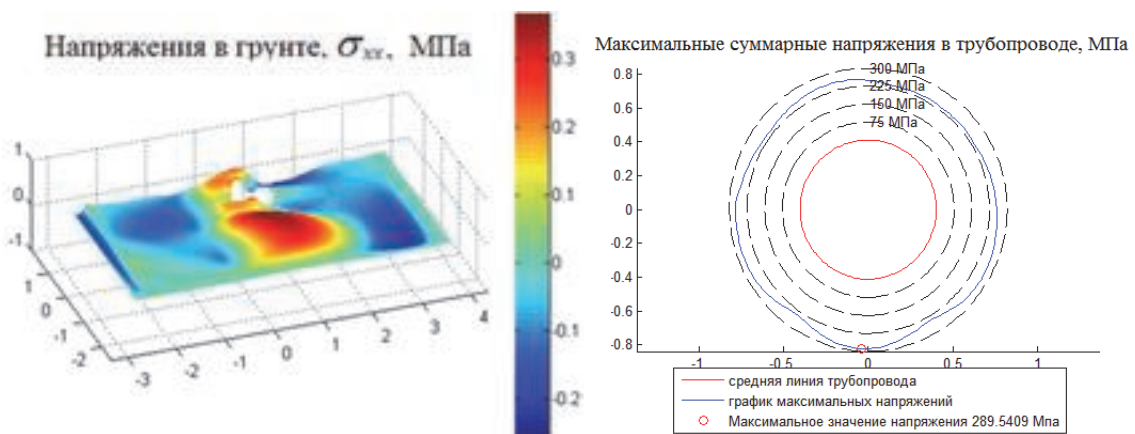


Рис. 3. Изополя напряжений в грунте и трубопроводе,  $T = 20$  мс

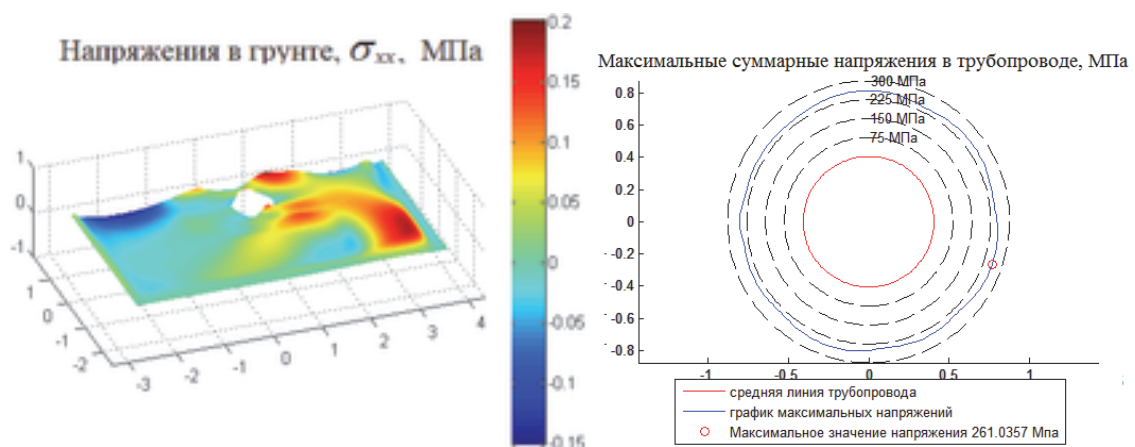


Рис. 4. Изополя напряжений в грунте и трубопроводе,  $T = 30$  мс



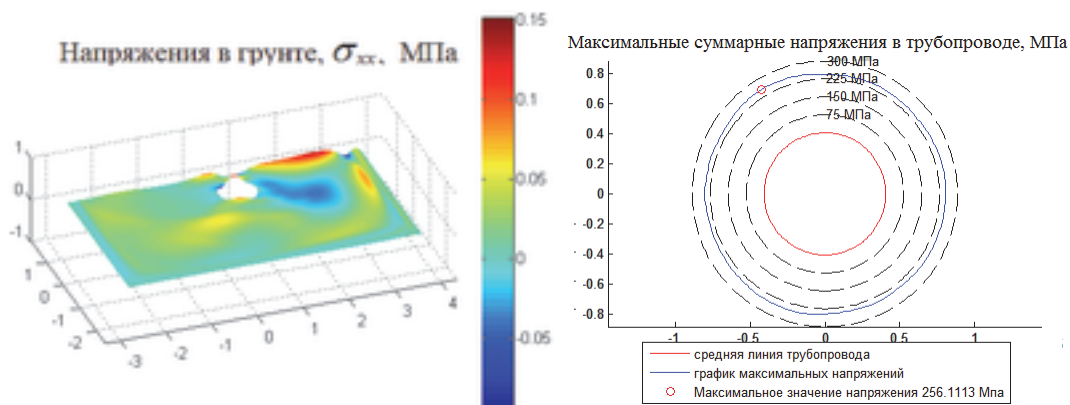


Рис. 5. Изополя напряжений в грунте и трубопроводе,  $T = 40$  мс

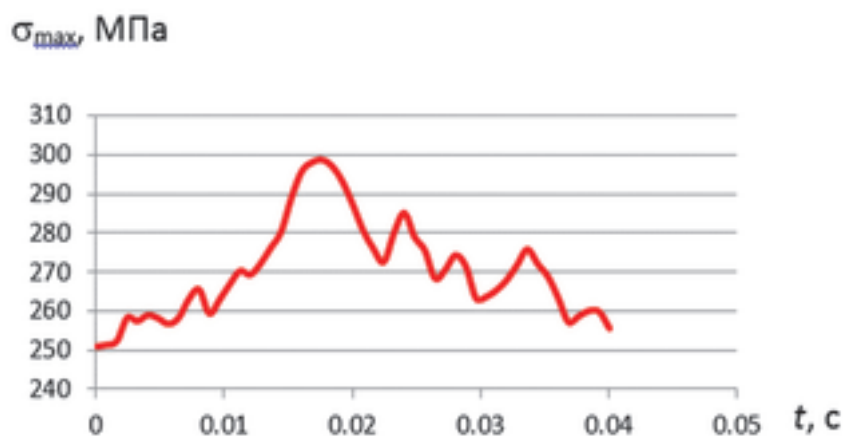


Рис. 6. Зависимость максимальных напряжений, возникающих в трубопроводе, от времени

Максимальные суммарные напряжения в трубопроводе были достигнуты в момент времени  $T = 17,6$  мс и составили  $\sigma_{max} = 298 \cdot 10^6$  Па. Увеличение напряжений в трубопроводе над уровнем начальных напряжений от действия внутреннего давления составило:  $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_0 = 47 \cdot 10^6$  Па. Поскольку максимальные напряжения не превышают принятый уровень допустимых напряжений  $[\sigma] = 364 \cdot 10^6$  Па, то они являются безопасными для трубопровода и не могут разрушить его. Следовательно, заряды массой  $Q = 14$  кг, приводящие к формированию сейсмозрывной волны с амплитудой  $v_{max} = 5,5$  см/с на подходе к трубопроводу являются сейсмобезопасными.

Другой актуальной задачей является задача определения параметров сейсмозрывных волн и вмещающего массива при ведении взрывных работ вблизи действующего нефтепровода. Подземная прокладка магистральных нефтепроводов в скальном грунте связана с применением буровзрывного способа разработки траншей. В этой связи требуется особое внимание к безопасности при разработке траншеи параллельной нитки магистрального нефтепровода вблизи действующего нефтепровода, когда необходимо учитывать воздействие энергии взрыва при разработке очередной траншеи на действующую нитку нефтепровода. В работе в качестве объекта возможного воздействия взрыва при воз-



ведении траншеи для прокладки очередной нитки нефтепровода выбран магистральный нефтепровод диаметром 1000 мм, толщиной стенки 14 мм и рабочим давлением 9 МПа.

По численным схемам и алгоритмам, представленным в работе [3], была разработана вычислительная программа, позволяющая моделировать процесс взаимодействия сейсмозрывных волн с подземными нефтепроводами. С помощью данной программы осуществляется определение сейсмобезопасной массы заряда путем проведения серии численных экспериментов, с различными параметрами буровзрывных работ, в результате которых рассчитываются зависимости скоростей смещений и напряжений от времени в стенке трубы при прохождении сейсмозрывных волн. Получив в результате моделирования значения напряжений в стенке трубопровода, и сравнив их с пределом прочности для материала трубопровода, были определены параметры буровзрывных работ, являющиеся сейсмобезопасными.

На рис. 7 схематично показано расположение исследуемых точек 1-3 нефтепровода, для которых получены зависимости радиальной и тангенциальной компонент скоростей смещений и кольцевых напряжений. На рисунках 8-10 приведены наиболее характерные зависимости только для точки 1 для различных масс зарядов.

Исследуя полученные зависимости можно сделать вывод о том, что максимальные по модулю значения радиальных компонент скоростей смещений стенка трубопровода принимает в точках 1 и 2 (0,17 м/с и 0,15 м/с, соответственно), а тангенциальных компонент скоростей смещений в точках 2 и 3 (0,16 м/с и 0,15 м/с, соответственно) при массе заряда 27,2 кг. В момент наступления фронта сейсмической волны на нефтепровод возникает волна сжатия, которая компенсирует внутренние растягивающие напряжения в стенке трубы от внутреннего давления в трубопроводе, затем проходит волна разряжения, которая вызывает потенциально опасные растягивающие напряжения в стенке трубопровода. Максимальные растягивающие напряжения (316 МПа) с учетом внутреннего давления нефти (9 МПа) на стенку трубопровода возникают в точке 1 и стремятся к максимально допустимым (317 МПа) с учетом принятого коэффициента запаса.

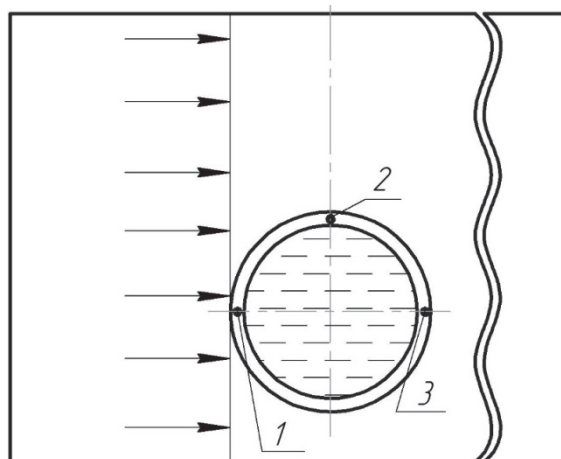


Рис. 7. Схема воздействия сейсмозрывной волны с указанием исследуемых точек 1-3 трубопровода

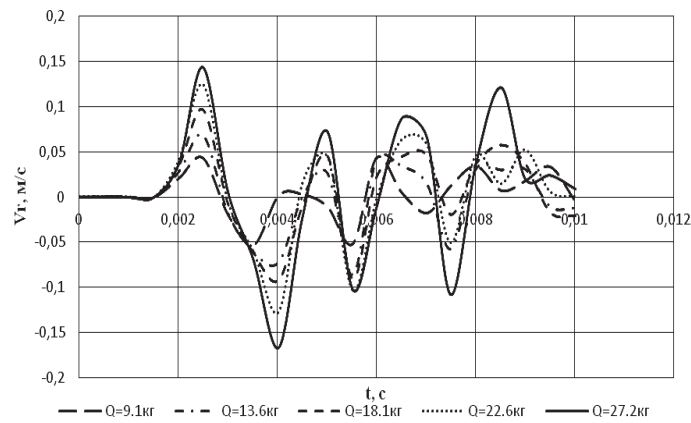


Рис. 8. Зависимость радиальной компоненты вектора скорости смещений от времени в точке 1

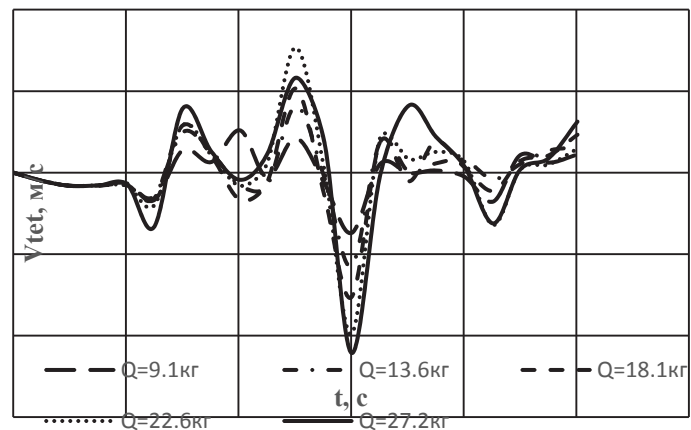


Рис. 9. Зависимость тангенциальной компоненты вектора скорости смещений от времени в точке 1

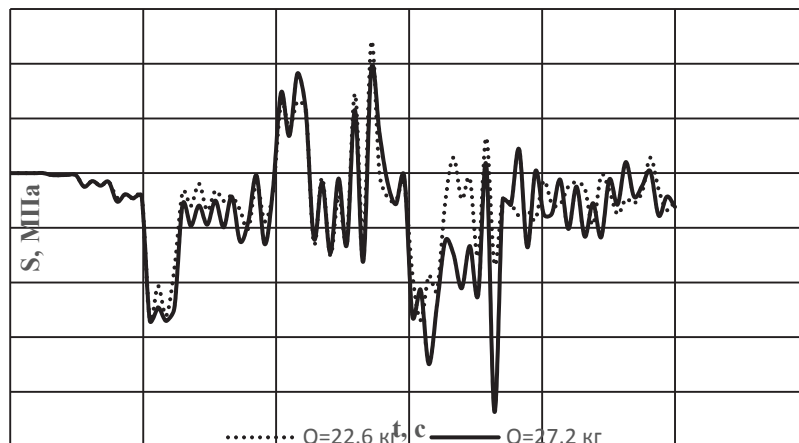


Рис. 10. Зависимость напряжений в стенке трубопровода от времени в точке 1

В работах [4, 5] рассмотрено математическое моделирование воздействия сейсмических волн на породный массив, включающий подземное сооружение, в двух вариантах: сейсмическая волна возникает при ведении буровзрывных работ и сейсмическая волна возникает от тектонического движения земной коры.

В первом случае, авторами построена математическая модель воздействия сейсмозрывной волны на слоистый массив горных пород, включающий гори-

зонтальную горную выработку. В рамках принятой математической модели разработана вычислительная программа для определения основных параметров НДС слоистого массива горных пород с горизонтальной выработкой при воздействии сейсмовзрывной волны.

Во втором случае, модифицирован и успешно апробирован численно-аналитический метод расчета воздействия сейсмических волн землетрясений на обделки тоннелей метрополитена с учетом влияния стыков между их частями. Численные расчеты воздействия сейсмических волн землетрясений с максимальной интенсивностью показали удовлетворительную сходимость с имеющимися натурными замерами землетрясения в условиях города Ханой, Вьетнам.

### Литература

1. Белин В.А., Господариков А.П., Холодиллов А.Н. Методические основы прогнозирования сейсмического действия массовых взрывов // Горный журнал. 2017. № 2. С. 66-69. DOI: 10.17580/gzh.2017.02.12;
2. Голуб М.В., Горохов Н.Л., Господариков А.П. Применение идеально согласованных слоев (PML) в задачах сейсродинамики. – М.: Взрывное дело, Вып. №109/66, 2013, С.318-331;
3. Булдаков Е.Л., Господариков А.П., Колтон Г.А. Об одном подходе к математическому моделированию воздействия взрывных волн на подземный нефтепровод // Записки Горного института. 2014. Т.210. С. 37-42;
4. Gospodarikov A.P., Vykhodtsev Y.N., Zatsepin M.A. A method for calculating effect of a blast-induced seismic wave on nonuniform enclosing rock mass around a tunnel. Journal of Mining Science. 2020. Vol. 56. Issue: 6. P. 903-913. DOI: 10.1134/S1062739120060034;
5. Nguyen C.T., Do N.A., Dias D., Pham V.V., Alexandr G. Behaviour of Square and Rectangular Tunnels Using an Improved Finite Element Method. Appl. Sci. 2022, 12, 2050. DOI: 10.3390/app12042050;
6. Eremenko A.A., Konurin A.I., Shtirts V.A., Prib, V.V. Identification of higher rock pressure zones in rockburst-hazardous iron ore deposits // Gornyi Zhurnal, 2020, 2020(1), P. 78-81;
7. Protosenya A. G., Iovlev G. A. Prediction of spatial stress–strain behavior of physically nonlinear soil mass in tunnel face area. MIAB. Mining Inf. Anal. Bull. 2020;(5):128-139. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-5-0-128-139;
8. Эквист Б.В., Барнов Н.Г. Взрывное разрушение массивов горной породы с неоднородной структурой. Горная промышленность. 2021; Т.3, С.135-138. DOI: 10.30686/1609-9192-2021-3-135-138;
9. Glinskii V.V., Trushko V.L. Design of seismic-resistant linings for rock burst conditions // Advances in Raw Material Industries for Sustainable Development Goals, 2021, P. 99-104;
10. Зубов В.П., Зуев Б.Ю., Смычник А.Д. Определение статических и динамических напряжений в физических моделях слоистых и блочных породных массивов // Горный журнал, 2019, (7), С. 61-66;
11. Козырев С.А., Власова Е.А., Соколов А.В., Усачев Е.А. Оценка эффективности действия взрыва простейших взрывчатых смесей с энергетическими добавками // Вестник Кольского научного центра РАН. 2020. № 4. С. 42-49;

12. Еременко В.А., Рыльникова М.В., Есина Е.Н. Мониторинг напряженно-деформированного состояния структурно нарушенного и удароопасного массива горных пород // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 515. С. 105-116;

13. Kiryaeva T.A., Oparin V.N. The Influence of Nonlinear Deformation-Wave Processes Induced by Seismic Effects on the Gas-Dynamic Activity of Coal Mines // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci., vol. 666, Issue: 2, 2021, DOI: 10.1088/1755-1315/666/2/022013;

14. Burenin A.A., Gerasimenko E.A., Kovtanyuk L.V. et al. On the dynamics of unloading of a cylindrical elastic-viscoplastic layer under azimuthal shear // Mech. Solids, vol. 57, P. 65-74, 2022, DOI: 10.3103/S0025654422010113.

**А.Г. Князева<sup>1</sup>**

## **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРИ ОСТЫВАНИИ СИНТЕЗИРОВАННОГО КОМПОЗИТА**

<sup>1</sup>*Институт физики прочности и материаловедения  
Сибирского отделения РАН, Томск*

При синтезе композитов остаточные напряжения в них зависят как от условий синтеза, так и от свойств веществ, их составляющих. Значительную роль при этом играет характер контакта между включениями и матрицей, который может нарушаться при остывании уже синтезированного композита. Неидеальный контакт может появляться в процессе остывания вследствие различия свойств включения и матрицы. Тогда характер контакта будет изменяться во времени по некоторому закону, зависящему от свойств материалов и скорости охлаждения. Оценить влияние неидеальности контакта на напряжения и деформации можно в рамках задач теории термоупругости, например, для включений сферической или цилиндрической формы при условии, что характер изменения температуры во времени задан, например, известен их эксперимента или из решения соответствующей задачи теплопроводности. Методы решения сопряженных задач известны и описаны, например, в [1].

Рассмотрим задачу для упругого шара, в общем случае с полостью внутри и возможно с неоднородным распределением температуры или концентраций легирующих элементов, симметричным относительно центра шара, так что  $T = T(r, t)$  или  $C_k = C_k(r, t)$ . Температура и концентрации могут зависеть и от времени, однако для задачи о механическом равновесии время является параметром. Массовые силы отсутствуют. Условия симметрии позволяют считать, что

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta \varphi} = \sigma_{\varphi r} = 0, \\ \varepsilon_{\theta r} = \varepsilon_{\theta \varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

а остальные компоненты тензоров напряжений и деформаций являются функциями только радиальной координаты (и, соответственно, времени, как параметра). В этих условиях

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (2)$$

Из трех уравнений равновесия в этом случае остается одно

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \quad (3)$$

В этом случае имеем три уравнения, связывающие компоненты тензоров напряжений с радиальным перемещением  $u$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{1+\nu} \frac{du}{dr} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} \right) - \frac{E}{3(1-2\nu)} \omega, \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1+\nu} \frac{u}{r} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} \right) - \frac{E}{3(1-2\nu)} \omega, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $E$  - модуль упругости,  $\nu$  - коэффициент Пуассона

$$\omega = 3 \left[ \alpha_T (T - T_0) + \sum_{(k)} \alpha_k (C_k - C_{k0}) \right], \quad (5)$$

$\alpha_T$  - линейный коэффициент теплового расширения;  $\alpha_k$  - коэффициенты концентрационного расширения;  $C_k$  - концентрации компонентов; индекс «0» относится к недеформированному состоянию.

Подставляя (4) в (3) и полагая, что свойства не зависят от координаты (а также от состава и температуры), приходим к уравнению равновесия в перемещениях в сферической системе координат

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + 2 \left[ \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right] = \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{d\omega}{dr}$$

или

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right] = \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{d\omega}{dr}. \quad (6)$$

Если сферическая частица находится в окружении матрицы, то уравнение (6) будет иметь место как для частицы (индекс «1»), так и для матрицы (индекс «2»). Интегрируя (6), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3} \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{1}{r^2} \int_{R_1}^r \omega_1(r) r^2 dr + \frac{A_1}{3} r + \frac{B_1}{r^2}, \\ u_2 &= \frac{1}{3} \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} \frac{1}{r^2} \int_{R_2}^r \omega_2(r) r^2 dr + \frac{A_2}{3} r + \frac{B_2}{r^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

где  $R_1$  - радиус полости (если есть);  $R_2$  - радиус частицы,  $A_i, B_i$  – постоянные интегрирования.

Следовательно, с помощью (2) находим деформации:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(1)} &= -\frac{2}{3} \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{1}{r^3} \int_{R_1}^r \omega_1(r) r^2 dr + \frac{1}{3} \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \omega_1 + \frac{A_1}{3} - 2 \frac{B_1}{r^3}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} &= \frac{1}{3} \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{1}{r^3} \int_{R_1}^r \omega_1(r) r^2 dr + \frac{A_1}{3} + \frac{B_1}{r^3}, \\ \varepsilon_{rr}^{(2)} &= -\frac{2}{3} \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} \frac{1}{r^3} \int_{R_2}^r \omega_2(r) r^2 dr + \frac{1}{3} \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} \omega_2 + \frac{A_2}{3} - 2 \frac{B_2}{r^3}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)} &= \frac{1}{3} \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} \frac{1}{r^3} \int_{R_2}^r \omega_2(r) r^2 dr + \frac{A_2}{3} + \frac{B_2}{r^3},\end{aligned}\tag{8}$$

а затем с помощью (4) - напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(1)} &= -\frac{2}{3} \frac{E_1}{1-\nu_1} \frac{1}{r^3} \int_{R_1}^r \omega_1(r) r^2 dr + \frac{1}{3} \frac{E_1}{1-2\nu_1} A_1 - 2 \frac{B_1}{r^3} \frac{E_1}{1+\nu_1}, \\ \sigma_{rr}^{(2)} &= -\frac{2}{3} \frac{E_2}{1-\nu_2} \frac{1}{r^3} \int_{R_2}^r \omega_2(r) r^2 dr + \frac{1}{3} \frac{E_2}{1-2\nu_2} A_2 - 2 \frac{B_2}{r^3} \frac{E_2}{1+\nu_2}\end{aligned}\tag{9}$$

Теперь сформулируем граничные условия.

Примем, что внутренняя поверхность свободна от нагрузок, т.е. выполняется условие

$$r = R_1 : \sigma_{rr}^{(1)} = 0.\tag{10}$$

Условие вдали от частицы может определяться совокупным действием всех других частиц

$$r = R : \sigma_{rr}^{(2)} = -P_e.\tag{11}$$

Еще два условия следует записать на границе раздела.

Первое из них заключается в равенстве напряжений и позволяет определить контактное давление  $P_c$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)} = -P_c\tag{12}$$

Второе условие отражает формирующуюся при остывании неидеальность (разрыв в компонентах смещения)

$$u_1 - u_2 = \varphi(T).\tag{13}$$

Вид функции  $\varphi(T)$  определяется условиями смачивания; характером границ, свойствами контактирующих материалов.

Вполне логично предположить, что появляющееся с изменением температуры несовершенство должно зависеть от соотношения коэффициентов теплового расширения и механических свойств (например, модулей упругости) материалов. Аппроксимируем разрыв в смещениях функцией вида

$$\varphi \sim \gamma \frac{\alpha_{T1}}{\alpha_{T2}} \frac{E_1}{E_2} \ln \left( \frac{T_0}{T} \right),$$

где коэффициент  $\gamma$  (имеет размерность длины) может зависеть от поверхностных энергий частицы и окружающей матрицы, формы частицы, параметров, характеризующих поверхность натяжение и т.п. Его определение требует специального исследования.

Подставляя полученное общее решение в граничные условия, приходим к системе четырех алгебраических уравнения для нахождения постоянных интегрирования

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \frac{E_1}{1-2\nu_1} A_1 - 2 \frac{B_1}{R_1^3} \frac{E_1}{1+\nu_1} = 0, \\ & -\frac{2}{3} \frac{E_2}{1-\nu_2} \frac{1}{R^3} I_2 + \frac{1}{3} \frac{E_2}{1-2\nu_2} A_2 - 2 \frac{B_2}{R^3} \frac{E_2}{1+\nu_2} = -P_e, \\ & -\frac{2}{3} \frac{E_1}{1-\nu_1} \frac{1}{R_2^3} I_1 + \frac{1}{3} \frac{E_1}{1-2\nu_1} A_1 - 2 \frac{B_1}{R_2^3} \frac{E_1}{1+\nu_1} = \frac{1}{3} \frac{E_2}{1-2\nu_2} A_2 - 2 \frac{B_2}{R_2^3} \frac{E_2}{1+\nu_2}, \\ & \frac{1}{3} \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{1}{R_2^2} I_1 + \frac{A_1}{3} R_2 + \frac{B_1}{R_2^2} - \left( \frac{A_2}{3} R_2 + \frac{B_2}{R_2^2} \right) = \frac{\varphi(T)}{R_2}, \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \int_{R_1}^{R_2} \omega_1(r) r^2 dr \quad ; \quad I_2 = \int_{R_2}^R \omega_2(r) r^2 dr$$

Решение этой системы уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\frac{6}{R_1^3} \frac{1-2\nu_1}{1+\nu_1} \left\{ -X_1 \left( \frac{2}{R^3} \frac{1-2\nu_2}{1+\nu_2} + \frac{1}{R_2^3} \right) + X_2 \frac{2E_2}{1+\nu_2} \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{1}{R_2^3} \right] \right\}}{\frac{2E_2}{1+\nu_2} \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{1}{R_2^3} \right] \left( \frac{2}{R_1^3} \frac{1-2\nu_1}{1+\nu_1} + \frac{1}{R_2^3} \right) - \frac{2E_1}{1+\nu_1} \left( \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) \left( \frac{2}{R^3} \frac{1-2\nu_2}{1+\nu_2} + \frac{1}{R_2^3} \right)}, \\ B_1 &= \frac{X_1 + B_2 \frac{2E_2}{1+\nu_2} \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{1}{R_2^3} \right]}{\frac{2E_1}{1+\nu_1} \left( \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & -3 \frac{P_e}{E_2} (1 - 2\nu_2) + 2 \frac{1 - 2\nu_2}{1 - \nu_2} \frac{1}{R^3} I_2 + \\
& + \frac{6}{R^3} \frac{1 - 2\nu_2}{1 + \nu_2} \left\{ X_2 \frac{2E_1}{1 + \nu_1} \left( \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) - X_1 \left( \frac{2}{R_1^3} \frac{1 - 2\nu_1}{1 + \nu_1} + \frac{1}{R_2^3} \right) \right\} \\
& + \frac{2E_2}{1 + \nu_2} \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{1}{R_2^3} \right] \left( \frac{2}{R_1^3} \frac{1 - 2\nu_1}{1 + \nu_1} + \frac{1}{R_2^3} \right) - \frac{2E_1}{1 + \nu_1} \left( \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) \left( \frac{2}{R^3} \frac{1 - 2\nu_2}{1 + \nu_2} + \frac{1}{R_2^3} \right) \\
B_2 = & \frac{X_2 \frac{2E_1}{1 + \nu_1} \left( \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) - X_1 \left( \frac{2}{R_1^3} \frac{1 - 2\nu_1}{1 + \nu_1} + \frac{1}{R_2^3} \right)}{\frac{2E_2}{1 + \nu_2} \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{1}{R_2^3} \right] \left( \frac{2}{R_1^3} \frac{1 - 2\nu_1}{1 + \nu_1} + \frac{1}{R_2^3} \right) - \frac{2E_1}{1 + \nu_1} \left( \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) \left( \frac{2}{R^3} \frac{1 - 2\nu_2}{1 + \nu_2} + \frac{1}{R_2^3} \right)},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
X_1 = & -P_e + \frac{2}{3} \frac{E_1}{1 - \nu_1} \frac{I_1}{R_2^3} + \frac{2}{3} \frac{E_2}{1 - \nu_2} \frac{I_2}{R^3}, \\
X_2 = & -\frac{1}{3} \frac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1} \frac{I_1}{R_2^3} + \frac{2}{3} \frac{1 - 2\nu_2}{1 - \nu_2} \frac{I_2}{R^3} + \frac{\varphi(T)}{R_2} - \frac{1 - 2\nu_2}{E_2} P_e.
\end{aligned}$$

Таким образом, общее решение задачи найдено.

Выпишем формулу для контактного давления:

$$\begin{aligned}
P_c = & P_e - \frac{2}{3} \frac{E_2}{1 - \nu_2} \frac{1}{R^3} I_2 + \\
& - X_2 \frac{2E_1}{1 + \nu_1} \left( \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) + X_1 \left( \frac{2}{R_1^3} \frac{1 - 2\nu_1}{1 + \nu_1} + \frac{1}{R_2^3} \right) \\
& + \frac{\left( \frac{2}{R_1^3} \frac{1 - 2\nu_1}{1 + \nu_1} + \frac{1}{R_2^3} \right) + \frac{2E_1}{1 + \nu_1} \frac{1 + \nu_2}{2E_2} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R^3} \left( \frac{2}{R^3} \frac{1 - 2\nu_2}{1 + \nu_2} + \frac{1}{R_2^3} \right)}{R_1^3}.
\end{aligned}$$

В качестве примера проанализируем самую простую ситуацию.

Пусть в процессе создания композита не формируется диффузионный переходный слой, температура изменяется со временем и одинаково во всех точках. В этом случае

$$\omega_1(r) = 3\alpha_{T1}(T - T_0) \quad \text{и} \quad \omega_2(r) = 3\alpha_{T2}(T - T_0).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
I_1 = & \alpha_{T1}(T - T_0) (R_2^3 - R_1^3), \\
I_2 = & \alpha_{T2}(T - T_0) (R^3 - R_2^3).
\end{aligned}$$

Далее полагаем, что внешней нагрузки нет; частицы не имеют полости ( $R_1 = 0$ ), а их размер существенно меньше размера области матрицы, приходящейся на одну частицу. Это эквивалентно предположению, что концентрация



частиц в матрице мала. В этом случае, пренебрегая величинами порядка  $R_2/R \ll 1$ , придем к соотношениям:

$$X_1 \approx \frac{2}{3}(T - T_0) \left[ \frac{E_1}{1 - \nu_1} \alpha_{T1} + \frac{E_2}{1 - \nu_2} \alpha_{T2} \right];$$

$$X_2 \approx \frac{1}{3}(T - T_0) \left[ -\frac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1} \alpha_{T1} + 2 \frac{1 - 2\nu_2}{1 - \nu_2} \alpha_{T2} \right] + \frac{\varphi(T)}{R_2};$$

$$P_c \approx -\frac{2}{3} \frac{E_2}{1 - \nu_2} \alpha_{T2} (T - T_0) + \frac{-X_2 \frac{E_1}{1 + \nu_1} + X_1 \frac{1 - 2\nu_1}{1 + \nu_1}}{\left[ \frac{1 - 2\nu_1}{1 + \nu_1} + \frac{E_1}{1 + \nu_1} \frac{1 + \nu_2}{E_2} \frac{1}{2} \right]}.$$

Радиус частиц при таком упрощении явно входит только в  $X_2$ .

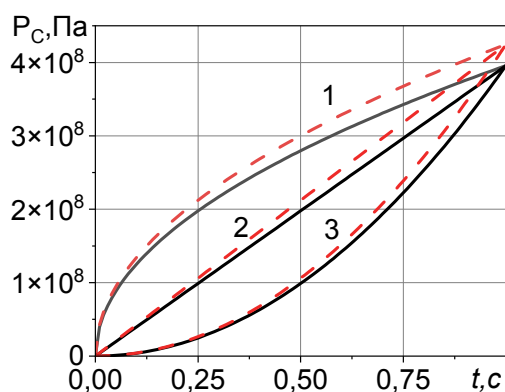
На рисунке представлены зависимости от времени контактного давления для двух пар материалов: Fe (матрица) – TiC (частицы) и Ti (матрица) –  $Al_2O_3$  (частицы). Изменение (уменьшение, начиная от 1200 К) температуры от времени задана условно: 1.  $\sim \sqrt{t}$ ; 2.  $\sim t$ ; 3.  $\sim t^2$ . свойства, принятые для качественной иллюстрации, представлены в таблице.

В расчетах принято  $\gamma = 0.001$  и  $R_2 = 200$  мкм.

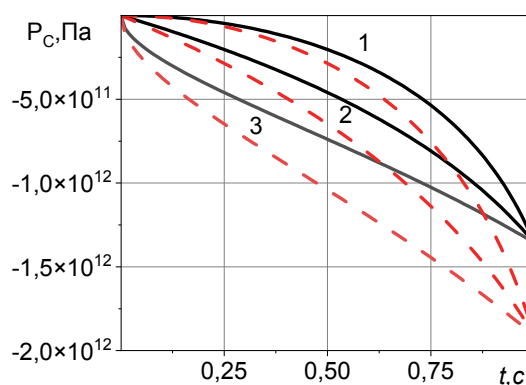
Таблица 1

Свойства, использованные в расчетах

	Fe	Ti	TiC	$Al_2O_3$
$E$ , ГПа	195-205	110	272	382
$\nu$	0.28	0.32	0.19	0.233
$\alpha_T$ , $10^6$ , $K^{-1}$	12	8.5	9.6	5



$\gamma = 0$



$\gamma = 10^{-3}$

Рис. 1. Изменение контактного давления со временем. Сплошные кривые Fe – TiC; пунктирные кривые Ti –  $Al_2O_3$

Представленная качественная иллюстрация лишь демонстрирует, что эффект есть. Определение характера изменения разрыва в смещениях и соответствующих коэффициентов пропорциональности представляет собой отдельную задачу.

Полученное решение можно использовать и при численной реализации двухуровневых моделей для расчета механических напряжений второго рода, проявляющихся на мезоуровне. Для решения подобной задачи в рамках градиентной теории упругости, когда ожидается появление более интересных эффектов, можно использовать подход, описанный в [2].

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FRRW-2022-0003.*

### Литература

1. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Либроком. 2018 г. 656 С.;
2. Ватульян А.О., Нестеров С.А., Юров В.О. Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра с покрытием на основе градиентной модели термоупругости // Вестник ПНИПУ. Механика. 2021. № 4. С. 60-70

**В.В. Назаров<sup>1</sup>**

## **ЧТО НОВОГО В ОБЛАСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ**

<sup>1</sup>*Научно-исследовательский институт механики  
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва*

Несмотря на то, что о свойстве ползучести стало известно еще в первой половине XIX столетия, его систематическое исследование началось только с середины XX столетия. Различают опыты на одноосное растяжение и сложное напряженное состояние, где первые проводят с целью измерения термомеханических характеристик материала, вторые – для исследования конструктивной прочности. До XXI столетия результаты экспериментальных исследований получены для меди, алюминиевого сплава, нержавеющей стали и жаропрочного никелевого сплава, при этом в большинстве случаев результаты относятся к длительной прочности, при которой измерение деформаций от времени не проводится. За последние полтора десятка лет появились работы, в которых приведены кривые ползучести для других классов металлических материалов, в которых впервые рассмотрена ползучесть магниево–литиевого сплава при комнатной температуре [1], а также длительная прочность титановых сплавов при высокой температуре [2]. Основное внимание стало уделяться влиянию химии и высокой температуры на термопрочностные характеристики металлических материалов, при этом кривые ползучести дополняются экспериментальными зависимостями напряжение – деформация при разных значениях высокой температуры [3]. Кроме этого, в некоторых работах приведены фотоснимки со

структурными исследованиями, на которых сопоставлены различные состояния микроструктуры. В [3] установлено, что при температуре выше  $850^{\circ}\text{C}$  появляется поверхностный оксидный слой, и кислород воздуха начинает оказывать заметное влияние на процесс разрушения нержавеющей стали. В [4] показано, что образование и рост микропор заметно происходит при ускоряющейся ползучести, а при установившейся ползучести сталь можно считать несжимаемым материалом.

Другая часть работ посвящена исследованию прочности сварного шва и области локализации деформаций. В одной из таких работ предложен критерий появления шейки, представляющей собой тангенс угла наклона касательной к кривой ползучести. В другой отличительной работе приведены результаты, полученные на трубчатых образцах с окружным сварным швом под одновременным воздействием осевой силы и внутреннего давления при разных значениях отношения осевого напряжения к тангенциальному напряжению, где показано, что при значениях этого отношения напряжений больше 0.8 разрушение приходилось на сварной шов, а в остальных случаях – на основной материал.

Еще одна работа, в которой трубчатые образцы из титанового сплава подвергались одновременному воздействию осевой силы и крутящего момента, где результаты механических испытаний на установившуюся ползучесть получены при двух разных параметрах нагружения, в качестве которых рассмотрены максимальное нормальное напряжение и максимальное касательное напряжение. Из кривых ползучести установлено, что титановый сплав ВТ1–0 при  $550^{\circ}\text{C}$  находится в таких условиях, при которых углы поворота принимают большие значения. В другой работе, трубчатые образцы из отожженной меди при  $264^{\circ}\text{C}$  подвергались одновременному воздействию осевой силы и крутящего момента, при этом углы поворота и осевые удлинения в момент разрушения принимали исключительно малые значения.

Ранее обнаруженный эффект (Рис. 1) длительной прочности из механических испытаний прямоугольных пластин из алюминиевого сплава, наблюдается в образцах из нержавеющей стали [5], где равное двухосное растяжение приводит к увеличению времени в момент разрушения.

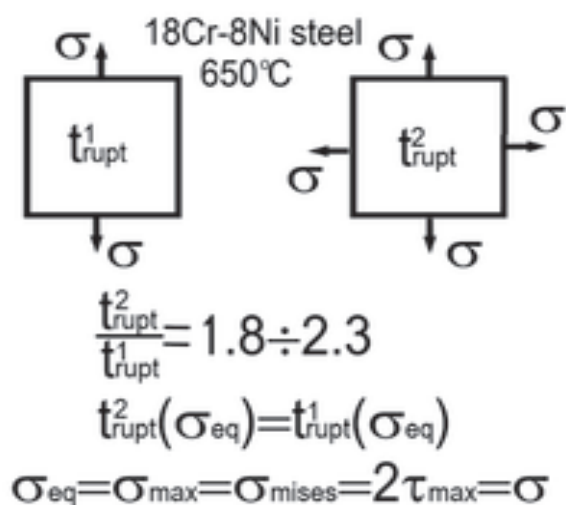


Рис. 1. Эффект длительной прочности в относительном различии времен в момент разрушения между одноосным растяжением и равным двухосным растяжением прямоугольных пластин не представляется возможным описать базовыми эквивалентными напряжениями, к которым относят максимальное нормальное напряжение, напряжение Мизеса и удвоенное максимальное касательное напряжение

В другой работе того же коллектива ученых для другой стали обнаружено, что равное двухосное растяжение, напротив, приводит к уменьшению времени в момент разрушения.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант 20–08–00387.*

#### Литература

1. Ильин С.И., Корягин Ю.Д., Лапина И.В. / Ползучесть ультралегких магниевых сплавов при низких температурах // Вестник Южно–Уральского государственного университета. Серия: Metallургия. 2012. № 15. С. 105–107.

2. Назаров В.В. / Кратковременная ползучесть титановых сплавов ВТ5 и ВТ6 при высокой температуре // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. Т. 81. № 6. С. 57–60.

3. Mohta K., Gupta S.K., Cathirvolu S., Jaganathan S., Chattopadhyaya J. / High temperature deformation behavior of Indian PHWR Calandria material SS 304L // Nuclear Engineering and Design. 2020. Vol. 368. P. 110801.

4. Xie Z.G., He Y.M., Yang J.G., Gao Z.L. / Microstructural evolution of nuclear power steel A508–III in the creep process at 800°C // Applied Mechanics and Materials. 2017. Vol. 853. P. 153–157.

5. Kobayashi H., Ohki R., Itoh T., Sakane M. / Multiaxial creep damage and lifetime evaluation under biaxial and triaxial stresses for type 304 stainless steel // Engineering Fracture Mechanics. 2017. Vol. 174. P. 30–43.

**В.В. Назаров<sup>1</sup>**

### **ГИПОТЕЗЫ И ОГРАНИЧЕНИЯ ПО МОДЕЛИ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ОПИСАТЬ РАЗВИТИЕ ПОРИСТОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ, РАЗДУВАЕМОЙ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ ПРИ УСКОРЯЮЩЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ**

<sup>1</sup>*Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва*

Со второй половины XX столетия предложены различные модели описания напряженно–деформируемого состояния, реализуемого в цилиндрической трубе, раздуваемой под воздействием внутреннего давления газа. Как правило, в этих моделях рассматривают установившуюся ползучесть (при которой скорости деформаций не меняются от времени), и материал считают несжимаемым [1–2]. По завершении установившейся ползучести зависимости деформаций от времени перестают быть линейными и кривые ползучести возрастают от времени. Фотоснимки структурных состояний стали [3] показали, что с началом ускоряющейся ползучести активизируется процесс образования и роста микропор и материал уже нельзя считать несжимаемым. Для описания процесса накопления повреждений и микропор используют формальную характеристику материала с порами – поврежденность [4], которая зависит от времени и принимает

только формальные значения. Использование поврежденности позволяет описать только главный (ползучесть, длительная прочность) процесс без возможности сделать количественную оценку сопутствующим процессам (накопление тех же самых рассеянных повреждений, водородная коррозия стали при высокой температуре). В данной работе, вместо формальной характеристики материала с микропорами – пористости, рассмотрена пористость [5], которая определяется как относительное приращение объема в деформируемом твердом теле.

Для описания деформаций и напряжений, возникающих в цилиндрической трубе при ускоряющейся ползучести, предложена модель, в которой рассмотрены два деформированных состояния (начальное при отсутствии деформаций и конечное с накопленными деформациями). При отсутствии осевой деформации рассматривается кинематика только поперечного сечения, где все величины зависят от радиуса и не зависят от осевой координаты.

Чтобы определить зависимость пористости от радиуса, рассмотрена разница между перемещениями в пористом и несжимаемом материалах при одном и том же значении радиуса, где в конечном деформированном состоянии граничные радиусы заданы и совпадают для обоих типов материала. Начальные граничные радиусы выражаются через соответствующие перемещения, при этом используется ограничение по модели, при котором перемещение на внешнем граничном радиусе задано и совпадает для двух типов материала.

Приняты следующие гипотезы:

- объемная деформация отсутствует, и увеличение площади поперечного сечения происходит только за счет образования и роста микропор;
- пористость возрастает от внутреннего до внешнего граничных радиусов;
- произведение пористости и тангенциальной деформации равняется произведению их интегральных характеристик, где в качестве таковых рассмотрены относительное приращение всей площади поперечного сечения и относительное изменение интегрально–среднего радиуса.

В рамках предложенной модели пористость приводит к заметному уменьшению деформаций Коши (Рис. 1) и лишь к незначительному увеличению напряжений (Рис. 2), где для пористого материала рассмотрены эффективные напряжения [4].

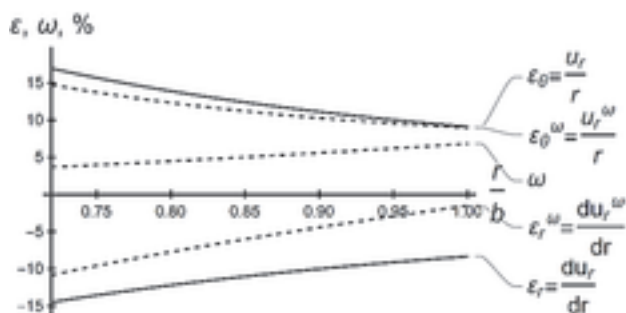


Рис. 1. Пористость и деформации Коши

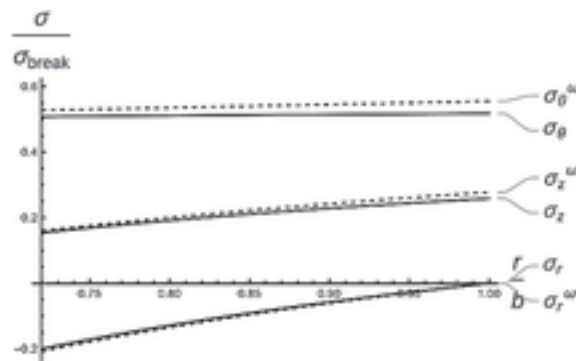


Рис. 2. Безразмерные напряжения

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант 20–08–00387.*

### Литература

1. Кац Ш.Н. / Ползучесть и разрушение труб под действием внутреннего давления // Известия АН СССР. ОТН. 1957. № 10. С. 86–89.
2. Bhatnagar N.S., Gupta S.K. / Analysis of thick-walled orthotropic cylinder in the theory of creep // Journal of the Physical Society of Japan. 1969. Vol. 27. No 6. P. 1655–1661.
3. Xie Z.G., He Y.M., Yang J.G., Gao Z.L. / Microstructural evolution of nuclear power steel A508–III in the creep process at 800°C // Applied Mechanics and Materials. 2017. Vol. 853. P. 153–157.
4. Leckie F.A., Hayhurst D.R. / Constitutive equations for creep rupture // Acta Metallurgica. 1977. Vol. 25. No 9. P. 1059–1070.
5. Назаров В.В. / Деформации цилиндрической трубы // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2014. Т. 80. № 8. С. 56–58.

**А.Д. Чернышов<sup>1</sup>, В.В. Горяйнов<sup>2</sup>**

## **СРАВНЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕНИЯХ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ БРУСЕ ПРИ ПОСТАНОВКЕ РАЗЛИЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

<sup>1</sup> Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж

<sup>2</sup> Воронежский государственный технический университет, Воронеж

Одним из аналитических методов, применяемых для решения задач теории упругости, является метод быстрых разложений [1], основанный на том, что искомое решение задачи представляют в виде суммы специальной граничной функции и ряда Фурье. Подобную сумму называют быстрым разложением. Неизвестные коэффициенты быстрого разложения можно найти используя оператор быстрых разложений [2] или быструю тригонометрическую интерполяцию [3, 4]. В данной работе представим решение задачи о напряжениях в брусе методом быстрых разложений в трех постановках, каждая из которых отличается видом граничных условий. Коэффициенты быстрых разложений будем определять с помощью быстрой тригонометрической интерполяции. В связи с этим представляет интерес исследование влияния вида граничных условий на точность решения задачи при использовании быстрой тригонометрической интерполяции.

В условиях плоской деформации проекции вектора перемещений материальных точек бруса зависят только от координат  $x, y$ :

$$U = U(x, y), \quad V = V(x, y), \quad W = 0. \quad (1)$$

Компоненты тензора напряжения будут иметь вид [5]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad \sigma_{zz} = \lambda \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Запишем уравнения равновесия Ламе для перемещений с учетом массовых сил  $X(x, y), Y(x, y)$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + X(x, y) = 0, \quad (3)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + Y(x, y) = 0. \quad (4)$$

$\Omega = (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$ . На сторонах бруса зададим три различных вида граничных условий, соответствующие трем краевым задачам.

1. На всех сторонах заданы перемещения

$$U|_{x=0} = f_1(y), \quad U|_{x=a} = f_3(y), \quad V|_{x=0} = \Phi_1(y), \quad V|_{x=a} = \Phi_3(y). \quad (5)$$

$$U|_{y=0} = f_2(x), \quad U|_{y=b} = f_4(x), \quad V|_{y=0} = \Phi_2(x), \quad V|_{y=b} = \Phi_4(x). \quad (6)$$

2. На всех сторонах заданы напряжения

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{x=0} = F_1(y), \quad \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \Phi_1(y), \quad (7)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{x=a} = F_2(y), \quad \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \Big|_{x=a} = \Phi_2(y). \quad (8)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{y=b} = F_3(x), \quad \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \Big|_{y=b} = \Phi_3(x), \quad (9)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{y=0} = F_4(x), \quad \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} = \Phi_4(x). \quad (10)$$

3. Смешанные граничные условия – на сторонах  $x=0$ ,  $x=a$  и  $y=b$  зададим напряжения в виде (7), (8) и (9) соответственно, а на стороне  $y=0$  зададим перемещения

$$U|_{y=0} = g_1(x), \quad V|_{y=0} = g_2(x). \quad (11)$$

Функции, входящие в граничные условия (5) – (10), следует подбирать с учетом условий согласования. Так, для случая задания перемещений на всех границах прямоугольника условия согласования имеют вид

$$\begin{aligned}f_1(0) &= f_2(0), \quad f_3(0) = f_2(a), \quad f_3(b) = f_4(a), \quad f_4(0) = f_1(b), \\ \Phi_1(0) &= \Phi_2(0), \quad \Phi_3(0) = \Phi_2(a), \quad \Phi_3(b) = \Phi_4(a), \quad \Phi_4(0) = \Phi_1(b).\end{aligned}\quad (12)$$

В случае задания напряжений на всех границах запишем условия согласований для касательных напряжений следующим образом

$$\Phi_4(0) = \Phi_1(0), \Phi_3(0) = \Phi_1(b), \Phi_3(a) = \Phi_2(b), \Phi_4(a) = \Phi_2(0). \quad (13)$$

Для смешанных граничных условий, указанных в третьем пункте, условия согласований следующие

$$\Phi_3(0) = \Phi_1(b), \Phi_3(a) = \Phi_2(b). \quad (14)$$

Выполнение условий согласования позволит найти непрерывное решение трех задач: 1. (3) – (6), 2. (3), (4), (7) – (10), 3. (3), (4), (7) – (9), (11).

В качестве примера функции из (5) – (11) зададим следующим образом

$$\begin{aligned} f_1(y) = 0, f_2(x) = 0, f_3(y) = K \sin 1.2\pi ay, f_4(x) = K \sin 1.2\pi bx, \\ \varphi_1(y) = 0, \varphi_2(x) = 0, \varphi_3(x) = -K \sin a \sin y, \varphi_4(x) = -K \sin x \sin b. \\ g_1(x) = g_2(x) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} F_1(y) = 1.2\pi K(\lambda + 2\mu)y \cos 1.2\pi ay, \Phi_1(y) = -\mu K \sin y, \\ F_2(y) = 1.2\pi K(\lambda + 2\mu)y \cos 1.2\pi ay - \lambda K \sin a \cos y, \\ \Phi_2(y) = \mu(-K \cos a \sin y + 1.2\pi K a \cos 1.2\pi ay), \\ F_3(y) = -K(\lambda + 2\mu) \sin x \cos b + 1.2\pi \lambda K b \cos 1.2\pi x b, \\ \Phi_3(y) = \mu(-K \cos x \sin b + 1.2\pi K x \cos 1.2\pi x b), \\ F_4(y) = -K(\lambda + 2\mu) \sin x, \Phi_4(y) = 1.2\pi \mu K x, \end{aligned} \quad (16)$$

Массовые силы в (3), (4) запишем выражениями

$$\begin{aligned} X(x, y) = (1.2\pi y)^2 (\lambda + 2\mu) K \sin 1.2\pi xy + \\ + (\lambda + \mu) K \cos x \cos y + (1.2\pi x)^2 \mu K \sin 1.2\pi xy, \\ Y(x, y) = -(\lambda + 2\mu) K \sin x \sin y - \mu K \sin x \sin y + \\ + (\lambda + \mu) \left( (1.2\pi)^2 xy K \sin 1.2\pi xy - 1.2\pi K \cos 1.2\pi xy \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Зависимости (15) – (17) подобраны так, чтобы каждая из трех краевых задач (1. (3) – (6), 2. (3), (4), (7) – (10), 3. (3), (4), (7) – (9), (11)) имела точное решение

$$U(x, y) = K \sin 1.2\pi xy, V(x, y) = -K \sin x \sin y, \quad (18)$$

где  $K$  – константа, регулирующая величину перемещений.

Точное решение (18) позволит провести исследование погрешности решения трех краевых задач путем сравнения с приближенным аналитическим решением, полученным методом быстрых разложений. При сравнении будут вычислены: относительная погрешность компонент тензора напряжений (2), невязка уравнений равновесия Ламе (3), (4) и невязка граничных условий (5) – (11).

Покажем подробно решение одной из трех краевых задач, например, для случая задания перемещений на всех сторонах прямоугольника. Для двух других краевых задач отметим отличительные особенности в ходе решения.

Для решения будем использовать приближенный аналитический метод быстрых синус-разложений [1], в соответствии с которым представим



$U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  в виде суммы граничных функции 6-го порядка  $M_6^U(x; y)$ ,  $M_6^V(x; y)$  и ряда Фурье по синусам

$$U = M_6^U(x; y) + \sum_{m=1}^{N_1} u_m(x) \sin m\pi \frac{y}{b}, \quad (19)$$

$$V = M_6^V(x; y) + \sum_{m=1}^{N_1} v_m(x) \sin m\pi \frac{y}{b}, \quad x \in [0; a], \quad y \in [0; b].$$

Здесь  $N_1$  – число учитываемых членов в рядах Фурье. Граничные функции  $M_6^U(x; y)$  и  $M_6^V(x; y)$  шестого порядка определяются равенствами

$$M_6^U(x; y) = \sum_{i=1}^8 A_i(x) P_i(y), \quad M_6^V(x; y) = \sum_{i=1}^8 B_i(x) P_i(y), \quad (20)$$

где  $A_i(x)$  и  $B_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq 8$   $P_i(y)$ ,  $i = 1 \div 8$

$A_i(x)$ ,  $B_i(x)$  определяются равенствами

$$P_1(y) = \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad P_2(y) = \frac{y}{b}, \quad P_3(y) = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right), \quad P_4(x) = \left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right),$$

$$P_5(y) = \left(\frac{y^4}{24} - \frac{y^5}{120b} - \frac{by^3}{18} + \frac{b^3y}{45}\right), \quad P_6(y) = \left(\frac{y^5}{120b} - \frac{by^3}{36} + \frac{7b^3y}{360}\right),$$

$$P_7(y) = \left(\frac{y^6}{720} - \frac{y^7}{5040b} - \frac{by^5}{360} + \frac{b^3y^3}{270} - \frac{2b^5y}{945}\right),$$

$$P_8(y) = \left(\frac{y^7}{5040b} - \frac{by^5}{720} + \frac{7b^3y^3}{2160} - \frac{31b^5y}{15120}\right).$$

$$A_1(x) = U|_{y=0}, \quad A_2(x) = U|_{y=a}, \quad A_3(x) = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{y=0}, \quad A_4(x) = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{y=a},$$

$$A_5(x) = \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \Big|_{y=0}, \quad A_6(x) = \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \Big|_{y=a}, \quad A_7(x) = \frac{\partial^6 U}{\partial y^6} \Big|_{y=0}, \quad A_8(x) = \frac{\partial^6 U}{\partial y^6} \Big|_{y=a}, \quad (21)$$

$$B_1(x) = V|_{y=0}, \quad B_2(x) = V|_{y=a}, \quad B_3(x) = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{y=0}, \quad B_4(x) = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{y=a},$$

$$B_5(x) = \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} \Big|_{y=0}, \quad B_6(x) = \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} \Big|_{y=a}, \quad B_7(x) = \frac{\partial^6 V}{\partial y^6} \Big|_{y=0}, \quad B_8(x) = \frac{\partial^6 V}{\partial y^6} \Big|_{y=a}.$$

Для возможности выполнения выражений (21) необходимо потребовать, чтобы  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  удовлетворяли условию гладкости  $(U, V) \in C^{(6)}(\Omega)$ .

Неизвестными в (19) являются функции, зависящие только от одной переменной  $x$

$$A_1(x) \div A_8(x), \quad B_1(x) \div B_8(x), \quad u_m(x), \quad v_m(x), \quad m = 1 \dots N_1. \quad (22)$$

Функции из (22) представим быстрыми разложениями по переменной  $x$ . Причем в данных повторных разложениях использованы граничные функции тех же порядков, что и в быстрых разложениях (19) по переменной  $y$ :

$$\begin{aligned} A_i(x) &= M_6^{A(i)}(x) + \sum_{n=1}^{N_2} a_{n+8}^{(i)} \sin n\pi \frac{x}{a}, \quad B_i(x) = M_6^{B(i)}(x) + \sum_{n=1}^{N_2} b_{n+8}^{(i)} \sin n\pi \frac{x}{a}, \\ u_m(x) &= M_6^{u(m)}(x) + \sum_{n=1}^{N_2} u_{n+8}^{(m)} \sin n\pi \frac{x}{a}, \quad v_m(x) = M_6^{v(m)}(x) + \sum_{n=1}^{N_2} v_{n+8}^{(m)} \sin n\pi \frac{x}{a}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$i = 1 \dots 8, \quad m = 1 \dots N_1.$$

В (23) обозначено через  $N_2$  – число учитываемых членов в рядах Фурье. Граничные функции  $M_6^{A(i)}(x)$ ,  $M_6^{B(i)}(x)$ ,  $M_6^{u(m)}(x)$ ,  $M_6^{v(m)}(x)$  определяем равенствами

$$\begin{aligned} M_6^{A(i)}(x) &= \sum_{k=1}^8 a_k^{(i)} P_k(x), \quad M_6^{B(i)}(x) = \sum_{k=1}^8 b_k^{(i)} P_k(x), \\ M_6^{u(m)}(x) &= \sum_{k=1}^8 u_k^{(m)} P_k(x), \quad M_6^{v(m)}(x) = \sum_{k=1}^8 v_k^{(m)} P_k(x), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $a_k^{(i)}$ ,  $b_k^{(i)}$ ,  $u_k^{(m)}$  и  $v_k^{(m)}$ ,  $i = 1 \dots 8$ ,  $m = 1 \div N_1$  – коэффициенты граничных функций вторичных разложений;  $P_k(x)$ ,  $k = 1 \div 8$  – быстрые полиномы [1].

Выражения для коэффициентов граничных функций  $a_k^{(i)}$ ,  $b_k^{(i)}$ ,  $u_k^{(m)}$ ,  $v_k^{(m)}$  и быстрых полиномов  $P_k(x)$  имеют вид

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad P_2(x) = \frac{x}{a}, \quad P_3(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right), \quad P_4(x) = \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right), \\ P_5(x) &= \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120a} - \frac{ax^3}{18} + \frac{a^3x}{45}\right), \quad P_6(x) = \left(\frac{x^5}{120a} - \frac{ax^3}{36} + \frac{7a^3x}{360}\right), \\ P_7(x) &= \left(\frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040a} - \frac{ax^5}{360} + \frac{a^3x^3}{270} - \frac{2a^5x}{945}\right), \\ P_8(x) &= \left(\frac{x^7}{5040a} - \frac{ax^5}{720} + \frac{7a^3x^3}{2160} - \frac{31a^5x}{15120}\right), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} a_1^{(i)} &= A_i|_{x=0}, \quad a_2^{(i)} = A_i|_{x=a}, \quad a_3^{(i)} = A_i''|_{x=0}, \quad a_4^{(i)} = A_i''|_{x=a}, \quad a_5^{(i)} = A_i^{(4)}|_{x=0}, \\ a_6^{(i)} &= A_i^{(4)}|_{x=a}, \quad a_7^{(i)} = A_i^{(6)}|_{x=0}, \quad a_8^{(i)} = A_i^{(6)}|_{x=a}, \quad i = 1 \dots 8, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} b_1^{(i)} &= B_i|_{x=0}, \quad b_2^{(i)} = B_i|_{x=a}, \quad b_3^{(i)} = B_i''|_{x=0}, \quad b_4^{(i)} = B_i''|_{x=a}, \quad b_5^{(i)} = B_i^{(4)}|_{x=0}, \\ b_6^{(i)} &= B_i^{(4)}|_{x=a}, \quad b_7^{(i)} = B_i^{(6)}|_{x=0}, \quad b_8^{(i)} = B_i^{(6)}|_{x=a}, \quad i = 1 \dots 8, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} u_1^{(m)} &= u_m|_{x=0}, \quad u_2^{(m)} = u_m|_{x=a}, \quad u_3^{(m)} = u_m''|_{x=0}, \quad u_4^{(m)} = u_m''|_{x=a}, \quad u_5^{(m)} = u_m^{(4)}|_{x=0}, \\ u_6^{(m)} &= u_m^{(4)}|_{x=a}, \quad u_7^{(m)} = u_m^{(6)}|_{x=0}, \quad u_8^{(m)} = u_m^{(6)}|_{x=a}, \quad m = 1 \dots N_1. \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \upsilon_1^{(m)} = \upsilon_m|_{x=0}, \quad \upsilon_2^{(m)} = \upsilon_m|_{x=a}, \quad \upsilon_3^{(m)} = \upsilon_m''|_{x=0}, \quad \upsilon_4^{(m)} = \upsilon_m''|_{x=a}, \quad \upsilon_5^{(m)} = \upsilon_m^{(4)}|_{x=0}, \\ \upsilon_6^{(m)} = \upsilon_m^{(4)}|_{x=a}, \quad \upsilon_7^{(m)} = \upsilon_m^{(6)}|_{x=0}, \quad \upsilon_8^{(m)} = \upsilon_m^{(6)}|_{x=a}, \quad m = 1 \dots N_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, краевая задача (3) – (6) сведена к определению  $2(8 + N_1)(8 + N_2)$  неизвестных коэффициентов

$$a_k^{(i)}, b_k^{(i)}, u_k^{(m)}, \upsilon_k^{(m)}, i = 1 \dots 8, k = 1 \dots 8, m = 1 \dots N_1, a_{n+8}^{(i)}, b_{n+8}^{(i)}, u_{n+8}^{(m)}, \upsilon_{n+8}^{(m)}, n = 1 \dots N_2. \quad (30)$$

Значения восьми коэффициентов

$$a_1^{(1)}, b_1^{(1)}, a_2^{(1)}, b_2^{(1)}, a_1^{(2)}, b_1^{(2)}, a_2^{(2)}, b_2^{(2)}, \quad (31)$$

входящих в (30), находятся при помощи значений компонент перемещений  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  в угловых точках прямоугольной области (см. формулы (21), (26), (27)). С учетом условия согласований (12), коэффициенты (31) определяются равенствами

$$a_1^{(1)} = b_1^{(1)} = a_2^{(1)} = b_2^{(1)} = a_1^{(2)} = b_1^{(2)} = 0, \quad a_2^{(2)} = K \sin 1.2\pi ab, \quad b_2^{(2)} = -K \sin a \sin b.$$

( $2(8 + N_1)(8 + N_2) - 8$ ) коэффициентов из (30)

используем быструю тригонометрическую интерполяцию, апробированную в работах [3, 4, 6-8]. Для этого подставим  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  из (19) в дифференциальные уравнения (3), (4) и граничные условия (5), (6). Полученные таким образом выражения в статье не приводим из-за их громоздкости.

Из граничных условий (5), (6) линейные алгебраические уравнения получим следующим образом. Промежуток  $[0, b]$  равномерно разобьем точками  $y = y_s = sb/(N_1 + 7)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_1 + 7$  на  $N_1 + 7$  отрезков и запишем уравнения, полученные из граничных условий (5) при подстановке  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  из (19), в каждой внутренней расчетной точке  $y = y_s$ ,  $s = 1, \dots, N_1 + 6$ . Будем иметь  $4(N_1 + 6)$  линейных алгебраических уравнений. Аналогично, промежуток  $[0, a]$  равномерно разобьем точками  $x = x_s = sa/(N_2 + 7)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_2 + 7$  на  $N_2 + 7$  отрезков и запишем уравнения, полученные из граничных условий (6) при подстановке  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  из (19), в каждой внутренней расчетной точке  $x = x_s$ ,  $s = 1, \dots, N_2 + 6$ . Тем самым, будем иметь еще  $4(N_2 + 6)$  линейных алгебраических уравнений.

Из дифференциальных уравнений (3), (4) линейные алгебраические уравнения запишем следующим образом. На область прямоугольника  $x \in [0; a]$ ,  $y \in [0; b]$  равномерно нанесем сетку в  $N_2 + 6$  точках  $x = x_s = sa/(N_2 + 7)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_2 + 7$  и в  $N_1 + 8$  точках  $y = y_s = sb/(N_1 + 7)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_1 + 7$ . Для составления системы линейных алгебраических уравнений используются только внутренние точки, образующие сетку из  $(N_1 + 6)(N_2 + 6)$   $(x_s, y_s)$ . Затем, уравнения (3), (4) при подстановке в них  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  из (19) запишем в каждой расчет-

ной точке  $(y_s, x_s)$   $2(N_1 + 6)(N_2 + 6)$  линейных алгебраических уравнений. В результате приходим к замкнутой системе  $2(N_1 + 6)(N_2 + 6) + 4(N_1 + 6) + 4(N_2 + 6)$  линейных алгебраических уравнений относительно оставшихся  $(2(8 + N_1)(8 + N_2) - 8)$  неизвестных из (30). Данная система уравнений решена в среде Maple. После чего, найденные неизвестные (30) подставлены в быстрые разложения (19). Тем самым, построено приближенное аналитическое решение краевой задачи (3) – (6).

Решение краевых задач (3), (4), (7) – (10) и (3), (4), (7) – (9), (11) отличается от вышеописанного решения только получением линейных алгебраических уравнений из граничных условий (7) – (10) и (7) – (9), (11). Так, при решении краевой задачи с граничными условиями (7) – (10) коэффициенты (31) нельзя найти также как в задаче с условиями (5), (6). Поэтому для их определения требуется восемь дополнительных расчетных точек (по сравнению с решением вышеописанного случая). Следовательно, промежуток  $[0, b]$  равномерно разобьем точками  $y = y_s = sb/(N_1 + 8)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_1 + 8$  на  $N_1 + 8$  отрезков и запишем уравнения, полученные из граничных условий (7), (8) при подстановке  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  из (19), в каждой внутренней расчетной точке  $y = y_s$ ,  $s = 1, \dots, N_1 - 7$

$4(N_1 + 7)$  линейных алгебраических уравнений. Аналогично, промежуток  $[0, a]$  равномерно разобьем точками  $x = x_s = sa/(N_2 + 8)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_2 + 8$  на  $N_2 + 8$  отрезков и запишем уравнения, полученные из граничных условий (9), (10) при подстановке  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  из (19), в каждой внутренней расчетной точке  $x = x_s$ ,  $s = 1, \dots, N_2 + 7$ .

$4(N_2 + 7)$  линейных алгебраических уравнений. Если заданы смешанные граничные условия (7) – (9), (11), то значения четырех коэффициентов из (31)  $a_1^{(1)}, b_1^{(1)}, a_2^{(1)}, b_2^{(1)}$  найдем с помощью значений компонент перемещений  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  в угловых точках  $(0, 0)$  и  $(a, 0)$ :

$$a_1^{(1)} = b_1^{(1)} = a_2^{(1)} = b_2^{(1)} = 0,$$

что позволит промежуток  $[0, a]$  равномерно разбить на  $N_2 + 7$  отрезков точками  $x = x_s = sa/(N_2 + 7)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_2 + 7$  (как и в случае граничных условий (6)). Таким образом, для нахождения остальных четырех неизвестных из (31)  $a_1^{(2)}, b_1^{(2)}, a_2^{(2)}, b_2^{(2)}$  требуется промежуток  $[0, b]$  (как и в случае граничных условий (7), (8)) равномерно разбить на  $N_1 + 8$  отрезков точками  $y = y_s = sb/(N_1 + 8)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_1 + 8$ .

В вычислительных экспериментах количество членов в рядах Фурье первого (19) и второго (23) быстрых разложений примем одинаковыми, т.е.  $N_1 = N_2 = N = 3$ . В качестве материала бруса выберем тяжелый бетон В30 с характеристиками [9]  $E = 32.5 \cdot 10^9$  Па,  $\nu = 0.2$ . Тогда коэффициенты Ламе будут

равны  $\lambda = 9.03 \cdot 10^9$  Па,  $\mu = 1.35 \cdot 10^{10}$  Па. Величину параметра  $K$  и размеры сечения примем равными  $K = 10^{-6}$ ,  $a = 1$  м,  $b = 1$  м.

Приближенное аналитическое решение (19) сравнивается с точным (18). Относительная погрешность тензора напряжений (2), невязка уравнений равновесия Ламе (3), (4) и граничных условий (5) – (11) вычислялась по формуле

$$\delta = |\Delta| / f_{\max} \cdot 100\%,$$

где  $\Delta$  – абсолютная погрешность,  $f_{\max}$  – максимальное значение исследуемого объекта.

Покажем на рис.1 – рис.3 невязку  $\delta$  уравнений равновесия Ламе (3) и (4) при использовании различных граничных условий.

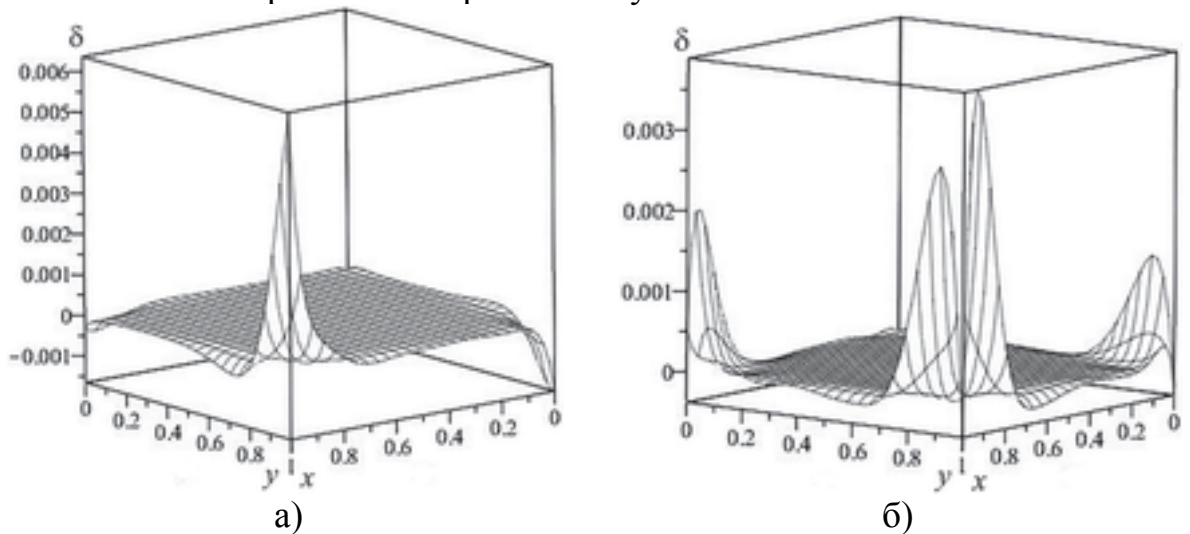


Рис. 1. Невязка  $\delta$  уравнений равновесия Ламе при граничных условиях (5), (6): а) (3), б) (4)

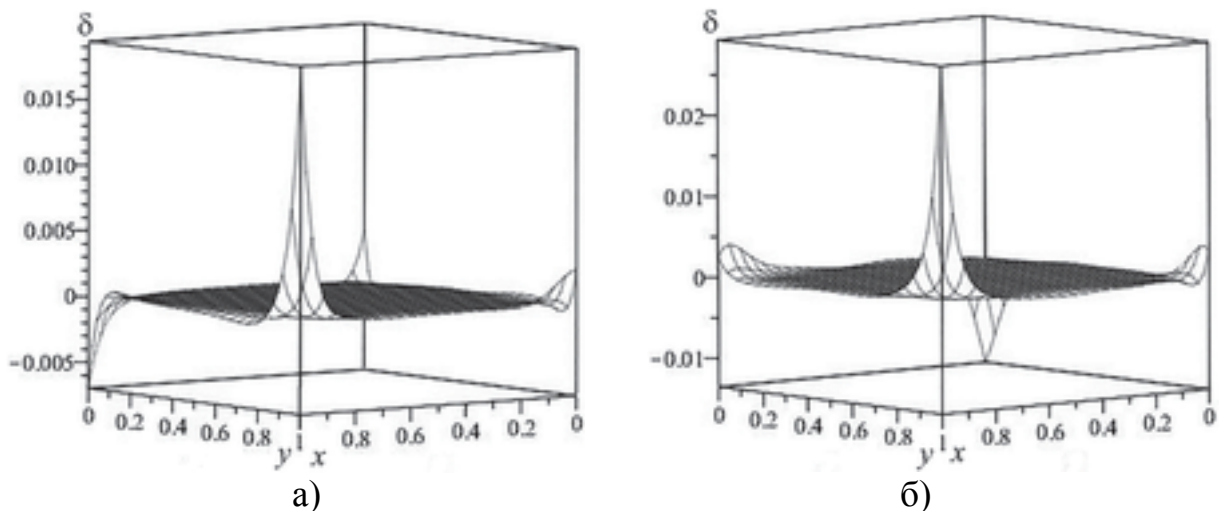
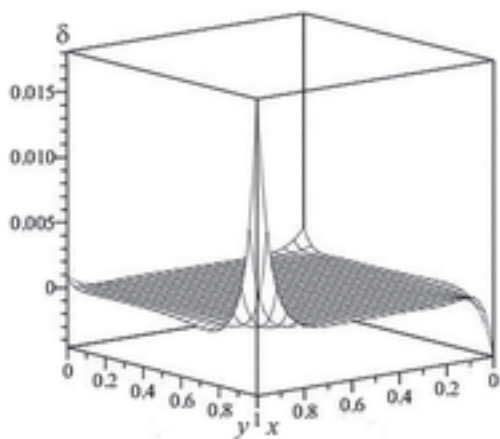
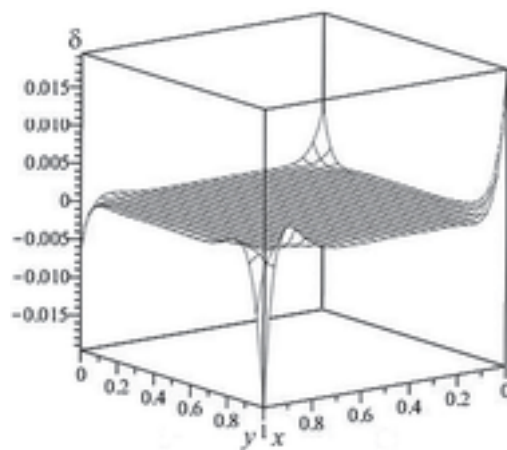


Рис. 2. Невязка  $\delta$  уравнений равновесия Ламе при граничных условиях (7) – (10): а) (3), б) (4)



а)



б)

Рис. 3. Невязка  $\delta$  уравнений равновесия Ламе при граничных условиях (7) – (9), (11): а) (3), б) (4)

Таблица 1

Относительная погрешность  $\delta_{\max}$ , %

Исследуемый объект		Используемые граничные условия		
		(5), (6)	(7) – (10)	(7) – (9), (11)
Компоненты тензора напряжений	$\sigma_{xx}$	$4.14 \cdot 10^{-4}$	$9.87 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-3}$
	$\sigma_{yy}$	$4.18 \cdot 10^{-4}$	$2.19 \cdot 10^{-3}$	$5.39 \cdot 10^{-3}$
	$\sigma_{zz}$	$3.67 \cdot 10^{-4}$	$1.05 \cdot 10^{-3}$	$6.42 \cdot 10^{-4}$
	$\tau_{xy}$	$3.67 \cdot 10^{-4}$	$1.53 \cdot 10^{-3}$	$6.42 \cdot 10^{-4}$
Невязка ДУ	(3)	$6.34 \cdot 10^{-3}$	$1.94 \cdot 10^{-2}$	$1.81 \cdot 10^{-2}$
	(4)	$3.82 \cdot 10^{-3}$	$2.93 \cdot 10^{-2}$	$1.96 \cdot 10^{-2}$
Невязка ГУ	$U _{x=a}, V _{y=b}$	$2.58 \cdot 10^{-5}$	---	---
	$V _{x=a}, V _{y=b}$	$5.59 \cdot 10^{-10}$	---	---
	$U _{x=0}, V _{x=0}$	0	---	---
	$U _{y=0}, V _{y=0}$	0	---	0
	$\sigma_{xx} _{x=a}$	---	$1.53 \cdot 10^{-3}$	$1.74 \cdot 10^{-3}$
	$\sigma_{xx} _{x=0}$	---	$3.28 \cdot 10^{-4}$	$1.80 \cdot 10^{-4}$
	$\tau_{xy} _{x=a}$	---	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$7.05 \cdot 10^{-4}$
	$\tau_{xy} _{x=0}$	---	$1.35 \cdot 10^{-3}$	$1.78 \cdot 10^{-3}$
	$\sigma_{yy} _{y=b}$	---	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$5.50 \cdot 10^{-3}$
	$\sigma_{yy} _{y=0}$	---	$1.38 \cdot 10^{-3}$	---
$\tau_{xy} _{y=b}$	---	$1.29 \cdot 10^{-3}$	$6.91 \cdot 10^{-4}$	
$\tau_{xy} _{y=0}$	---	$2.50 \cdot 10^{-4}$	---	

Из рисунков видно, что при задании граничных условий (7) – (10) и (7) – (9), (11) максимальная невязка  $\delta_{\max}$  дифференциальных уравнений будет в точке (1; 1). При задании граничных условий (5), (6) невязка  $\delta_{\max}$  дифференциального уравнения (3) также находится в точке (1; 1), а  $\delta_{\max}$  дифференциального уравнения (4) – в ее окрестности на стороне  $y = 1$ .

В таблице приведем значения максимальной относительной погрешности  $\delta_{\max}$  компонент тензора напряжений, невязки дифференциальных уравнений и невязки граничных условий. Из таблицы видно, что при использовании граничных условий трех видов (1. (5), (6), 2. (7) – (10), 3. (7) – (9), (11)) точнее всего находится решение краевой задачи с условиями Дирихле. По сравнению с этой задачей точность определения компонент тензора напряжений и невязки дифференциальных уравнений в двух других краевых задачах падает на порядок. Невязка граничных условий (7) – (10) и (7) – (9), (11) уступает по точности невязке граничных условий (5), (6) более порядка. Также можно отметить, что при использовании любого вида граничных условий компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$  определяются на порядок точнее невязки уравнений равновесия Ламе (3), (4).

В заключение отметим, что исследования, проведенные в данной работе, показали эффективность определения коэффициентов быстрых разложений с помощью быстрой тригонометрической интерполяции, так как даже при малом количестве членов ( $N = 3$ ) в рядах Фурье достигается высокая точность решения краевых задач. Если решение задачи должно быть определено с более высокой точностью, то в быстрых разложениях нужно выбрать граничную функцию более высокого порядка и/или увеличить количество членов в рядах Фурье.

### Литература

1. Чернышов А.Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 54. № 1. 2014. С. 13-24;
2. Горяйнов В.В., Попов М.И., Чернышов А.Д. Решение задачи о напряжениях в остром клиновидном режущем инструменте методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 5. С. 113-130;
3. Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Danshin A.A. Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 973. 2018. 012002;
4. Чернышов А.Д. Горяйнов В.В., Чернышов О.А. Применение метода быстрых разложений для расчета траекторий космических кораблей // Известия вузов. Авиационная техника. 2015. № 2. С. 41 – 47;
5. Новацкий В. Теория упругости. – М.: «Мир», 1975. – 865 с.;
6. Чернышов А.Д., Горяйнов В.В., Лешонков О.В., Соболева Е.А., Никифорова О.Ю. Сравнение скорости сходимости быстрых разложений с разложениями в классический ряд Фурье // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2019. № 1. С. 27–34;

7. Чернышов А.Д. Решение нелинейного уравнения теплопроводности для криволинейной области с условиями Дирихле методом быстрых разложений // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91. № 2. С. 456–468;

8. Чернышов А.Д. Решение двухфазной задачи Стефана с внутренним источником и задач теплопроводности методом быстрых разложений // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94, №1. С. 101-120;

9. URL: <https://docs.cntd.ru/document/554403082?marker=A840NF> (дата обращения: 18.03.2022).

**С.В. Каштанова<sup>1</sup>, А.В. Ржонсницкий<sup>2</sup>**

## **К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ РАСТЯГИВАЕМОЙ ПЛАСТИНЫ СО ВСТАВКОЙ**

<sup>1</sup>*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург*

<sup>2</sup>*Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), Санкт-Петербург*

В настоящей работе рассматривается вопрос о реализации вычисления критического значения, при котором происходит потеря устойчивости при растяжении, т.е. выпучивание из плоскости. Как частный пример изучается одноосное растяжение бесконечной изотропной пластины с эллиптической вставкой с другими модулями упругости.

Подобный класс задач при растяжении пластины с отверстиями или трещинами принято решать [1-5] энергетическим методом по Тимошенко, отыскивая критическую нагрузку, при которой происходит выпучивание, в форме

$$p^* = KE \left( \frac{h}{a} \right)^2,$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $h$  - толщина оболочки,  $a$  – характерный линейный размер выреза,  $K = \frac{\min \Lambda}{12(1-\nu^2)}$ .

В 2017 году Каштанова С.В. [4] в своей диссертации рассмотрела задачу с круговой вставкой из другого материала и определила критическую нагрузку в зависимости от жесткости вставки по отношению к пластине. Расчеты показали, что потеря устойчивости пластины с круговой жесткозакрепленной вставкой случается при меньших нагрузках в случае, когда модуль упругости вставки либо много меньше пластины (т.е. вставка очень «мягкая») либо, наоборот, много больше (т.е. вставка очень «жесткая»). По мере приближения модуля Юнга вставки к модулю Юнга пластины потеря устойчивости происходит либо при очень больших нагрузках, (в этих случаях, вероятно, скорее может произойти разрушение пластины), либо не происходит вовсе (в случае одинаковых материалов).



В более сложном случае, таком как эллиптическая вставка, трудность задачи заметно возрастает: усложняются формулы напряжений (в комплексном виде Колосова-Мусхелишвили), входящие в выражение для работы; необоснованно выбранный вид прогиба и громоздкость вычислений даже в случае отверстия (а не вставки) не позволяют решить эту задачу «в лоб». Таким образом, необходимо усовершенствовать техническую реализацию, применяя аналитические упрощения.

Сложность состоит в том, что в вышеобозначенных работах практически ничего не сказано о вычислительном процессе, и по сжатой информации этот вопрос остается закрытым. Однако с усложнением геометрии или наличием вставки процесс вычислений становится весьма трудоемким, и авторы данной работы считают, что полезно обмениваться разработками. Более того, результаты в известных работах не всегда совпадают и не представляется возможным их проконтролировать, так как технику вычислительного процесса не отследить. Поэтому авторы хотят предложить идеи, которые могут быть использованы в достаточно широком круге задач о потере устойчивости.

### Основные идеи

Запишем основное уравнение устойчивости [4]

$$D \cdot \Delta \Delta w = ph \left( \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

где  $D$  – изгибная жесткость пластины,  $w$  – прогиб,  $p$  – прикладываемая нагрузка,  $h$  – толщина пластины.

Задача состоит в поиске минимального собственного числа, отвечающего критической нагрузке, и собственного вектора, отвечающего форме потери устойчивости. Заметим, что собственный вектор определен с точностью до константы, поэтому уместно говорить именно о форме. Более того, если есть несколько различных собственных векторов, принадлежащих одному и тому же собственному числу, то их линейная комбинация – тоже собственный вектор.

В подобных задачах полезно учитывать симметрию: предположим, что рассматриваемая пластина обладает геометрической симметрией такой, что для любой точки с координатами  $(x, y)$ , точки  $(-x, y)$ ,  $(x, -y)$ , и  $(-x, -y)$  лежат на пластине. Пусть напряжение  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  во всех четырех точках одинаково, а  $\tau$  меняет знак при движении против часовой стрелки в следующую четверть. Тогда, если  $w(x, y)$  удовлетворяет уравнению (1), то  $w(-x, y)$ ,  $w(x, -y)$  и  $w(-x, -y)$  тоже удовлетворяют этому уравнению.

Если граничные условия таковы, что все эти четыре функции удовлетворяют им, то все они являются собственными векторами, или формами потери устойчивости, и, следовательно, их линейная комбинация тоже. Несложно показать, что для того, чтобы найти все формы достаточно найти симметричные формы потери устойчивости, что значительно облегчает вычислительный процесс.

Традиционно предлагается решать задачу о потере устойчивости энергетическим методом, т.е. необходимо считать потенциальную энергию:

$$U = \frac{D}{2} \iint [(\Delta w)^2 - (1 - \nu)L(w, w)] dx dy, \quad (2)$$

$$L = 2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$

Заметим, что в формуле (3)  $\Delta w = \text{Tr}(H)$ ,  $L = 2 \det H$ , где  $H$  – матрица Гессе функции прогибов:

$$H(w(x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Сделанные наблюдения при замене переменной в интеграле позволяют с выгодой использовать свойства следа и определителя матрицы. В случае эллиптических координат  $x = c \cdot \text{ch} \eta \cdot \cos \vartheta$ ,  $y = c \cdot \text{sh} \eta \cdot \sin \vartheta$ ,  $c$  – фокус, оказывается

$$J^{-1} = \frac{J^T}{\det J} \quad \text{и} \quad \text{Tr} H(x(\eta, \theta)) = \text{Tr} H(y(\eta, \theta)) = 0,$$

где  $J$  – матрица Якоби.

Первое выражение имеет место быть ввиду ортогональности строк и столбцов матрицы Якоби. Таким образом след матрицы Гессе в формуле (2) в частном случае эллиптических координат приобретает вид

$$\text{Tr} H(w(x, y)) = \frac{1}{\det J} \text{Tr} H(w(\eta, \theta)),$$

а определитель

$$\det H(w(x, y)) = \frac{1}{(\det J)^2} \det \left[ H(w(\eta, \theta)) - \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{c^2}{2 \det J} Q_1 - \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \frac{c^2}{2 \det J} Q_2 \right],$$

где

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \text{sh} 2\eta & \sin 2\vartheta \\ \sin 2\vartheta & -\text{sh} 2\eta \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -\sin 2\vartheta & \text{sh} 2\eta \\ \text{sh} 2\eta & \sin 2\vartheta \end{pmatrix}.$$

Также энергетический метод требует вычисления работы:

$$W = \frac{h}{2} \iint \left[ \sigma_{xx} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{yy} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy.$$

Полезно отметить, что подынтегральное выражение есть квадратичная форма относительно частных производных от прогиба, а ее матрица – это тензор напряжений. Разложение тензора напряжений в сферическую и девиаторную части

$$\sigma = \sigma_{sp} + \sigma_{dev} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} & \tau \\ \tau & -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \end{pmatrix}$$

в случае перехода к эллиптическим координатам позволяет упростить матрицу квадратичной формы в новых координатах:

$$J^{-1}(\sigma_{sp} + \sigma_{dev})(J^{-1})^T = \frac{1}{(\det J)^2} (\det J \cdot \sigma_{sp} + \sigma_{dev} \cdot J^2).$$

Приведенные рассуждения позволяют значительно облегчить счет и получить интегралы аналитически. В докладе рассматривается одноосное растяжение изотропной пластины с эллиптической вставкой из другого материала и приведены результаты критической нагрузки, при которой происходит потеря плоской формы, при разных физических и геометрических соотношениях пластины и вставки.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60008.*

#### Литература:

1. Brock, J.E.; Costello, R.G.; Pellet, D.A. Buckling of a tensioned panel containing circular hole. // *AIAA J.* 1968, 6, 2012–2014;
2. Гузь, А.Н., Дышель М.Ш., Кулиев Г.Г., Милованова О.Б. Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами // Киев «Наукова Думка», 1981;
3. Бочкарев А.О., Даль Ю.М.: Локальная устойчивость упругих пластин с вырезами // *Докл. АН СССР*, 308:2 (1989), 312–315; *Dokl. Math.*, 34:9 (1989), 854–855;
4. Bauer, S. M., Kashtanova, S. V., Morozov, N. F., Semenov. Stability loss in an infinite plate with a circular inclusion under uniaxial tension // *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, April 2017, Volume 50, Issue 2, pp 161–165;
5. Бочкарев А.О., Греков М.А., Локальная потеря устойчивости пластины с круговым нанотверстием при одноосном растяжении // *Доклады академии наук РАН*. 2014. Т.457, №3. 282-285.

**А.И. Веремейчик<sup>1</sup>, М.В. Нерода<sup>1</sup>, Б.Г. Холодарь<sup>1</sup>**

### **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ОБРАЗЦОВ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЗОНАМИ ИЗМЕНЕННОЙ СТРУКТУРЫ ИСХОДНОГО МАТЕРИАЛА ПОСЛЕ ТЕРМООБРАБОТКИ**

<sup>1</sup>*Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь*

Известно, что различного рода включения, возникающие в однородном теле, например, при термообработке, влияют на локальное напряженно-деформированное состояние (НДС) материала в своей окрестности [1–3]. Это влияние можно охарактеризовать либо через коэффициенты концентрации напряжений, либо через параметры, используемые в механике разрушения, например, коэффициенты интенсивности напряжений. Имеются аналитические и численные решения, в том числе приведенные в соответствующих справочниках [3–6]. При лазерной, плазменной и других высокоэнергетических методах сосредоточенного воздействия на деталь возникают зоны измененной структуры исходного материала – зона целевого воздействия и окружающая ее

зона термического влияния. В последней структура заметно отличается как от структуры зоны обработки, так и от структуры основного материала, и управление ее свойствами ограничено в связи с отсутствием возможности непосредственного сопутствующего воздействия на структурообразование в этой области. Данные о свойствах материала в этих областях ограничены, что является существенным недостатком при прогнозировании поведения обработанного объекта в разнообразных условиях его эксплуатации. Наиболее важными параметрами материала, определяющими его прочностные свойства, являются модули упругости, коэффициенты Пуассона, пределы прочности и текучести [7].

Чтобы оценить степень влияния различий модуля упругости и коэффициента Пуассона двух новообразованных зон детали сравнительно с характеристиками основного материала, проведено конечно-элементное моделирование задачи о растяжении стержня с дорожкой обработанного материала, окруженного промежуточной зоной термического влияния. Длина дорожки либо равна длине стержня, либо укорочена для учета влияния ее торцевой области. Кроме того, при проведении расчетов изменялась толщина промежуточного слоя. Ввиду симметрии задачи при моделировании достаточно рассматривать выделенную четвертинку образца (рис.1). Длина укороченного участка дорожки составляла  $5/11$  длины выделенного участка стержня.

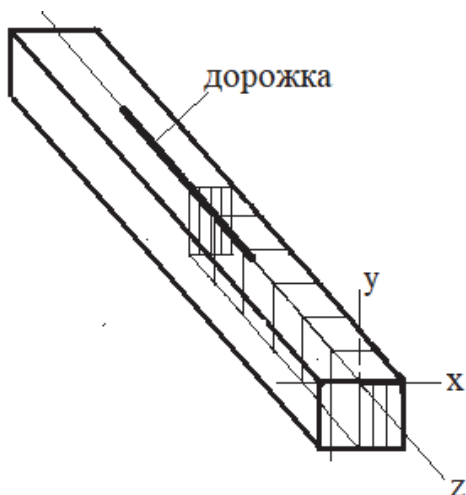


Рис. 1. Образец и выделенный элемент

Конечно-элементная модель задачи показана на рис.2. Левый верхний угол размерами  $0,4 \times 0,4$  мм занимает область обработанного материала. Этот объем всесторонне окружен переходной областью толщиной  $0,2$  мм с возможностью ее уменьшения до нуля. Весь остальной объем занят исходным (основным) материалом. Габаритные размеры модели  $2,0 \times 2,6 \times 4,4$  мм.

Граничные условия по перемещениям задавались в виде ограничения перемещений:  $v_y=0$  по верхней грани тела,  $w_z=0$  по задней торцевой грани,  $u_x=0$  по левой грани. На правой продольной грани условия либо не задавались ( $u_x \neq 0$ , имитация стержневого образца), либо задавалось условие  $u_x=0$  (имитация стесненной деформации, например, в пластинах). Модуль упругости исходного материала  $E=200$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\mu=0,3$ . Модули упругости промежу-

точного и обработанного слоев и их коэффициенты Пуассона варьировались, но принято, что после обработки материал тела во всех его точках остается в упругой области работы и одинаковой температуре, что соответствует большинству реализующихся случаев эксплуатации деталей и конструкций. Напряженно-деформированное состояние тела непосредственно в процессе его охлаждения после обработки не рассматривалось. Нагружение осуществлялось путем задания перемещения торцевого сечения на заданную величину  $w_z=0,0044$  мм, что соответствует напряжениям  $\sigma_z=200$  МПа для однородного стержня. Расчеты показали, что выбранная длина стержня достаточна для выравнивания напряженного состояния по его объему. Отношение модулей упругости обработанного материала к модулю исходного варьировалось в пределах 1,0–1,5, коэффициентов Пуассона соответственно в пределах 0,7–1,4. В качестве расчетного пакета использован программный комплекс MSC NASTRAN.

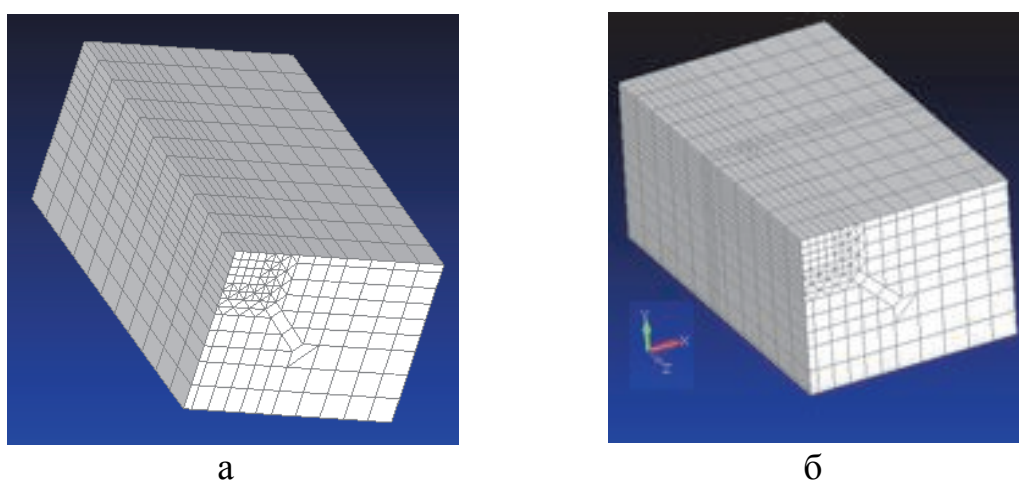


Рис. 2. Конечно-элементная модель:  
а - дорожка по всей длине, б - дорожка на части длины

Результаты расчетов приведены на рис.3–5. Индексы в таблицах «bas», «int», «pr» относятся соответственно к исходному материалу, промежуточному слою и обработанному объему. Величины напряжений являются средними в соответствующих элементах. Их значения в угловых точках элементов здесь не используются, так как в виду малости размеров конечных элементов сравнительно с габаритными размерами тела максимальные значения в них достаточно близки к средним. Главные напряжения  $\sigma_1$  в данной задаче близки к продольным напряжениям  $\sigma_z$ , поэтому их уровни не выведены отдельно. Минимальные и максимальные значения эквивалентных напряжений по критерию Мизеса  $\sigma_i$  и напряжений  $\sigma_z$  могут относиться к разным слоям и элементам. При стесненной деформации поперечные напряжения  $\sigma_x$  могут достигать 30–45% от продольных. На рис.3–5 приведены распределения эквивалентных напряжений  $\sigma_i$  по объему материала для соответствующих между собой характеристик материала и разных геометрических условий, касающихся геометрии обработки. Сравнивая их, можно определить направление изменения НДС материала в зависимости от этих параметров.

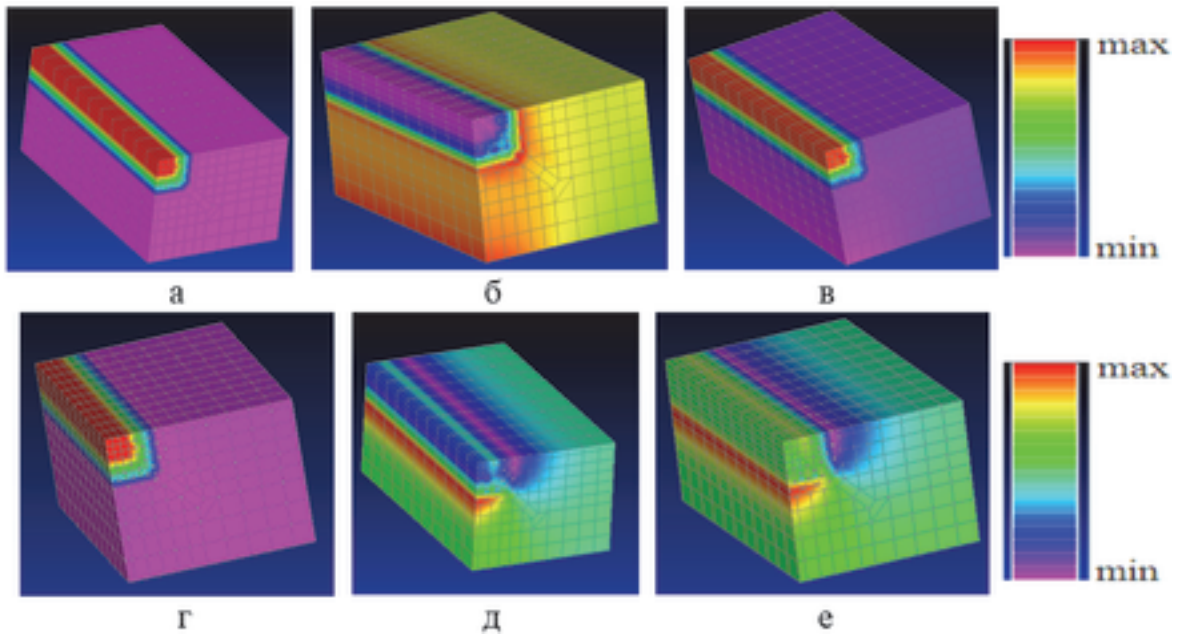


Рис. 3. Распределение эквивалентных напряжений по критерию Мизеса  $\sigma_i$  при термообработке по всей длине, свободной (а–в) и закрепленной (г–е) правой грани, толщина промежуточного слоя 0,2 мм

(а, г)  $E_{bas} = 200$  ГПа,  $E_{int} = 250$  ГПа,  $E_{pr} = 300$  ГПа,  $\mu_{bas} = \mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3$ ,

(б, д)  $E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200$  ГПа,  $\mu_{bas} = 0,3$ ,  $\mu_{int} = 0,36$ ,  $\mu_{pr} = 0,42$

(в, е)  $E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200$  ГПа,  $\mu_{bas} = 0,3$ ,  $\mu_{int} = 0,24$ ,  $\mu_{pr} = 0,21$

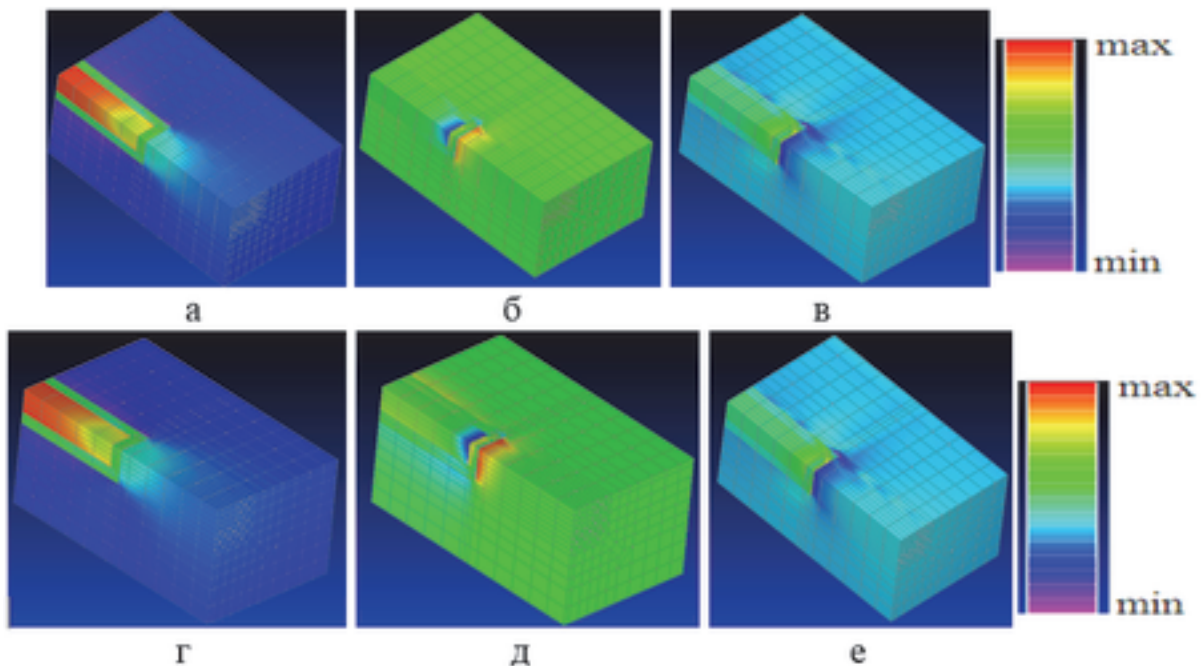


Рис. 4. Распределение эквивалентных напряжений по критерию Мизеса  $\sigma_i$  при термообработке части длины, свободной (а–в) и закрепленной (г–е) правой грани, толщина промежуточного слоя 0,2 мм

(а, г)  $E_{bas} = 200$  ГПа,  $E_{int} = 250$  ГПа,  $E_{pr} = 300$  ГПа,  $\mu_{bas} = \mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3$ ,

(б, д)  $E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200$  ГПа,  $\mu_{bas} = 0,3$ ,  $\mu_{int} = 0,36$ ,  $\mu_{pr} = 0,42$

(в, е)  $E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200$  ГПа,  $\mu_{bas} = 0,3$ ,  $\mu_{int} = 0,24$ ,  $\mu_{pr} = 0,21$



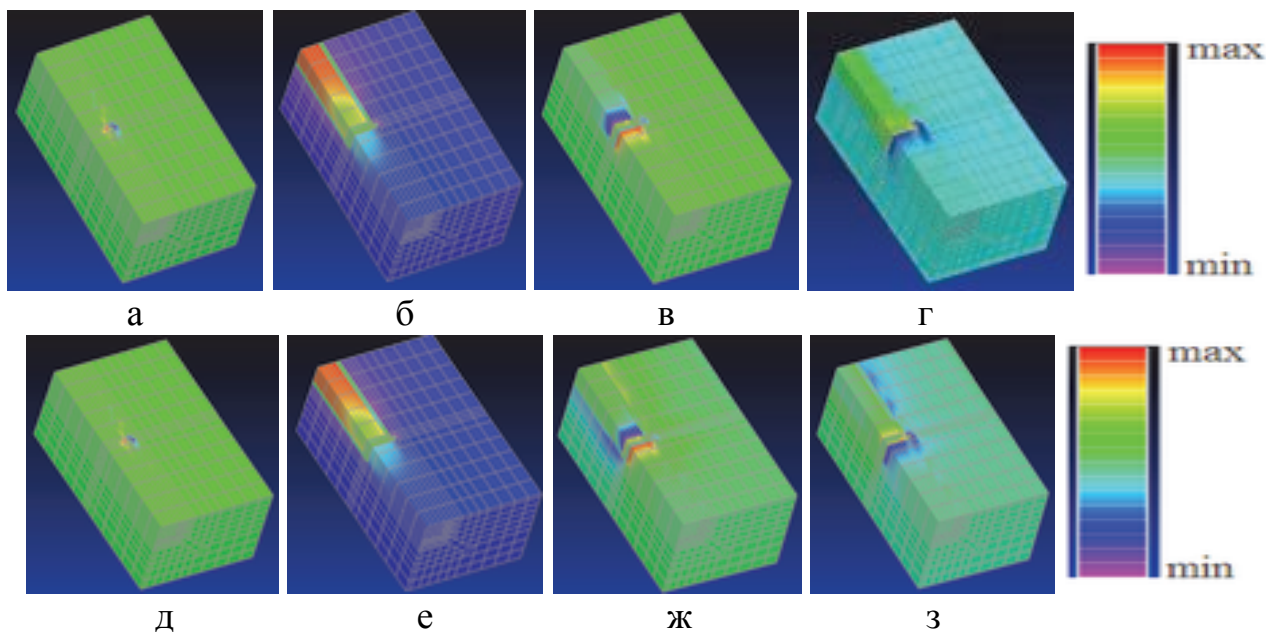


Рис. 5. Распределение эквивалентных напряжений по критерию Мизеса  $\sigma_i$  при термообработке части длины, свободной (а–г) и закрепленной (д–з) правой грани, толщина промежуточного слоя 0,1 мм

$$(а, д) E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200 \text{ ГПа}, \mu_{bas} = \mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3$$

$$(б, е) E_{bas} = 200 \text{ ГПа}, E_{int} = 250 \text{ ГПа}, E_{pr} = 300 \text{ ГПа}, \mu_{bas} = \mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3,$$

$$(в, ж) E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200 \text{ ГПа}, \mu_{bas} = 0,3, \mu_{int} = 0,36, \mu_{pr} = 0,42$$

$$(г, з) E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200 \text{ ГПа}, \mu_{bas} = 0,3, \mu_{int} = 0,24, \mu_{pr} = 0,21$$

Результаты показывают, что любое отклонение от исходных параметров ведет к изменению распределения напряжений по объему детали. Их максимум может реализоваться как в обработанном слое, так и в основном материале, промежуточном слое или на границах слоев. При возрастании модуля упругости обработанного слоя над модулем исходного материала всегда имеет место и возрастание максимальных напряжений  $\sigma_i$  и  $\sigma_z$ , в то время как возникающие на границе переходной зоны и основного материала минимальные  $\sigma_i$  и  $\sigma_z$  этой закономерности не подчиняются. Возможно, здесь играет роль и геометрия конечно-элементного разбиения, поскольку известно, например, что тетрагональные элементы имеют повышенную жесткость сравнительно с прямоугольными.

Отклонение коэффициента Пуассона обработанной зоны от коэффициента для исходного (основного) материала в любую сторону ведет к возрастанию максимальных напряжений, но по-разному может сказаться на уровне минимальных. Результаты исследований представлены графиками на рис. 6, 7. При изменении коэффициента Пуассона исходного материала построения на этих рисунках также определенным образом изменятся, что для частного случая отражено на них треугольными значками. Указанные замечания относительно влияния коэффициентов Пуассона соответствуют [1].

На рис.6,7 приведены значения отношений  $\sigma_z^{\max}$  к опорному значению  $\sigma_z=200$  МПа в зависимости от отношений  $k_E=E_{pr}/E_{bas}$  или  $k_\mu=\mu_{pr}/\mu_{bas}$ , которые можно рассматривать как коэффициенты концентрации напряжений для данной

задачи  $K_{\text{конц}} = \sigma_z^{\text{max}} / \sigma_{\text{ном}}$ . На рис. 6 отложены  $K_{\text{конц}}$ , относящиеся к варьированию отношениями  $E_{\text{пр}}/E_{\text{bas}}$ , а отдельными значками показаны  $K_{\text{конц}}$ , относящиеся к варьированию отношениями  $\mu_{\text{пр}}/\mu_{\text{bas}}$ . Светлые значки относятся к случаю свободной правой грани  $u_x \neq 0$  (случай стержня), а темные – к случаю закрепленной грани  $u_x = 0$  (стесненное деформирование).

Результаты показывают, что при стесненной деформации напряжения во всех рассмотренных случаях выше, чем при свободной.

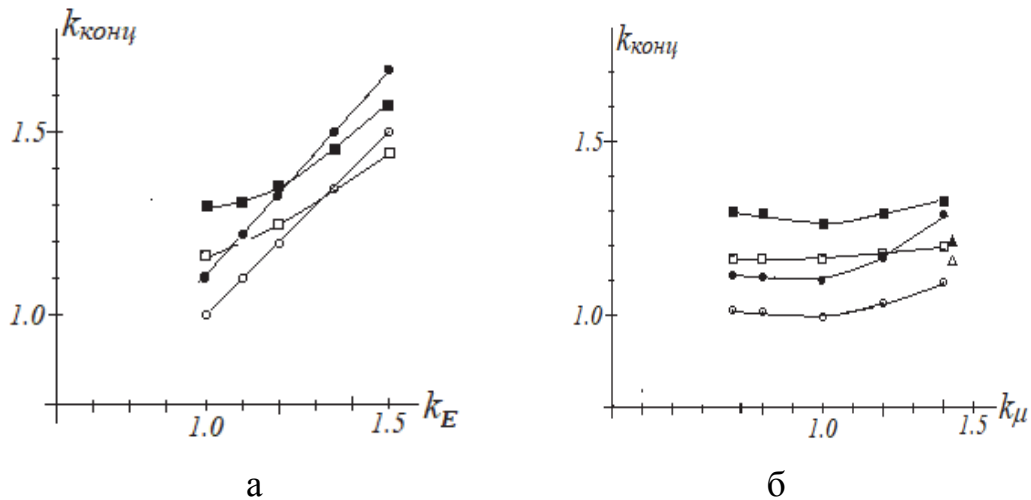


Рис. 6. Влияние модуля упругости (а) и коэффициента Пуассона (б) на продольные напряжения, длинная ( $\circ \bullet$ ) и укороченная ( $\square \blacksquare$ ) дорожки; промежуточный слой 0,2 мм

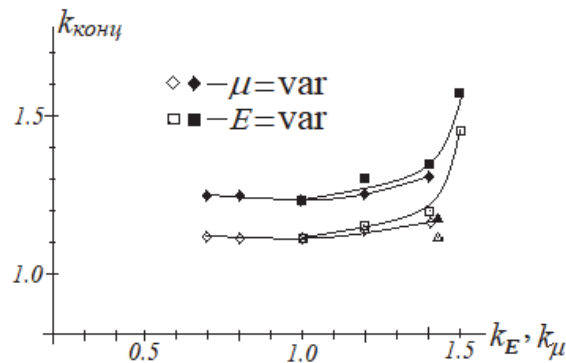


Рис. 7. Влияние модуля упругости и коэффициента Пуассона на продольные напряжения при укороченной зоне с промежуточным слоем толщиной 0,1 мм

Установлено, что для схемы с укороченной дорожкой при обнулении толщины  $t$  промежуточного слоя изменение коэффициента Пуассона относительно значения для исходного материала приводит к незначительному снижению концентрации напряжений, а для  $\mu_{\text{пр}} \leq 0,3$  коэффициент  $K_{\text{конц}}$  приближается снизу к значениям для  $t = 0,2$  мм.

Рассмотрен также случай наличия по всей длине образца трех параллельных дорожек, расположенных симметрично на расстояниях  $\delta = 0,0-6,0$  мм друг от друга. В качестве примера на рис. 8 показано распределение эквивалентных напряжений по Мизесу  $\sigma_i$  для случая, когда расстояние между дорожками составляет  $\delta = 0,2$  мм.



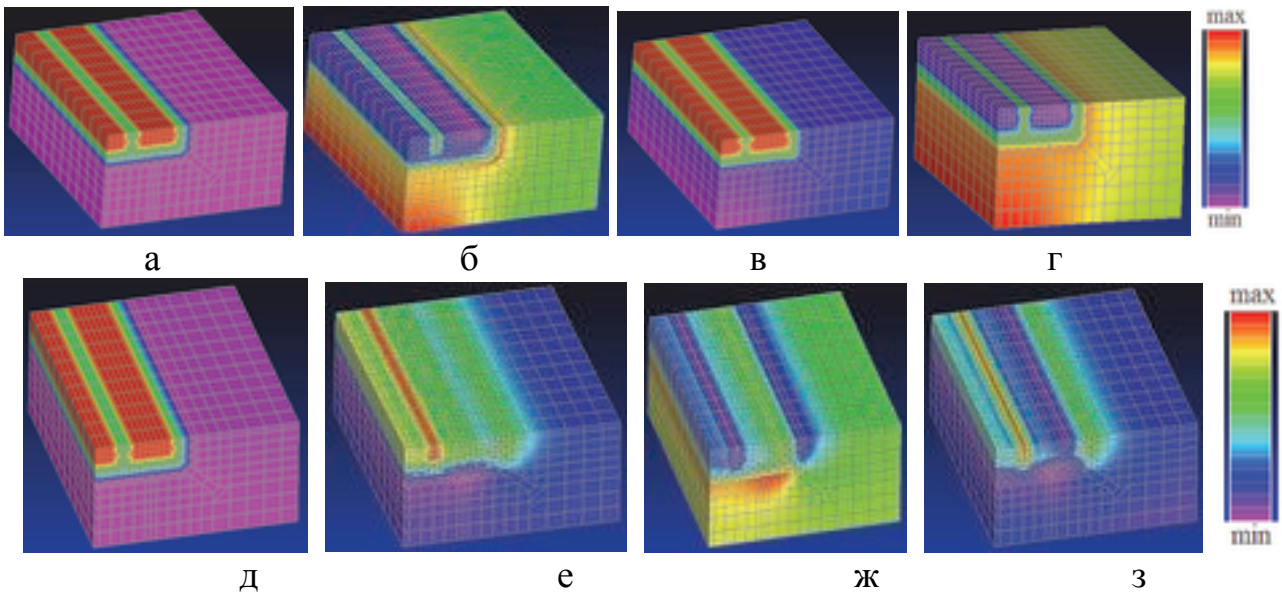


Рис. 8. Распределение эквивалентных напряжений по критерию Мизеса  $\sigma_i$  при свободной (а–г) и закрепленной (д–з) правой грани  
 (а, г)  $E_{bas} = 200$  ГПа,  $E_{int} = 250$  ГПа,  $E_{pr} = 300$  ГПа,  $\mu_{bas} = \mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3$ ,  
 (б, д)  $E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200$  ГПа,  $\mu_{bas} = 0,3$ ,  $\mu_{int} = 0,36$ ,  $\mu_{pr} = 0,42$   
 (в, е)  $E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200$  ГПа,  $\mu_{bas} = 0,3$ ,  $\mu_{int} = 0,24$ ,  $\mu_{pr} = 0,21$   
 (г, з)  $E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200$  ГПа,  $\mu_{bas} = 0,21$ ,  $\mu_{int} = 0,24$ ,  $\mu_{pr} = 0,3$

Результаты расчетов указывают на незначительное влияние расстояния  $\delta$  на напряженно-деформированное состояние материала, что иллюстрируется рис. 9, где показаны значения коэффициента концентрации продольных напряжений  $K_{конц}$ , который практически не отличается от его значений для одиночной дорожки. Объяснением этому факту служит то обстоятельство, что в данном случае максимум продольных напряжений  $\sigma_z$  и близких им главных напряжений  $\sigma_1$  возникает вблизи угловых точек сечения дорожки внутри тела детали. Таким образом, суждение о влиянии изменения механических и геометрических параметров материалов при воздействии высокоэнергетической струи на НДС тела можно осуществить из рассмотрения результатов для одиночной дорожки.

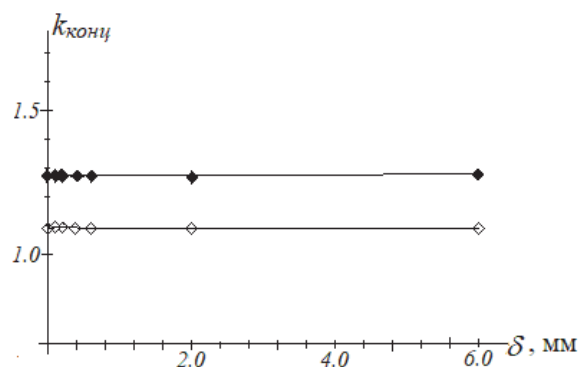


Рис. 9. Зависимость коэффициента концентрации продольных напряжений  $K_{конц}$  от расстояния  $\delta$  между дорожками

## Литература

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 708 с.;
2. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. – Москва ; Ленинград : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1951. – 496 с.;
3. Нейбер Г. Концентрация напряжений ; гер. с нем. Н.Н. Лебедева ; под ред. проф. А.И. Лурье. – Москва ; Ленинград: Гостехиздат, 1947. – 204 с.;
4. Прочность, устойчивость, колебания. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. Справочник в 3-х томах. – М. : Машиностроение. Т. 2. – 1968. – 463 с.;
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений : В 2 т. / [Ито Ю. и др.] ; Под ред. Ю. Мураками; Пер. с англ. под ред. Р.В. Гольдштейна, Н.А. Махутова. – М.: Мир, 1990. – 448 с. (том 1). – 568 с. (том 2);
6. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. Графики и формулы для расчета конструктивных элементов на прочность; пер. И.А. Нечай, пер. И.П. Сухарев, пер. Б.Н. Ушаков. пер. сангл. – М.: Мир, 1977. – 302 с.;
7. Исследование влияния механических характеристик зон термообработанного материала при растяжении / А.И. Веремейчик [и др.] // Актуальные проблемы прочности: материалы международной науч. конф., г. Минск, 23–27 мая 2022 г. / под ред. В.В. Рубаника – Минск: УП «ИВЦ Минфина», 2022. – С.262–264.

**А.В. Чигарев<sup>1</sup>, Ю.А. Замжицкая-Чигарева<sup>1</sup>**

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УПРОЧНЕНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ НАНОСЛОИСТЫМИ МАТЕРИАЛАМИ РЕЖУЩИХ ИНСТРУМЕНТОВ

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, г.Минск, Белоруссия

Создание износостойкого слоя покрытия методом осаждения объединяет два параллельно идущих процесса - конвекции и диффузии. Конвекция обуславливает поступательный перенос частиц от катода к поверхности осаждения, диффузия обуславливает учет случайных факторов, влияющих на траектории движения частиц, вследствие чего плотность среды осаждаемого вещества становится неоднородной, а процесс представляет собой диффузию, ограниченную кластеризацией или, наоборот, кластеризацию, ограниченную диффузией. Рассмотрим 2D-модель, в соответствии с которой область, в которой происходит осаждение частиц, плоская (рис.1). Частицы эмитируются с линии  $y = b$  и осаждаются на линии  $y = a$ , их размер по  $z$  значительно больше, чем по  $x$  и  $y$ .

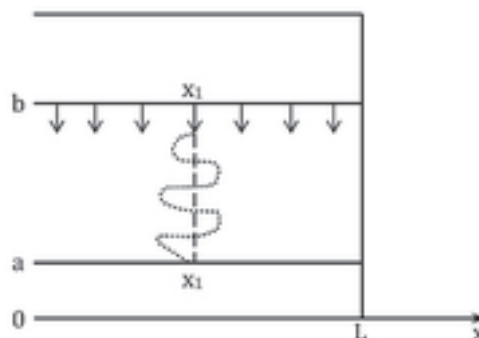


Рис. 1. 2D-модель, в соответствии с которой область, в которой происходит осаждение частиц, плоская

В случае отсутствия диффузии частица, вылетевшая из т.  $(x_1, b)$ , попадает в т.  $(x_1, a)$ , двигаясь по прямой, соединяющей эти точки. При наличии диффузии движение из т.  $(x_1, b)$  в т.  $(x_1, a)$  происходит по случайной траектории, причем вероятность попадания в т.  $(x_1, a)$  не равна единице (рис.2). Пусть при  $t = 0$  частица с координатой  $(x_1, b)$  начинает двигаться по прямой, соединяющей ее с точкой  $(x_1, a)$ . Рассмотрим сначала одномерный процесс  $y = y(t)$  при фиксированном  $x = x_1$ .

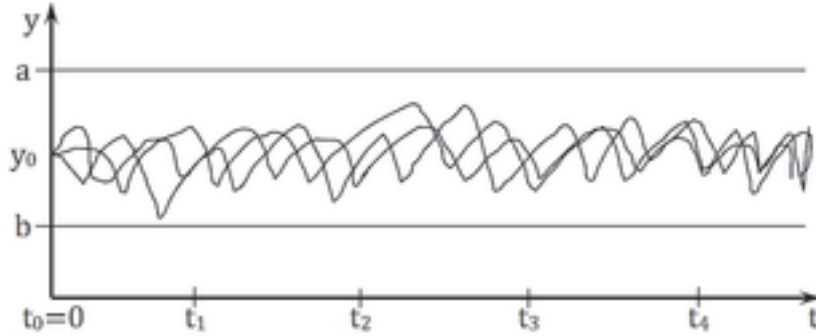


Рис. 2. Движение из т.  $(x_1, b)$  в т.  $(x_1, a)$  по случайной траектории

Пусть в момент времени  $t = t_0$  частица имеет координаты  $y = y_0$  ( $a < y_0 < b$ ),  $x = x_1$  ( $0 < x_1 < L$ ). Плотность вероятности и вероятность этого события имеют вид

$$f(y) = \delta(y - y_0), \quad \int_a^b f(y) dy = P(y = y_0) \quad (1)$$

При  $t > t_0$  координата  $y = \xi(t)$  случайная функция времени, тогда плотность вероятности можно записать в виде

$$f_t(y) = \langle \delta(y - \xi(t)) \rangle \quad (2)$$

где скобки  $\langle \rangle$  означают осреднение.

Положим, что  $\xi(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = v(\xi, t) + f(\xi, t), \quad \xi(0) = y_0 = \xi_0 \quad (3)$$

$$\langle f(\xi, t) \rangle = 0,$$

$$B(\xi, t, \xi', t') = \langle f(\xi, t) f(\xi', t') \rangle = 2\delta(t - t') F(\xi, \xi', t)$$

Дифференцируя (2) по  $t$  с учетом (3), получим

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \{ [v(y, t) + A(y, t)] f_t(y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} [F(x, y, t) f_t(y)] \} = 0 \quad (4)$$

$$A(y, t) = \frac{\partial}{\partial y} F(y, y', t) |_{y'=y}$$

Дифференциальное уравнение (4) ФПК (Фоккера-Планка-Колмогорова) должно решаться при начальном условии (1.1).

Физический смысл уравнения (4) состоит в том, что оно позволяет описать процессы перемещения частицы покрытия в газовой фазе от катода до подложки. Коэффициенты уравнения при  $f_t(y)$  имеют смысл коэффициентов сноса и диффузии. Члены уравнения с  $A$  и  $F$ , согласно формулам (3) и (4), обусловлены флуктуациями поля  $f(y, t)$ , действующего на частицу,  $v(\xi, t)$  и представляют

собой детерминированную функцию, характеризующую конвективный перенос частицы. Если  $f(y, t) = f(y)$ , т.е. постоянно во времени,  $A$  и  $F$  также постоянны во времени, что соответствует постоянному коэффициенту диффузии  $F$  и  $A = 0$ . Случаи, когда  $f(y, t)$  нестационарна, требует конкретизации модели.

Реальный процесс послойного формирования покрытия имеет стохастический характер вследствие того, что слой частиц, начавших свое движение от плоскости источника, не остается плоским, частицы взаимодействуя друг с другом, могут образовывать микрокластеры так, что между ними образуются корреляции. Такие микроконгломераты, осаждааясь на субстрат, будут рассматриваться как зародыши кластеров в слое покрытия, которые вносят в процесс осаждения случайность, а структуру покрытия делают неоднородной, фрактальной. В зависимости от упомянутых случайных факторов, время осаждения является для разных частиц случайной величиной.

Модель достижения случайным процессом границ области его изменения позволяет оценить вероятность этого события и среднее время, необходимое для этого .

Обозначим через  $P(y_0, t)$  вероятность события достижения границы  $a$  или  $b$  случайным процессом с начальным условием  $P(y, 0) = 0$  и краевыми условиями  $P(a, t) = P(b, t) = 1$ , тогда  $P(y_0, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P(y_0, t)}{\partial t} = K_1(y_0) \frac{\partial P}{\partial y_0} + \frac{1}{2} K_2(y_0) \frac{\partial^2 P}{\partial y_0^2} \quad (5)$$

$$K_1(y_0) = v(y_0) + \frac{AFF'}{4} \quad K_2(y_0) = \frac{AF^2}{2}, \quad F' = \frac{dF}{dy_0}$$

Коэффициенты сноса  $K_1$  и диффузии  $K_2$  конкретизируются для конкретных моделей. Как известно, решить уравнение (5) удастся лишь для некоторых частных моделей. Качественно при сформулированных начальном и граничном условиях вероятность достижения границы растет. На рис.3 схематически изображены вероятности  $P$  – достижения границы и  $\bar{P}$  – недостижения границы.

В силу условия нормирования

$$P + \bar{P} = 1 \quad (6)$$

Поскольку время достижения частицей субстрата - случайная величина на множестве реализаций, то по формуле для математического ожидания получим

$$\langle t \rangle = T = \int_0^{\infty} t \frac{\partial P(y_0, t)}{\partial t} dt = \int_0^{\infty} \bar{P}(y_0, t) dt \quad (7)$$

Из (7) с учетом (5) получается уравнение для  $T(y_0, t)$ , которое имеет вид

$$K_2(y_0) \frac{d^2 T}{dy_0^2} + K_1(y_0) \frac{dT}{dy_0} + 1 = 0 \quad (8)$$

Граничные условия для (1.8) имеют вид

$$T = 0 \text{ при } y_0 = a \text{ или } y_0 = b \quad (9)$$

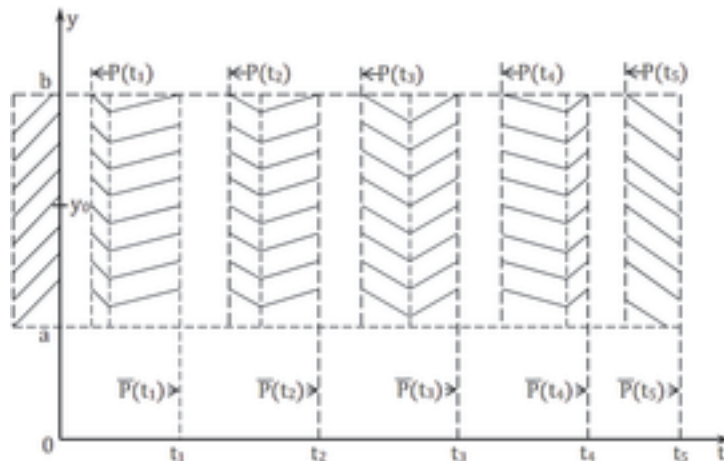


Рис. 3. Схематическое изображение вероятности  $P$  – достижения границы и  $\bar{P}$  – недостижения границы

Вид решения (1.8) зависит от вида  $K_1(y_0)$ ,  $K_2(y_0)$ , т.е. вида уравнения движения.

Если коэффициенты сноса и диффузии постоянны, источник частиц совпадает с осью  $y$ , т.е.  $y_0 = 0$ , а подложки расположены симметрично:  $a = -b$ , тогда

$$T = \frac{b}{K_1} dh \left( \frac{K_1}{K_2} b \right) \quad (10)$$

На рис.4 изображена безразмерная зависимость  $T$  от  $b$  при различных значениях  $K_1/K_2$ .

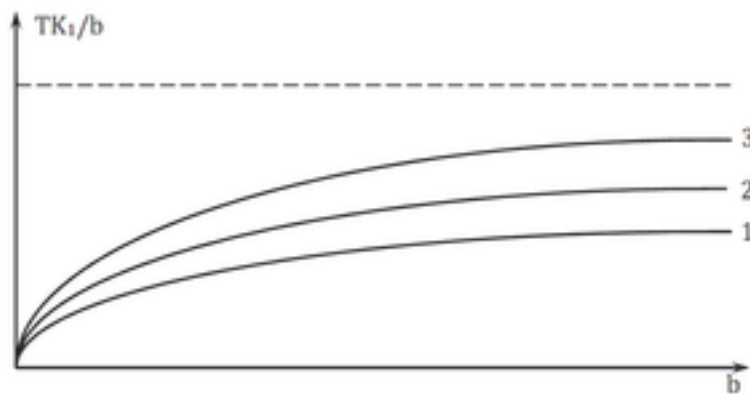


Рис. 4. Безразмерная зависимость  $T$  от  $b$  при различных значениях  $K_1/K_2$   
 1:  $K_1/K_2=10$ , 2:  $K_1/K_2=1$ , 3:  $K_1/K_2=0.1$

Из рис.4 следует, что чем больше коэффициент сноса  $K_1$ , тем меньше время до осаждения, чем больше коэффициент диффузии  $K_2$ , тем больше время до осаждения.

Рассмотрим модель синтеза покрытия. Рост покрытия происходит послойным осаждением частиц на подложку. В идеале слой частиц, испускаемый плоским источником, осаждается в виде слоя на подложку, тогда толщина слоя  $h(t)$  является детерминированной функцией. В реальности толщина покрытия, как сказано выше, является случайной функцией, которую можем представить в виде

$$H(t) = h(t) + v(t), \langle v \rangle = 0, v(t)v(t_1) = \frac{N_0}{2} \delta(t - t_1) \quad (11)$$

где  $v(t)$  случайная функция типа белого шума.

После остывания происходит трансформация слоя так, что толщина слоя в момент  $t$  представляет собой некоторый случайный процесс, представимый в виде

$$H_{\text{кон}}(t) = h_{\text{кон}}(t) + v_{\text{кон}}(t) \quad (12)$$

Процесс синтеза покрытия должен заканчиваться при достижении  $H_{\text{кон}}(t) = Q$ . Оценим вероятность достижения функцией  $H_{\text{кон}}(t)$  заданной толщины  $Q$  за время  $t$ . Качество покрытия определяется тем, что толщина покрытия в конечном состоянии должна быть заданной постоянной величиной. Вероятность  $P(y_0, t)$  достижения границы  $Q$  находится по формуле

$$P(y_0, t) = 1 - \bar{P}(y_0, t) = 1 - \int_{-\infty}^Q \bar{f}(y_0, y, t) dy \quad (13)$$

где  $\bar{f}(y_0, y, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial y} [y \bar{f}] + \frac{\alpha^2 N_0}{4} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y^2} \quad (14)$$

с граничными условиями

$$f(y_0, Q, t) = f(y_0, a, t) = \bar{f}(y_0, b, t) = 0 \quad (15)$$

начальное условие имеет вид

$$\bar{f}(y_0, y, t_0) = \delta(y - y_0) \quad (16)$$

В случае, если  $h(t) = Q$ , т.е. на подложку ложится слой требуемой толщины, то вероятность  $P(y_0, t)$  имеет вид

$$P(y_0, t) = 2 \left[ 1 - \Phi \left( \frac{Q - y_0 e^{-\alpha t}}{\sigma(t)} \right) \right] \quad (17)$$

$$\sigma^2(t) = \frac{N_0 \alpha}{4} (1 - e^{-2\alpha t})$$

где  $\Phi$  – интеграл вероятности.

Рассмотрим теперь модель флуктуации направления движения частиц осаждения, в результате чего частица может осаждаться не в предполагаемом месте, что может приводить к неравномерности плотности покрытия. В плоскости  $Oxy$  положение частицы характеризуем величинами  $x(t), y(t)$ . Вместо параметра  $t$  введем параметр  $s$  соотношением

$$s = \int V dt \quad (18)$$

где  $V$  – скорость движения частицы.

В каждой точке частицы отклоняются от прямолинейных траекторий движения вдоль прямых, параллельных оси  $y$  (рис.5).

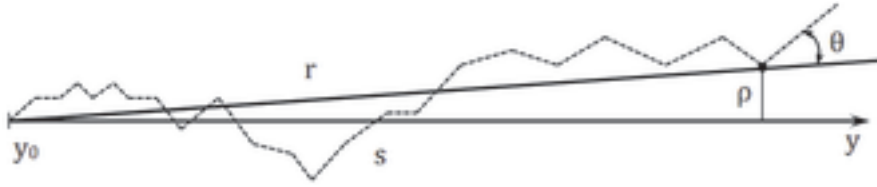


Рис. 5. Отклонение частиц от прямолинейных траекторий движения вдоль прямых параллельных оси  $y$

Плотность вероятности  $f(\theta|s, 0)$  удовлетворяет уравнению

$$\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

$$B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon^2 / \Delta t, \varepsilon^2 = r^2 \langle (\Delta \varphi)^2 \rangle, \langle \Delta r \cdot r \Delta \varphi \rangle$$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

Величина  $B$  связана с функцией корреляции скорости осаждения частиц

$$\psi_V(\rho) = \langle V(\vec{r}) V \vec{r}' \rangle - \langle V^2 \rangle$$

формулой вида

$$B = -\frac{2}{\langle V^2 \rangle} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial \psi_V}{\partial \rho} \right) \frac{d\rho}{\rho}$$

Решение уравнения (18) ищется с начальным условием

$$f(\theta|0,0) = \delta(\theta) / 2\pi \sin \theta$$

и имеет вид

$$f(\theta|s - s_1, 0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) P_n(\cos \theta) e^{-\frac{n(n+1)}{2} B(s - s_0)}$$

где  $P_n(\cos \theta)$  – полиномы Лежандра

При  $s \rightarrow \infty$  получается

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(\theta|s - s_0, 0) = \omega_1(\theta) = \frac{1}{4\pi}$$

Удобно характеризовать условие изменения вектора скорости частицы через  $\cos \theta$ , тогда  $\cos \theta = P_1(\theta)$  среднее значение направляющего косинуса вектора скорости вычисляется по формуле

$$\langle \cos \theta \rangle = \int_0^\pi \cos \theta * V \sin \theta d\theta$$

Из (24) получается дифференциальное уравнение для  $\langle \cos \theta \rangle$

$$\frac{d \langle \cos \theta \rangle}{ds} = -B * \langle \cos \theta \rangle$$

Решение уравнения (25) с граничным условием  $\langle \cos \theta \rangle = 1$  при  $s = 0$  имеет вид

$$\langle \cos \theta \rangle = e^{-Bs}$$

При  $s \rightarrow \infty$  получается  $\langle \cos \theta \rangle = 0$ , что в соответствии с (23) означает, что при достаточно большом расстоянии от источника до подложки все ориентации движения частицы равновероятны. Для малых расстояний

$$\langle \cos \theta \rangle = 1 - \frac{\langle \theta^2 \rangle}{2} = 1 - Bs \quad (28)$$

Откуда следует

$$\langle \theta^2 \rangle = 2Bs \quad (29)$$

Средний квадрат отклонения траектории частицы  $\rho$  от первоначального направления вдоль оси  $y$

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{4s}{3B} - \frac{2}{B^2}(1 - e^{-Bs}) + \frac{2}{9B^2}(1 - e^{-3Bs}) \quad (30)$$

Из (29) следует, что при  $Bs \ll 1$  имеем

$$\sqrt{\langle \rho^2 \rangle} = \sqrt{\frac{B}{G}} s^{3/2} \quad (31)$$

Средний квадрат расстояния по прямой до осаждаемой частицы

$$\langle r^2 \rangle = \frac{2s}{B} - \frac{2}{B^2}(1 - e^{-Bs}) \quad (32)$$

Формула (31) при  $Bs \ll 1$  приводится к формуле для среднего квадрата смещения тяжелой молекулы в легком газе, полученной Смолуновским

$$\langle r^2 \rangle = s^2 \left( 1 - \frac{Bs}{3} \right) \quad (33)$$

Дробная степень в формуле (30) указывает на то, что осаждение частиц покрытия описывается фрактальной динамикой.

Идеальная модель осаждения износостойкого покрытия методом вакуумно-плазменного осаждения представляет собой эмиссию частиц с некоторой условно плоской поверхности катода с одинаковой скоростью (температурой), по нормали к поверхности (плоскости). Частицы перемещаются по параллельным траекториям и, за счет сложного планетарного перемещения поверхности субстрата, послойно осаждаются на данную поверхность. Процесс описывается уравнением конвекции.

В реальности частицы имеют при испускании флуктуации скорости по величине и по направлению, причем в процессе движения процесс становится еще более нерегулярным. Облако имеет флуктуации плотности, возникает диффузия частиц, вследствие чего плотность, а значит жесткость и прочность осаждаемого слоя флуктуируют по площади поверхности. В дополнение к этому сама поверхность субстрата находится в процессе сложного планетарного перемещения (вращения). Следствием этого является то, что повреждения на первой стадии, а затем трещины зарождаются в местах осажденного покрытия, в которых плотность меньше. Математически это описывается моделью броуновского движения частицы уравнением (3), а плотность вероятности удовлетворяет уравнению (4).



Важное значение имеет время достижения частицей субстрата. Вследствие диффузии, в процессе движения частицы могут участвовать в столкновениях с другими, что ведет к уменьшению скорости, частица попадает на подложку под углом, что ведет к неоднородности покрытия по площади покрытия и возникновения микрорельефа поверхности, что также ухудшает стойкость и надежность покрытия.

Уравнение (11) - стохастическое на множестве траекторий осаждения



Рис. 6. Схема формирования рельефа осаждаемого покрытия

Формула (27) свидетельствует, что если расстояние от катода до субстрата достаточно велико, то перед субстратом имеется достаточно много частиц, которые смещаются перпендикулярно начальному направлению движения (параллельно субстрату). Формула (29) говорит о том, что дисперсия (разброс) направления движения перед субстратом растет, что свидетельствует о росте случайности в траекториях осаждаемых частиц. Формула (31) свидетельствует о фрактальном характере процесса осаждения частиц на подложку.

### Литература

1. Чигарев А.В., Дрозд С.Г.: Ползучесть и релаксация вследствие накопления повреждений, Весті АН РБ, сер. фіз.-тэхн., (1995), №4;
2. Шемякин Е.И.: О свободном разрушении твердых тел, ДАН, том 300, №5, (1998), с. 1090-1094;
3. Чигарев А.В.: Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред, (2000), Технопринт, Минск;
4. Свешников А.А.: Прикладные методы теории случайных функций, (1968), Наука, Москва;
5. Чигарев А.В.: Вычисление динамического тензора Грина стохастически неоднородной упругой среды, ПММ, том 43, №5, (1979), с.916-922;
6. В. Ф. Бобров. Основы теории резания металлов. Москва. Машиностроение. 1975 г. с.163;
7. Вильдеманн В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А.: Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов, Наука, Москва, (1997).

## ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА О ЧИСТОМ СДВИГЕ В МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СО СТЕСНЁННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск

Рассматривается вариант моментной теории упругости со стеснённым вращением для плоской деформации при наличии только сдвиговых напряжений для случаев изотропного и общего анизотропного материалов.

Ключевые слова: моментная теория упругости, несимметричные тензоры напряжений, определяющие уравнения, модули упругости, чистый сдвиг, стеснённое вращение, двумерная задача.

Классическая линейная теория упругости не даёт удовлетворительного описания деформирования упругих тел при больших градиентах напряжений, для областей с угловыми точками, для зернистых сред, полимерных материалов и других случаев деформирования. Чтобы иметь возможность более адекватного описания деформирования упругих тел, была предложена [1, 2] модель моментной упругой среды, учитывающая, кроме силового взаимодействия, ещё и вращательное взаимодействие между частицами. Упругая среда рассматривается как совокупность частиц, положение которых в декартовой прямоугольной системе координат  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  определяется вектором смещений  $u_i$  и независимым вектором поворотов  $\varphi_i$ . Некоторые двумерные задачи для изотропной моментной среды решены, например, в работах [3, 4]. Рассматривается случай плоской деформации, когда  $u_1(x_1, x_2)$ ,  $u_2(x_1, x_2)$ ,  $u_3 = 0$  и  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  $\varphi_3(x_1, x_2)$ . Для стеснённого вращения имеет место равенство  $\varphi_3 = \omega_3 = (1/2)(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$ , где  $\partial_i$  – производная по координате  $x_i$ .

Рассматривая плоскую деформацию анизотропной среды, не предполагая, что двумерные уравнения следуют из трёхмерных уравнений. При отсутствии объёмных сил и моментов уравнения равновесия в двумерном случае принимают вид [3, 4]

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} = 0, \quad \partial_1 \sigma_{21} + \partial_2 \sigma_{22} = 0; \quad (1)$$

$$\partial_1 \mu_{31} + \partial_2 \mu_{32} + \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0, \quad (2)$$

где  $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$  – тензор силовых напряжений, а  $\mu_{ij} \neq \mu_{ji}$  – тензор моментных напряжений. Обобщённые деформации совпадают с классическими [4]

$$e_{11} = \varepsilon_{11} = \partial_1 u_1, \quad e_{22} = \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2, \quad (3)$$

$$e_{21} = e_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1),$$

а компоненты кручения-изгиба имеют вид

$$\kappa_{31} = \partial_1 \omega_3 = \frac{1}{2}(\partial_{11} u_2 - \partial_{12} u_1), \quad \kappa_{32} = \partial_2 \omega_3 = \frac{1}{2}(\partial_{12} u_2 - \partial_{22} u_1). \quad (4)$$

С учётом (3), (4) определяющие соотношения возьмём в виде:

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl} \sigma_{kl} = a_{ij11} \sigma_{11} + a_{ij21} \sigma_{21} + a_{ij12} \sigma_{12} + a_{ij22} \sigma_{22}, \quad a_{ijkl} = a_{jikl}, \quad (5)$$

$$\mu_{31} = D_{3131} \kappa_{31} + D_{3132} \kappa_{32}, \quad \mu_{32} = D_{3231} \kappa_{31} + D_{3232} \kappa_{32}.$$

Здесь постоянные тензоры  $a_{ijkl}$ ,  $D_{ijkl}$  характеризуют упругий анизотропный материал.

Рассмотрим случай чисто сдвиговых напряжений, при этом  $\sigma_{11} = 0$ ,  $\sigma_{22} = 0$ . Тогда из (1) следует, что  $\sigma_{21} = \sigma_{21}(x_2)$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1)$ , и из (3), (5) получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \partial_1 u_1 = a_{1121} \sigma_{21}(x_2) + a_{1112} \sigma_{12}(x_1), \\ \varepsilon_{22} &= \partial_2 u_2 = a_{2221} \sigma_{21}(x_2) + a_{2212} \sigma_{12}(x_1), \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) = a_{2121} \sigma_{21}(x_2) + a_{2112} \sigma_{12}(x_1).\end{aligned}\quad (6)$$

Для деформаций (6) условие совместности [2]  $\partial_{22} \varepsilon_{11} + \partial_{11} \varepsilon_{22} - 2\partial_{21} \varepsilon_{21} = 0$  принимает вид

$$a_{1121} \partial_{22} \sigma_{21}(x_2) + a_{2212} \partial_{11} \sigma_{12}(x_1) = 0. \quad (7)$$

Считаем, что  $a_{1121} \neq 0$ ,  $a_{2212} \neq 0$ , тогда из (7) получаем напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_{21}(x_2) &= \frac{1}{a_{1121}} (c_2 x_2^2 + c_1 x_2 + c_0), \\ \sigma_{12}(x_1) &= \frac{1}{a_{2212}} (-c_2 x_1^2 + k_1 x_1 + k_0),\end{aligned}\quad (8)$$

где  $c_i$ ,  $k_i$  — произвольные постоянные. Подставляем напряжения (8) в первые два уравнения (6):

$$\begin{aligned}\partial_1 u_1 &= c_2 x_2^2 + c_1 x_2 + c_0 + \frac{a_{1112}}{a_{2212}} (-c_2 x_1^2 + k_1 x_1 + k_0), \\ \partial_2 u_2 &= \frac{a_{2221}}{a_{1121}} (c_2 x_2^2 + c_1 x_2 + c_0) + (-c_2 x_1^2 + k_1 x_1 + k_0),\end{aligned}$$

отсюда получаем

$$\begin{aligned}u_1 &= (c_2 x_2^2 + c_1 x_2 + c_0) x_1 + \frac{a_{1112}}{a_{2212}} \left( \frac{-c_2}{3} x_1^3 + \frac{k_1}{2} x_1^2 + k_0 x_1 \right) + u_1(x_2), \\ u_2 &= \frac{a_{2221}}{a_{1121}} \left( \frac{c_2}{3} x_2^3 + \frac{c_1}{2} x_2^2 + c_0 x_2 \right) + (-c_2 x_1^2 + k_1 x_1 + k_0) x_2 + u_2(x_1).\end{aligned}\quad (9)$$

Далее подставляем (8), (9) в третье уравнение (6):

$$\begin{aligned}\partial_1 u_2(x_1) + c_1 x_1 - 2 \frac{a_{2112}}{a_{2212}} (-c_2 x_1^2 + k_1 x_1 + k_0) + \\ + \partial_2 u_1(x_2) + k_1 x_2 - 2 \frac{a_{2121}}{a_{1121}} (c_2 x_2^2 + c_1 x_2 + c_0) = 0.\end{aligned}$$

Из этого уравнения находим:

$$\begin{aligned}u_1(x_2) &= 2 \frac{a_{2121}}{a_{1121}} \left( \frac{c_2}{3} x_2^3 + \frac{c_1}{2} x_2^2 + c_0 x_2 \right) - \frac{k_1}{2} x_2^2 - a_1 x_2 + b_0, \\ u_2(x_1) &= 2 \frac{a_{2112}}{a_{2212}} \left( -\frac{c_2}{3} x_1^3 + \frac{k_1}{2} x_1^2 + k_0 x_1 \right) - \frac{c_1}{2} x_1^2 + a_1 x_1 + a_0,\end{aligned}\quad (10)$$

где  $a_1$ ,  $a_0$ ,  $b_0$  — произвольные постоянные.

Получив смещения (9), (10) найдём деформации (3), (6) и вращение  $\varphi_3 = \omega_3 = (1/2)(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$ , которые не выписываем. Далее находим компоненты (4) и моментные напряжения (5):

$$\begin{aligned}\mu_{31} &= D_{3131} \left[ -2c_2 x_2 - c_1 + \frac{a_{2112}}{a_{2212}} (-2c_2 x_1 + k_1) \right] + \\ &+ D_{3132} \left[ -2c_2 x_1 + k_1 - \frac{a_{2121}}{a_{1121}} (2c_2 x_2 + c_1) \right], \\ \mu_{32} &= D_{3231} \left[ -2c_2 x_2 - c_1 + \frac{a_{2112}}{a_{2212}} (-2c_2 x_1 + k_1) \right] + \\ &+ D_{3232} \left[ -2c_2 x_1 + k_1 - \frac{a_{2121}}{a_{1121}} (2c_2 x_2 + c_1) \right].\end{aligned}\quad (11)$$

Подставляем напряжения (8), (11) в уравнение (2):

$$D_{3131} \frac{a_{2112}}{a_{2212}} (-2c_2) + D_{3132} (-2c_2) + D_{3231} (-2c_2) + D_{3232} \frac{a_{2121}}{a_{1121}} (-2c_2) + \\ + \frac{1}{a_{1121}} (c_2 x_2^2 + c_1 x_2 + c_0) - \frac{1}{a_{2212}} (-c_2 x_1^2 + k_1 x_1 + k_0) = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что

$$c_2 = 0, \quad c_1 = 0, \quad k_1 = 0, \quad \frac{c_0}{a_{1121}} = \frac{k_0}{a_{2212}} = c. \quad (12)$$

С учётом (12) из формул (6), (8)–(11) окончательно получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= c(a_{1121} + a_{1112})x_1 + (2a_{2121}c - a_1)x_2 + b_0, \\ u_2 &= c(a_{2221} + a_{2212})x_2 + (2a_{2112}c + a_1)x_1 + a_0, \\ \varepsilon_{11} &= c(a_{1121} + a_{1112}), \quad \varepsilon_{22} = c(a_{2221} + a_{2212}), \\ \varepsilon_{21} &= c(a_{2112} + a_{2121}), \\ \varphi_3 = \omega_3 &= c(a_{2112} - a_{2121}) + a_1, \quad \kappa_{31} = 0, \quad \kappa_{32} = 0, \\ \mu_{31} &= 0, \quad \mu_{32} = 0, \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} = c. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение (13) соответствует классической упругости, нет моментных напряжений, сдвиговые напряжения симметричны и постоянны. Возможно такое решение получилось из-за того, что задача рассматривалась как двумерная, а не как следствие трёхмерных уравнений.

Допустим, что начало координат  $x_1 = 0, x_2 = 0$  не смещается и нет вращения, т. е. для решения (13) получаем:

$$\begin{aligned} u_1(0, 0) &= b_0 = 0, \quad u_2(0, 0) = a_0 = 0, \\ \omega_3(0, 0) &= c(a_{2112} - a_{2121}) + a_1 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Если  $a_{2112} = a_{2121}$ , то  $a_1 = 0$ . С учётом (14) смещения (13) принимают вид

$$u_1 = \varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{21}x_2, \quad u_2 = \varepsilon_{21}x_1 + \varepsilon_{22}x_2. \quad (14a)$$

Для изотропной среды имеем коэффициенты

$$a_{1121} = a_{1112} = 0, \quad a_{2221} = a_{2212} = 0, \quad a_{2121} = a_{2112} = \frac{1}{4\mu} \quad (15)$$

и моментные напряжения

$$\mu_{31} = D_2 \kappa_{31}, \quad \mu_{32} = D_2 \kappa_{32}, \quad (16)$$

где  $\mu > 0, D_2 > 0$  — постоянные. С учётом (15) уравнения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \partial_1 u_1 = 0, \quad \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2 = 0, \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) = \frac{1}{4\mu}(\sigma_{21}(x_2) + \sigma_{12}(x_1)), \end{aligned} \quad (17)$$

причём условие совместности (7) выполняется. Из уравнений (17) получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_2), \quad u_2 = u_2(x_1), \\ \sigma_{21}(x_2) + \sigma_{12}(x_1) &= 2\mu[\partial_1 u_2(x_1) + \partial_2 u_1(x_2)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее с учётом (4), (16), (18) находим

$$\mu_{31} = \frac{1}{2}D_1 \partial_{11} u_2(x_1), \quad \mu_{32} = -\frac{1}{2}D_2 \partial_{22} u_1(x_2)$$

и из уравнения (2) получаем

$$\sigma_{21}(x_2) - \sigma_{12}(x_1) = -\frac{1}{2}D_2(\partial_{111} u_2(x_1) - \partial_{222} u_1(x_2)). \quad (19)$$

Из уравнений (18), (19) выражаем напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{21}(x_2) &= \mu \partial_2 u_1(x_2) + \frac{1}{4}D_2 \partial_{222} u_1(x_2) + \mu \partial_1 u_2(x_1) - \frac{1}{4}D_2 \partial_{111} u_2(x_1), \\ \sigma_{12}(x_1) &= \mu \partial_1 u_2(x_1) + \frac{1}{4}D_2 \partial_{111} u_2(x_1) + \mu \partial_2 u_1(x_2) - \frac{1}{4}D_2 \partial_{222} u_1(x_2). \end{aligned} \quad (20)$$

Так как напряжения слева в (20) зависят от одной переменной, то из (20) следует, что смещения удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\mu u_1(x_2) - \frac{1}{4} D_2 \partial_{22} u_1(x_2) &= \mu(c_1 x_2 + c_0), \\ \mu u_2(x_1) - \frac{1}{4} D_2 \partial_{11} u_2(x_1) &= \mu(k_1 x_1 + k_0),\end{aligned}\quad (21)$$

где  $c_0, c_1, k_0, k_1$  — произвольные постоянные. Решение уравнений (21) следующее

$$\begin{aligned}u_1(x_2) &= c_0 + c_1 x_2 + C_1 e^{\lambda_1 x_2} + C_2 e^{-\lambda_1 x_2}, \\ u_2(x_1) &= k_0 + k_1 x_1 + K_1 e^{\lambda_1 x_1} + K_2 e^{-\lambda_1 x_1},\end{aligned}\quad (22)$$

где  $C_1, C_2, K_1, K_2$  — произвольные постоянные;  $\lambda_1 = 2\sqrt{\mu/D_2}$ .

Зная смещения (22), находим все остальные величины

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= 0, \quad \varepsilon_{22} = 0, \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} [k_1 + c_1 + \lambda_1 (K_1 e^{\lambda_1 x_1} - K_2 e^{-\lambda_1 x_1} + C_1 e^{\lambda_1 x_2} - C_2 e^{-\lambda_1 x_2})], \\ \varphi_3 = \omega_3 &= \frac{1}{2} [k_1 - c_1 + \lambda_1 (K_1 e^{\lambda_1 x_1} - K_2 e^{-\lambda_1 x_1} - (C_1 e^{\lambda_1 x_2} - C_2 e^{-\lambda_1 x_2}))], \\ \chi_{31} &= \frac{2\mu}{D_2} (K_1 e^{\lambda_1 x_1} + K_2 e^{-\lambda_1 x_1}), \quad \chi_{32} = -\frac{2\mu}{D_2} (C_1 e^{\lambda_1 x_2} + C_2 e^{-\lambda_1 x_2}), \\ \mu_{31} &= 2\mu (K_1 e^{\lambda_1 x_1} + K_2 e^{-\lambda_1 x_1}), \quad \mu_{32} = -2\mu (C_1 e^{\lambda_1 x_2} + C_2 e^{-\lambda_1 x_2}), \\ \sigma_{21}(x_2) &= \mu(c_1 + k_1) + 2\mu(C_1 e^{\lambda_1 x_2} - C_2 e^{-\lambda_1 x_2})\lambda_1, \\ \sigma_{12}(x_1) &= \mu(k_1 + c_1) + 2\mu(K_1 e^{\lambda_1 x_1} - K_2 e^{-\lambda_1 x_1})\lambda_1.\end{aligned}\quad (23)$$

Решение (22), (23) содержит восемь свободных постоянных, которые можно назначать произвольно, тогда на границе рассматриваемой области значения функций (22), (23) будут такими, какими получатся. Но можно задавать значения функций в каких-то точках или на границе, а затем находить постоянные. Допустим, что начало координат  $x_1 = 0, x_2 = 0$  не смещается и не вращается. Тогда для решения (22), (23) получаем три условия для постоянных

$$\begin{aligned}u_1(0,0) = c_0 + C_1 + C_2 = 0, \quad u_2(0,0) = k_0 + K_1 + K_2 = 0, \\ 2\omega_3(0,0) = k_1 - c_1 + \lambda_1(K_1 - K_2 - (C_1 - C_2)) = 0.\end{aligned}\quad (24)$$

Из выражений (23) для  $\mu_{31}, \mu_{32}$  следует, что при отсутствии моментных напряжений постоянные  $K_i, C_i$  равны нулю, тогда из (24) получаем  $c_0 = 0, k_0 = 0, k_1 = c_1$ , при этом

$$u_1 = c_1 x_2, \quad u_2 = c_1 x_1, \quad \varepsilon_{21} = c_1, \quad \omega_3 = 0, \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} = 2\mu c_1.$$

Последние формулы соответствуют формулам (13), (14а), но в (13), (14а) присутствуют ещё постоянные  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ . Для случая изотропии эти постоянные равны нулю.

Рассмотрим область  $V$  в виде прямоугольника  $-l_1 \leq x_1 \leq l_1, -l_2 \leq x_2 \leq l_2$  и отнесём смещения  $u_i$  и  $x_i$  к  $l_i$ :  $u_i/l_i = \tilde{u}_i, x_i/l_i = \tilde{x}_i$ . Тогда коэффициенты в (22), (23) будут безразмерными. Но можно положить  $l_1 = l_2 = 1$  и считать функции  $u_i$  и  $x_i$  безразмерными, т. е. знак « $\sim$ » не писать.

Вектор силовых напряжений  $p_i$  на площадке с нормалью  $n_i$  и вектор моментных напряжений  $m_i$  на этой площадке определяются формулами Коши и в нашем случае записываются

$$p_1 = \sigma_{12} n_2, \quad p_2 = \sigma_{21} n_1, \quad m_3 = \mu_{31} n_1 + \mu_{32} n_2$$

и на границе области  $V$  принимает вид:

$$\begin{aligned}p_1(-1, x_2) = 0, \quad p_2(-1, x_2) = -\sigma_{21}(x_2); \\ p_1(1, x_2) = 0, \quad p_2(1, x_2) = \sigma_{21}(x_2);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1(x_1, -1) &= -\sigma_{12}(x_1), & p_2(x_1, -1) &= 0; \\
p_1(x_1, 1) &= \sigma_{12}(x_1), & p_2(x_1, 1) &= 0; \\
m_3(-1, x_2) &= -\mu_{31}(-1), & m_3(1, x_2) &= \mu_{31}(1), \\
m_3(x_1, -1) &= -\mu_{32}(-1), & m_3(x_1, 1) &= \mu_{32}(1).
\end{aligned} \tag{25}$$

Выражения (25) дают значения усилий и моментов на границе области  $V$ , т. е. такие получаются, если решение вида (22), (23).

Аналогично можно выписать значения смещений (22) на границе области  $V$ :

$$\begin{aligned}
u_1(-1, x_2) &= u_1(x_2), & u_2(-1, x_2) &= u_2(-1); \\
u_1(1, x_2) &= u_1(x_2), & u_2(1, x_2) &= u_2(1); \\
u_1(x_1, -1) &= u_1(-1), & u_2(x_1, -1) &= u_2(x_1); \\
u_1(x_1, 1) &= u_1(1), & u_2(x_1, 1) &= u_2(x_1)
\end{aligned} \tag{26}$$

и значения поворотов  $\omega_3$  [3, 4]. Координаты точек  $a_i \in V_0$  тела до деформации определяются по формуле

$$a_i = x_i - u_i(x_s), \quad x_s \in V$$

или в нашем случае

$$a_1 = x_1 - u_1(x_1, x_2), \quad a_2 = x_2 - u_2(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in V. \tag{27}$$

Например, граница  $x_1 = 1$  была до деформации линией

$$a_1 = 1 - u_1(1, x_2), \quad a_2 = x_2 - u_2(1, x_2), \quad x_1 = 1;$$

далее, учитывая (22), (26), получаем другие линии

$$a_1 = -1 - u_1(-1, x_2), \quad a_2 = x_2 - u_2(-1, x_2), \quad x_1 = -1;$$

$$a_1 = x_1 - u_1(x_1, 1), \quad a_2 = 1 - u_2(x_1, 1), \quad x_2 = 1;$$

$$a_1 = x_1 - u_1(x_1, -1), \quad a_2 = -1 - u_2(x_1, -1), \quad x_2 = -1.$$

Как тело из начального состояния  $V_0$  перешло в конечное состояние  $V$  в рамках статики определить невозможно. Но в конечном состоянии  $V$  тело под действием усилий и моментов (25) находится в равновесии [5].

Если  $u_2(x_1) = 0$ , т. е. постоянные  $k_0, k_1, K_1, K_2$  равны нулю, тогда из (27), (22) имеем

$$x_1 = a_1 + c_0 + c_1 a_2 + C_1 e^{\lambda_1 a_2} + C_2 e^{-\lambda_1 a_2}, \quad x_2 = a_2.$$

Последние формулы соответствуют простому сдвигу с добавлением слагаемых, учитывающих моментность.

Чтобы сравнить решение (22) с классическим решением без моментных напряжений зададим краевые условия для квадрата  $V$  со стороной  $l = 2$ . Кроме условий (24) полагаем, что  $u_2(x_1) = 0$  и  $u_1(-x_2) = -u_1(x_2)$  (это условие тождественно выполняется в классическом решении) и задаём смещение в одной точке, например,  $u_1(1, 1) = 0.1$ , тем самым определяется постоянная  $c_1$ . Выполняя эти требования, получаем, что решение (22) принимает вид

$$u_1(x_2) = c_1 x_2 + \frac{c_1}{2\lambda_1} (e^{-\lambda_1 x_2} - e^{\lambda_1 x_2}) = c_1 \left( x_2 - \frac{1}{\lambda_1} \text{sh}(\lambda_1 x_2) \right), \tag{28}$$

$$c_1 = \frac{1}{10(1 - (1/\lambda_1)\text{sh}\lambda_1)},$$

а напряжения (23) будут следующие:

$$\mu_{32} = \frac{\mu c_1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 x_2} - e^{-\lambda_1 x_2}) = \frac{2\mu c_1}{\lambda_1} \text{sh}(\lambda_1 x_2),$$

$$\sigma_{21}(x_2) = \mu c_1 - \frac{\mu c_1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 x_2} + e^{-\lambda_1 x_2}) = \mu c_1 - \frac{2\mu c_1}{\lambda_1} \text{ch}(\lambda_1 x_2),$$

$$\sigma_{12}(x_1) = \mu c_1.$$

На рис.1 приведены границы квадрата  $V$  в соответствии с решением (28) (сплошные линии) для различных значений  $\lambda_1$ . Пунктирные линии соответствуют классическому решению  $u_1 = c_1 x_2$ ,  $c_1 = 0.1$ . При стремлении  $\lambda_1$  к нулю решение (28) не сходится классическому решению, а стремится к кубической функции  $u_1(x_2) = (1/10)x_2^3 + \dots$ . При больших  $\lambda_1$  деформации локализуются вблизи верхней и нижней граней квадрата.

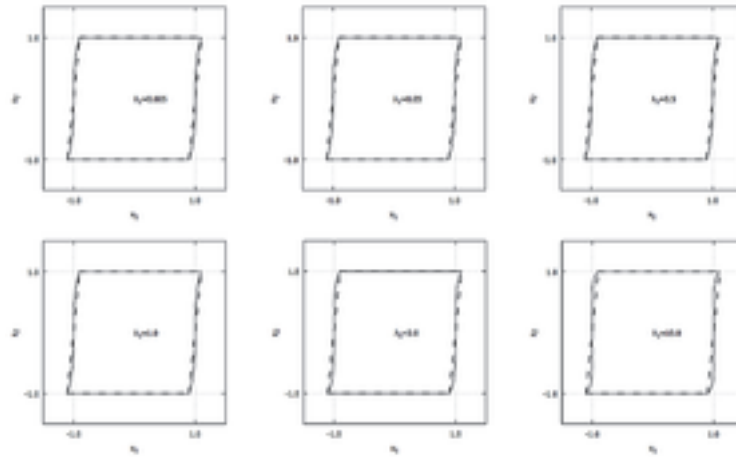


Рис. 1. Сравнение классического решения (пунктирная линия) с решениями (28) (сплошная линия) для различных значений  $\lambda_1$

Кроме условий (24) для решения (22) можно с помощью краевых условий задавать пять постоянных вместо одной в классическом случае. Зададим, например, смещения в двух точках квадрата

$$u_1(1,1) = 0.1, u_2(1,1) = 0.1; u_1(-1,-1) = 0.1 u_2(-1,-1) = 0.1.$$

Выполняя эти условия для решения (22), получим постоянные

$$c_0 = k_0 = \frac{1}{10(1-\text{ch}\lambda_1)}, k_1 = c_1, \quad (29)$$

$$C_1 = K_1 = -\frac{1}{2} \left( c_0 + \frac{c_1}{\text{sh}\lambda_1} \right), C_2 = K_2 = \frac{1}{2} \left( -c_0 + \frac{c_1}{\text{sh}\lambda_1} \right).$$

Постоянная  $c_1$  характеризует сдвиг и остаётся свободным параметром. Форма деформированного квадрата, соответствующая решению (22), (29) при  $\lambda_1 = 1$  в зависимости от параметра  $M = c_1/(e - e^{-1})$  приведена на рис. 2.

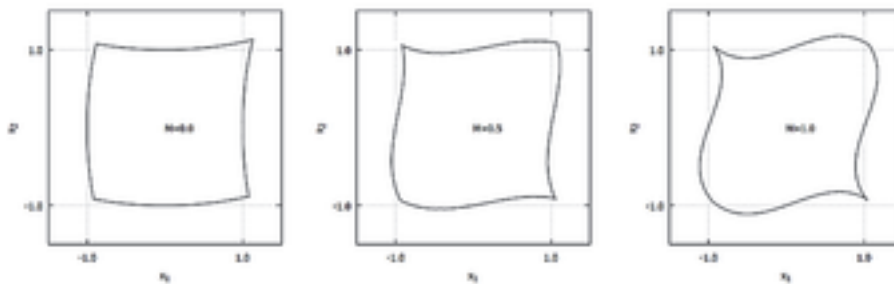


Рис. 2. Форма деформированного квадрата, соответствующая решению (22), (29)

Таким образом, в работе приведён пример полного решения двумерной задачи для случая плоской деформации и стеснённого вращения, когда имеются только сдвиговые напряжения. Для анизотропной и изотропной упругих сред решения оказываются существенно различными.

*Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (код проекта 2.3.1.3.1).*

### Литература

1. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика тверд. тела. 1960. Т. 2, вып. 7. С. 1399–2409;
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. – 872 с.;
3. Морозов Н. Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 182 с.;
4. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. – 256 с.;
5. Дуйшеналиев Т. Б. Неклассические решения механики деформируемого тела. М.: Изд-во МЭИ, 2017. – 400 с.

**Н.С. Бондаренко<sup>1</sup>**

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СЛУЧАЕ ИЗГИБА ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ В РАМКАХ $\{1,0\}$ -АППРОКСИМАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ «ГИПОТЕТИЧЕСКОГО» МОДУЛЯ СДВИГА**

<sup>1</sup>ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», Донецк

**Введение.** Тонкостенные элементы конструкций, изготовленные из анизотропных материалов, широко применяются в современном машиностроении и промышленности. Исследование поведения таких элементов в ответ на силовые воздействия является неотъемлемым этапом проектирования. Дополнительные сложности в проведение прочностных расчётов вносит сосредоточенный или локальный характер таких воздействий.

Об актуальности решения задач теории пластин и оболочек, подверженных действию сосредоточенных и локальных сил, свидетельствует ряд публикаций последних лет.

В статье П. Г. Великанова, Д. М. Халитовой [1] рассматривается применение непрямого метода граничных элементов для решения задачи нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек. Так как ядра системы сингулярных интегральных уравнений, к которым сводится решение задачи, выражаются через фундаментальное решение и его производные, то, прежде всего, в статье приводится методика определения фундаментальных решений задачи изгиба и плоского напряжённого состояния анизотропной пластины. Рассматриваются малые деформации тонкой линейно-упругой анизотропной пластинки



и оболочки, деформирование которой описывается моделью, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява в рамках теории среднего изгиба. Решение аналогичной задачи для случая изгиба анизотропных пластин сложной формы рассмотрено в статье П. Г. Великанова, Ю. П. Артюхина, Н. И. Куканова [2], а для изгиба ортотропных пластин – в статье А. П. Грибова, П. Г. Великанова [3].

Публикация Р. А. Сабирова [4] посвящена исследованию задачи о продольно-поперечном деформировании и прочности ортотропной плиты от действия локальной поперечной силы и растяжения по контуру мембранных усилий, а также определению направления укладки волокна однонаправленного композита, обеспечивающее наименьший уровень напряжения и прогиба.

Поскольку классическая теория пластин не позволяет учесть явления, обусловленные поперечными сдвигами и обжатием, исследования напряжённо-деформированного состояния (НДС) пластин с концентраторами напряжений, основанные на уточнённых теориях, является актуальной научной и технической проблемой. Так, в статьях И. П. Бокова, Е. А. Стрельниковой [5, 6] построено фундаментальное решение уравнений статики для изотропных и трансверсально-изотропных пластин при действии сосредоточенных силовых воздействий. Чтобы построить двумерные уравнения теории упругости, применён метод разложений перемещений, напряжений и деформаций в ряды Фурье по полиномам Лежандра от поперечной координаты.

Целью данной работы является нахождение обобщённых перемещений, представляющих собой фундаментальное решение уравнений статики для случая изгиба ортотропной пластины при наличии «гипотетического» модуля сдвига. Рассмотрена обобщённая теория пластин в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации, основанная на методе И. Н. Векуа разложения искомых и заданных функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра от поперечной координаты [7]. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в статье [8], посвящённой построению фундаментального решения задачи статики для случая безмоментного напряжённого состояния ортотропной пластины на базе обобщённой теории в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации.

**Постановка задачи.** Рассмотрим ортотропную пластину толщины  $2h$ , отнесённую к прямоугольной декартовой системе безразмерных координат  $x_1, x_2, x_3$ . На пластину действует сосредоточенная сила, приложенная в начале координат.

Компоненты НДС пластины будем определять на базе обобщённой теории пластин в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации [7]. В рамках данного подхода компоненты вектора перемещений, тензора напряжений и вектора объёмной силы представляются в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра от толщинной координаты  $x_3$ . Разрешающая система дифференциальных уравнений, описывающая напряжённое состояние при изгибе, приведена в монографии [7]. Из геометрических соотношений, уравнений упругости и уравнений равновесия, приведённых в [7], следует система уравнений равновесия в перемещениях

$$\begin{aligned} L_{11}^* \gamma_1 + L_{12}^* \gamma_2 + L_{13}^* w_0 &= -m_1^* \delta(x_1, x_2); & L_{21}^* \gamma_1 + L_{22}^* \gamma_2 + L_{23}^* w_0 &= -m_2^* \delta(x_1, x_2); \\ L_{31}^* \gamma_1 + L_{32}^* \gamma_2 + L_{33}^* w_0 &= q^* \delta(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, w_0$  – обобщённые перемещения, представляющие собой коэффициенты разложений компонент вектора перемещений в ряды по полиномам Лежандра, причём  $\gamma_1, \gamma_2$  являются аналогами углов поворота нормали;  $w_0$  – аналог прогиба;  $\delta(x_1, x_2)$  – двумерная дельта-функция Дирака;  $m_i^* = \text{const}$ ;  $q^* = \text{const}$ ;  $L_{ij}^*$  – дифференциальные операторы второго порядка

$$L_{11}^* = D_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \Lambda_1; \quad L_{12}^* = L_{21}^* = (v_{21} D_1 + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad L_{13}^* = L_{31}^* = -\Lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1};$$

$$L_{22}^* = D_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \Lambda_2; \quad L_{23}^* = L_{32}^* = -\Lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad L_{33}^* = -\left( \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right);$$

$$D_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{1}{1 - v_{12} v_{21}}; \quad D_2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{1}{1 - v_{12} v_{21}}; \quad D_{12} = \frac{2G_{12}}{3E};$$

$$\Lambda_1 = \frac{5G_{13}}{3E}; \quad \Lambda_2 = \frac{5G_{23}}{3E}; \quad E = \sqrt{E_1 E_2};$$

$E_1, E_2$  – модули Юнга для растяжения (сжатия) вдоль главных направлений упругости  $x_1$  и  $x_2$ ;  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – модули сдвига, характеризующие изменение углов между главными направлениями  $x_1$  и  $x_2$ ;  $x_1$  и  $x_3$ ;  $x_2$  и  $x_3$ ;  $v_{12}, v_{21}, v_{13}, v_{31}, v_{23}, v_{32}$  – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечные изменения.

Между упругими постоянными ортотропного материала существует зависимость  $E_2 v_{12} = E_1 v_{21}$ .

В работах Ю.П. Артюхина [9, 10] с целью упрощения исходных дифференциальных уравнений, а, следовательно, и вида их решений, вводится так называемый «гипотетический» модуль сдвига

$$G_{12} = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{v_{12} v_{21}})}, \quad (2)$$

т. е. имеет место «приведённая» ортотропия.

Статьи Н. В. Дергачёвой [11, 12] посвящены исследованию возможности применения модели «приведённой» ортотропии при расчётах НДС ортотропных оболочек, подверженных локальным тепловым воздействиям, на базе классической теории. Как показывают исследования, приведённые в [11, 12] в ряде случаев использование «приведённого» модуля сдвига (2) оправдано, но, к сожалению, не всегда.

При проведении дальнейших преобразований, предполагаем, что имеет место соотношение (2).

**Методика решения задачи.** Применим к системе (1) двумерное интегральное преобразование Фурье [13]

$$\begin{bmatrix} D_1\xi_1^2 + D_{12}\xi_2^2 + \Lambda_1 & (v_{21}D_1 + D_{12})\xi_1\xi_2 & -i\Lambda_1\xi_1 \\ (v_{21}D_1 + D_{12})\xi_1\xi_2 & D_{12}\xi_1^2 + D_2\xi_2^2 + \Lambda_2 & -i\Lambda_2\xi_2 \\ -i\Lambda_1\xi_1 & -i\Lambda_2\xi_2 & -\Lambda_1\xi_1^2 - \Lambda_2\xi_2^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 \\ \tilde{\gamma}_2 \\ \tilde{w}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} m_1^* \\ m_2^* \\ -q^* \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $\xi_1, \xi_2$  – координаты точки в пространстве трансформант;  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{w}_0$  – трансформанты обобщённых перемещений.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (3) имеет вид:

$$\tilde{\gamma}_1 = \sum_{k=0}^{11} \alpha_{1k} \tilde{\Psi}_k; \quad \tilde{\gamma}_2 = \sum_{k=0}^{11} \alpha_{2k} \tilde{\Psi}_k; \quad \tilde{w}_0 = \sum_{k=0}^{11} \alpha_{3k} \tilde{\Psi}_k, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_0 &= \frac{1}{\Delta_1}; & \tilde{\Psi}_1 &= \frac{1}{\Delta_2}; & \tilde{\Psi}_2 &= \frac{i\eta_1}{\Delta_2}; & \tilde{\Psi}_3 &= \frac{i\eta_2}{\Delta_2}; & \tilde{\Psi}_4 &= \frac{\eta_1^2}{\Delta_2}; & \tilde{\Psi}_5 &= \frac{\eta_2^2}{\Delta_2}; \\ \tilde{\Psi}_6 &= \frac{\eta_1\eta_2}{\Delta_2}; & \tilde{\Psi}_7 &= \frac{\eta_1^2}{\Delta_1\Delta_2}; & \tilde{\Psi}_8 &= \frac{\eta_2^2}{\Delta_1\Delta_2}; & \tilde{\Psi}_9 &= \frac{\eta_1\eta_2}{\Delta_1\Delta_2}; & \tilde{\Psi}_{10} &= \frac{i\eta_1^2\eta_2}{\Delta_1\Delta_2}; \\ \tilde{\Psi}_{11} &= \frac{i\eta_1\eta_2^2}{\Delta_1\Delta_2}; & \Delta_1 &= \eta_1^2 + \eta_2^2 + A_0^2; & \Delta_2 &= \left( \sqrt{A_1}\eta_1^2 + \sqrt{A_2}\eta_2^2 \right)^2; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\eta_1 = \sqrt{\Lambda_1}\xi_1; \quad \eta_2 = \sqrt{\Lambda_2}\xi_2; \quad A_0^2 = \frac{\Lambda_1\Lambda_2}{D_{12}}; \quad A_1 = \frac{D_1}{\Lambda_1^2}; \quad A_2 = \frac{D_2}{\Lambda_2^2};$$

$\alpha_{ik}$  – коэффициенты, зависящие от упругих констант ортотропного материала.

Применим к соотношениям (4) формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье [13], тогда оригиналы обобщённых перемещений примут вид

$$\gamma_1 = \sum_{k=0}^{11} \alpha_{1k} \Psi_k; \quad \gamma_2 = \sum_{k=0}^{11} \alpha_{2k} \Psi_k; \quad w_0 = \sum_{k=0}^{11} \alpha_{3k} \Psi_k. \quad (6)$$

Методику нахождения оригиналов функций (5) продемонстрируем на примере функций  $\tilde{\Psi}_6$  и  $\tilde{\Psi}_9$ . В результате применения обратного двумерного преобразования Фурье к трансформанте  $\tilde{\Psi}_6$  и выделения в получившихся интегралах чётных и нечётных частей, получим

$$\Psi_6 = -\frac{2}{\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2A_1A_2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\zeta_1\zeta_2 \sin \zeta_1 z_1 \sin \zeta_2 z_2}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (7)$$

где

$$\zeta_1 = \sqrt[4]{A_1}\eta_1; \quad \zeta_2 = \sqrt[4]{A_2}\eta_2; \quad z_1 = \frac{y_1}{\sqrt[4]{A_1}}; \quad z_2 = \frac{y_2}{\sqrt[4]{A_2}}.$$

Перейдём в (7) к полярным координатам по формулам

$$z_1 = r \cos \varphi; \quad z_2 = r \sin \varphi; \quad \zeta_1 = \rho \cos \theta; \quad \zeta_2 = \rho \sin \theta.$$

Применяя разложение Якоби-Ангера [14]

$$\sin(x \cos \varphi \cos \theta) \sin(x \sin \varphi \sin \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n}(x) \sin 2n\varphi \sin 2n\theta \quad (8)$$

и учитывая значения интеграла от тригонометрических функций

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \sin 2n\theta d\theta = \begin{cases} \pi/8, n=1; \\ 0, n=2, 3, \dots, \end{cases}$$

преобразуем выражение (7) к виду

$$\Psi_6 = -\frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2 A_1 A_2}} \int_0^{\infty} \frac{J_2(r\rho)}{\rho} d\rho,$$

откуда в соответствии с [15] находим

$$\Psi_6 = -\frac{\sin 2\varphi}{4\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2 A_1 A_2}}.$$

Аналогично, применяя к трансформанте  $\tilde{\Psi}_9$  формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье, получим

$$\Psi_9 = -\frac{2}{\pi\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\eta_1 \eta_2 \sin \eta_1 y_1 \sin \eta_2 y_2}{(\eta_1^2 + \eta_2^2 + A_0^2)(\sqrt{A_1} \eta_1^2 + \sqrt{A_2} \eta_2^2)^2} d\eta_1 d\eta_2, \quad (9)$$

где

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{\Lambda_1}}; \quad y_2 = \frac{x_2}{\sqrt{\Lambda_2}}.$$

Перейдём в (9) к полярным координатам по формулам

$$y_1 = r_0 \cos \varphi_0; \quad y_2 = r_0 \sin \varphi_0; \quad \eta_1 = \rho \cos \theta; \quad \eta_2 = \rho \sin \theta.$$

Применяя разложение Якоби-Ангера (8), представим (9) в виде

$$\Psi_9 = -\frac{2}{\pi\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin 2n\varphi_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta \sin 2n\theta d\theta}{(\sqrt{A_1} \cos^2 \theta + \sqrt{A_2} \sin^2 \theta)^2} \int_0^{\infty} \frac{J_{2n}(r_0\rho) d\rho}{\rho(\rho^2 + A_0^2)}.$$

Сравнивая интегралы, входящие в выражение для  $\Psi_9$  с интегральным представлением специальной  $G$ -функции [14]

$$G_{n,\nu}(rz) = (-1)^n \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu-n} \int_0^{\infty} \frac{\rho^{\nu-n+1} J_{\nu+n}(r\rho)}{\rho^2 + z^2} d\rho,$$

$$r > 0; \quad \operatorname{Re} z > 0; \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < n + \frac{3}{2},$$

заметим, что

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{2n}(r_0\rho)}{\rho(\rho^2 + A_0^2)} d\rho = (-1)^{n+1} \frac{r_0^2}{4} G_{n+1, n-1}(A_0 r_0) \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Тогда функция  $\Psi_9$  примет вид

$$\Psi_9 = -\frac{r_0^2}{2\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sin 2n\varphi_0 G_{n+1,n-1}(A_0 r_0),$$

где

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta \sin 2n\theta d\theta}{\left(\sqrt{A_1} \cos^2 \theta + \sqrt{A_2} \sin^2 \theta\right)^2}. \quad (10)$$

**Анализ результатов численных исследований.** Для исследования влияния упругих констант на компоненты НДС ортотропной пластины, определяемых формулами (6), при действии сосредоточенных силовых воздействий зафиксированы такие значения коэффициентов:  $m_1^* = m_2^* = q^* = 1$

$$(x_2 = 0).$$

Все численные исследования были проведены для таких материалов:

- 1) изотропный стеклопластик (материал М1, кривые 1);
- 2) стеклопластик косоугольной намотки (материал М2). Значения термомеханических параметров [16] приведены в таблице 1.

Таблица 1

Упругие постоянные материалов

Параметр	$E_1$ , МПа	$E_2$ , МПа	$G_{12}$ , МПа	$\nu_{12}$
М1	1 000	1 000	282	0,077
М2	1 000	357,1	370	0,275

При вычислении интегралов (10) использовался метод численного интегрирования Файлона.

Цифрой 1 на рис. 1–3 обозначены кривые для изотропного материала М1, цифрой 2 – для ортотропного материала М2, причём предполагалось, что имеет место модель материала с «приведённой» ортотропией (2), а модули сдвига  $G_{13}$  и  $G_{23}$  брались равными  $G_{12}$  из таблицы 1. Построенные графики хорошо согласуются с графиками обобщённых перемещений, найденных в рамках  $\{1,0\}$ -аппроксимации в диссертации И. П. Бокова [17] для изотропной пластины.

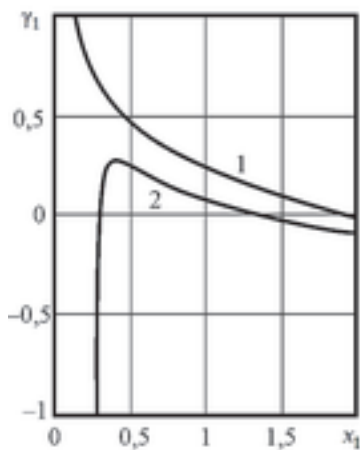


Рис. 1. Обобщённое перемещение  $\gamma_1$

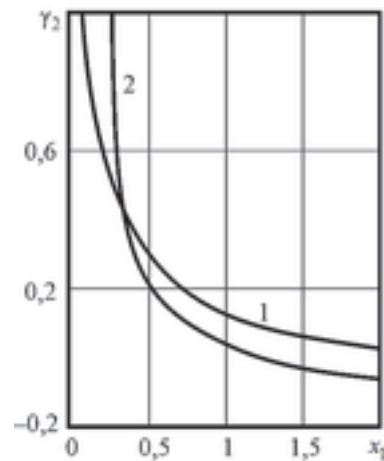


Рис. 2. Обобщённое перемещение  $\gamma_2$

**Выводы.** Обобщая полученные результаты, можно сделать вывод о том, что при расчёте НДС ортотропных пластин на базе обобщённой теории в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации, применив двумерное интегральное преобразование Фурье и методику обращения, основанную на применении специальной G-функции, можно найти фундаментальное решение в аналитическом виде. На основе полученного решения можно не только проводить численные исследования компонент НДС, но и использовать полученные результаты для решений задач о локальных силовых воздействиях. Помимо этого, было установлено, что влияние ортотропии материала на величину обобщённых перемещений значительное.

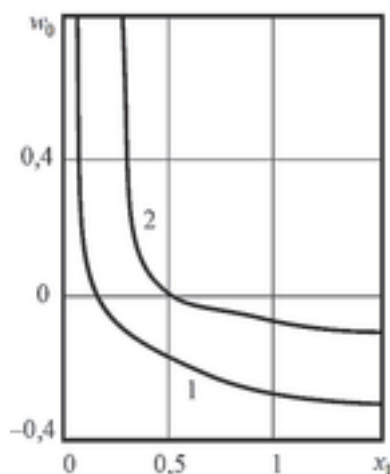


Рис. 3. Обобщённое перемещение  $w_0$

### Литература

1. Великанов П.Г., Халитова Д.М. Решение задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек методом граничных элементов // Вестник Самарского университета. Естественная серия, 2021, Т. 27, № 2, С. 48–61;
2. Великанов П.Г., Артюхин Ю.П., Куканов Н.И. Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов // Актуальные проблемы механики сплошных сред. – Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2020. – С. 105–111;
3. Грибов А.П., Великанов П.Г. Применение преобразования Фурье для получения фундаментального решения задачи изгиба ортотропной пластины // Мат. моделирование и краевые задачи, ч. 3. – Самара: СамГТУ, 2004. – С. 67–71;
4. Sabirov R.A. Compound bending of an orthotropic plate // Siberian Journal of Science and Technology, 2020, Vol. 21, No. 4, P. 499–513;
5. Боков И.П., Стрельникова Е.А. Двумерные уравнения теории упругости для изотропных пластин // Вестник Херсонского национального технического университета, 2015, Вып. 3 (54), С. 21–26;
6. Bokov I., Strelnikova E. Fundamental solution of static equations of transversely isotropic plates // International Journal of Innovative Research in Engineering & Management, 2015, Vol. 2, Issue-6, P. 56–62;
7. Пелех Б.Л., Лазько В.А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с.;

8. Бондаренко Н.С. Определение обобщённых перемещений в ортотропной пластине при действии сосредоточенной силы на базе  $\{1,0\}$ -аппроксимации // Труды МФТИ, 2021, Т. 13, № 1, С. 89–95;
9. Артюхин Ю.П. Расчет однослойных и многослойных ортотропных оболочек на локальные нагрузки // Исслед. по теор. пластин и оболочек, 1966, Вып. 4, С. 91–110;
10. Артюхин Ю.П., Великанов П.Г. Фундаментальное решение задачи изгиба ортотропной пластины, лежащей на упругом основании типа Винклера // В сборнике: Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Третьей Всероссийской научной конференции, 2006, С. 51–54;
11. Дергачева Н. В. Исследование термоупругих усилий и моментов при локальном тепловом нагреве ортотропной оболочки // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А, 2010, Вип. 2, С. 71–76;
12. Дергачева Н. В. Исследование термоупругого состояния ортотропных оболочек при локальном тепловом нагреве // Теоретическая и прикладная механика, 2008, Вып. 44, С. 180–186;
13. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Издательство иностранной литературы, 1955. – 668 с.;
14. Хижняк В.К., Шевченко В.П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.;
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.;
16. Справочник по композиционным материалам: В 2 кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.;
17. Боков І.П. Напружено-деформований стан трансверсально-ізотропних пластин за зосереджених та локальних силових впливів: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04. – Дніпро, 2019. – 204 с.

**Д.А. Чернышов<sup>1</sup>, А.В. Ковалев<sup>1,2</sup>**

## **ВЛИЯНИЕ ВЫБОРА ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ НА ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИЕ СПЛОШНОГО ШАРА СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ**

<sup>1</sup>*Воронежский государственный университет, Воронеж*

<sup>2</sup>*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж*

Рассмотрению различных реологических моделей сплошных сред посвящено большое количество работ [0-0]. Значительная часть из них имеет своей целью определение влияния выбора условия пластичности на деформирование тела. Отдельной областью исследований является рассмотрение в рамках одной задачи сразу нескольких механизмов деформирования: упругого, пластического, вязкого и др. Введение в модель фактора вязкости, согласно [0], наделяет ее свойствами внутренней неконсервативности, что приводит к возникновению дополнительных вычислительных сложностей. В [0] был предложен подход к решению задач с учетом вязких свойств материала, предел текучести которого

линейно зависит от температуры. В данной работе рассматривается более общий случай – полиномиальный вид зависимости.

Постановка задачи, аналогичная рассматриваемой, приводилась в [0, 0]. Поверхность сплошного шара радиуса  $R$  подвержена равномерному нагреву со стороны окружающей среды, температура которой равна  $T_m$ , таким образом, что в каждый момент выполнено условие

$$\frac{T(R,t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - e^{-xt}, \quad (19)$$

где  $T(r,t)$  – распределение температуры шара по радиусу;  $r$  – длина радиус-вектора точки;  $t$  – время;  $x$  – скорость нагрева поверхности;  $T_0$  – начальная температура тела. Массовыми и поверхностными силами пренебрегают. Требуется определить напряженно-деформированное состояние шара.

Уравнение теплопроводности в случае сферической симметрии вместе с граничными условиями имеет вид

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \vartheta \left( \frac{2}{r} \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} \right)$$

$$T(r,0) = T_0$$

$$\frac{T(R,t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - e^{-xt}$$

$$T(0,t) \neq \infty$$
(20)

Здесь  $\vartheta$  – коэффициент температуропроводности.

Следуя [0], решение (20) в безразмерных переменных имеет вид

$$\Theta(\xi,t) = \frac{T(\xi,t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - e^{-xt} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \frac{x}{x - \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2}} \left[ e^{-\frac{\pi^2 n^2}{R^2} \vartheta t} - e^{-xt} \right], \quad (21)$$

где  $\xi = r/R$  — безразмерный радиус.

Для случая сферической симметрии полная система уравнений механики твердого тела может быть записана в виде

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (22)$$

$$\left| (\sigma_r - c e_r^p - \eta \dot{e}_r^p) - (\sigma_\varphi - c e_\varphi^p - \eta \dot{e}_\varphi^p) \right| = 2k(r,t) \quad (23)$$

$$e_r^p + 2e_\varphi^p = 0 \quad (24)$$

$$\sigma_r = \lambda (e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_r^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta(r,t) \quad (25)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \lambda (e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_\varphi^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta(r,t)$$

$$e_r^e + e_r^p = e_r = u_{r,r}$$

$$e_\varphi^e + e_\varphi^p = e_\theta^e + e_\theta^p = e_\varphi = e_\theta = \frac{u_r}{r} \quad (26)$$



где  $r, \varphi, \theta$

$k(r, t)$  – предел текучести;  $e_r^e, e_\varphi^e, e_\theta^e$  – компоненты тензора упругих деформаций;  $e_r^p, e_\varphi^p, e_\theta^p$  – компоненты тензора пластических деформаций;  $e_r, e_\varphi, e_\theta$  – компоненты тензора полных деформаций;  $u_r$  – радиальная компонента перемещений;  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе;

$$\Delta(r, t) = \alpha(T(r, t) - T_0),$$

$\alpha$  – коэффициент температурного расширения.

В отличие от [0], где дальнейшее рассмотрение проводилось только на основании вида решения (21), в данной работе учитывается вид зависимости предела текучести от температуры. Было выдвинуто предположение о полиномиальной форме зависимости:

$$k(r, t) = k_0 \sum_{l=0}^m \beta_l \Delta^l(r, t), \quad (27)$$

где  $\beta_0 = 1$ ;  $\beta_l, l = \overline{1, m}$  – некоторые коэффициенты.

Очевидно, что

$$\Delta(r, t) = \Delta_m \Theta\left(\frac{r}{R}, t\right), \quad (28)$$

где  $\Delta_m = \alpha(T_m - T_0)$ . Тогда (27) с учетом (21) примет вид

$$k(r, t) = k_0 \sum_{l=0}^m \beta_l \Delta_m^l \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \Theta[n, 1](r) \cdot e^{-h[n, 1]t} - \Theta[n, 2](r) \cdot e^{-h[n, 2]t} \right) \right]^l, \quad (29)$$

где  $h[n, 1] = \frac{\pi^2 n^2}{R^2} \vartheta$ ,  $h[n, 2] = x$ . Здесь и далее в квадратных скобках будут записываться индексы членов ряда.

После преобразования (29) было получено

$$k(r, t) = k_0 \sum_{l=0}^m \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \beta_l \Delta_m^l \prod_{q=1}^l \Theta[n_q, j](r) e^{-h[n_q, j]t} \right\} \quad (30)$$

Суммирование по  $n_1, n_2, \dots, n_l$  ведется в том смысле, что при  $l=0$  выражение в фигурных скобках равно 1.

Таким образом, с учетом вида зависимостей (21) и (30) отыскание неизвестных величин будет проводиться в форме

$$F(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 F[n, j](r) e^{-h[n, j]t} + \sum_{l=2}^m \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 F[l, n_1, n_2, \dots, n_l, j](r) \prod_{q=1}^l e^{-h[n_q, j]t} \quad (31)$$

где  $F$  – искомая величина. Суммирование по  $l$  во втором слагаемом ведется в том смысле, что при  $m < 2$  оно равно 0.

Очевидно, что каждое из уравнений (22)-(26) может быть сведено к виду, аналогичному (31). Уравнения (23) и (25) примут вид (32) и (33), и для всех членов полученных сумм будет справедлива система (22), (24), (26), (32), (33).

$$\left| \left( \sigma_r - (c - \eta \bar{h}) e_r^p \right) - \left( \sigma_\varphi - (c - \eta \bar{h}) e_\varphi^p \right) \right| = 2k(r) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_r^e - (3\lambda + 2\mu)\Delta(r) \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta = \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_\varphi^e - (3\lambda + 2\mu)\Delta(r) \end{aligned} \quad (33)$$

Для удобства здесь и далее индексы были опущены. В (32) величина  $\bar{h}$  принимается равной не только отдельным коэффициентам  $h[n, j]$  из первого слагаемого в соотношении (31), но и суммам их произведений во второго слагаемого.

Система уравнений (22), (24), (26), (32), (33) совпадает с системой, приведенной в [0], с точностью до индексов членов ряда. Следовательно, аналитический вид решения для каждого из членов рядов, соответствующих компонентам напряжений и перемещений, также будет совпадать с полученным в [0].

Дальнейшее рассмотрение проводилось для случая, когда в теле последовательно развиваются следующие состояния: идеально упругое деформирование; возникновение (момент времени  $t = t_p$ ) и развитие области пластического течения; возникновение зоны разгрузки (момент времени  $t = t_u$ ); вырождение пластической зоны в теле (момент времени  $t = t_k$ ); возникновение (момент времени  $t = t_r$ ) и развитие области повторной пластичности; завершение процесса деформирования при полном нагреве (момент времени  $t = t_m$ ).

Поскольку процесс является неустановившимся, упругопластические границы раздела зон, возникающие в теле, находятся в движении от поверхности к центру шара вплоть до своих предельных положений.

Положение границы  $a(t)$ , разделяющей упругую и пластическую зоны может быть определено из эквивалентных условий равенства нулю на ней пластических деформаций, непрерывности окружной компоненты напряжений или выполнения условия пластичности для напряжений из упругой области.

Положение границы ( )

$c t)$ , разделяющей область разгрузки и зону повторной пластичности, следует из равенства на ней старой и новой пластических деформаций.

В качестве примера было проведено сравнение материалов с постоянным, линейным и квадратичным пределами текучести. Величины, относящиеся к указанным случаям, имеют верхние индексы *const*, *I* и *II*. Параметры  $\beta_l, l = \overline{2, m}$  подбирались таким образом, чтобы было выполнено условие

$$0 \leq \sum_{l=0}^m \beta_l \Delta_m \leq 1 \quad (34)$$

и  $k(r, t)$  оставалась монотонно убывающей функцией температуры.

Моменты зарождения областей с отличающимися реологическими свойствами приведены в табл. 1.

Анализ показал, что при прочих одинаковых физико-механических свойствах материалов выбор предела текучести оказывает существенное влияние на скорость деформирования сплошного шара. Распределение приведенных остаточных напряжений в теле после полного нагрева и последующего его охлаждения до начальной температуры представлено на рис.1. Нетрудно заметить, что все три случая отличаются друг от друга не только интенсивностью возникающих напряжений, но и глубиной проникания областей вглубь шара. Аналогичный вывод можно сделать, анализируя рис.2, демонстрирующий изменение положения упругопластических границ  $a(t)$  и  $b(t)$  во времени вплоть до момента вырождения зоны пластичности.

Таким образом, в работе было получено обобщение решения, приведенного в [0], на случай полиномиальной зависимости предела текучести от температуры.

Таблица 1

Значения моментов возникновения зон (в секундах)

Момент времени	Вид предела текучести		
	<i>const</i>	<i>I</i>	<i>II</i>
$t_p$	0,41298	0,35202	0,34730
$t_u$	2,85907	3,05806	3,18484
$t_r$	43,33826	11,82847	6,86689
$t_k$	14,59790	25,38286	31,83741

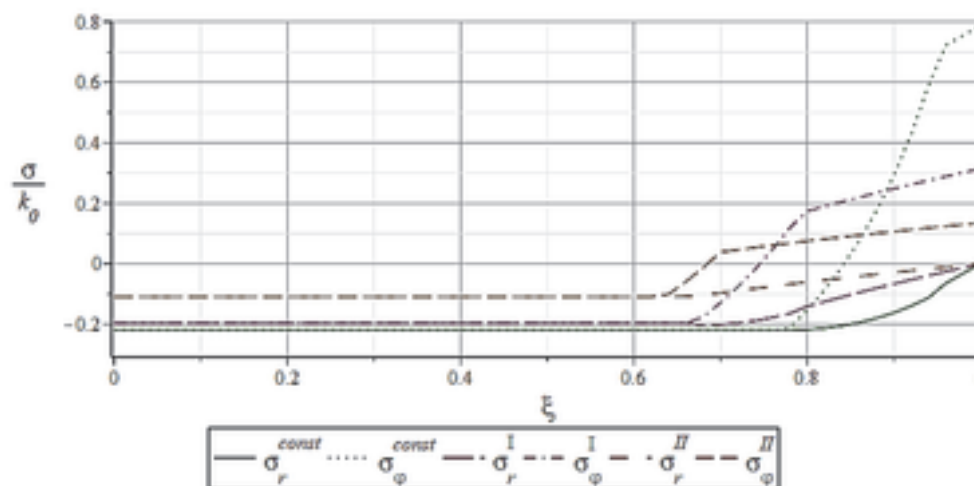


Рис. 1. Распределение остаточных напряжений

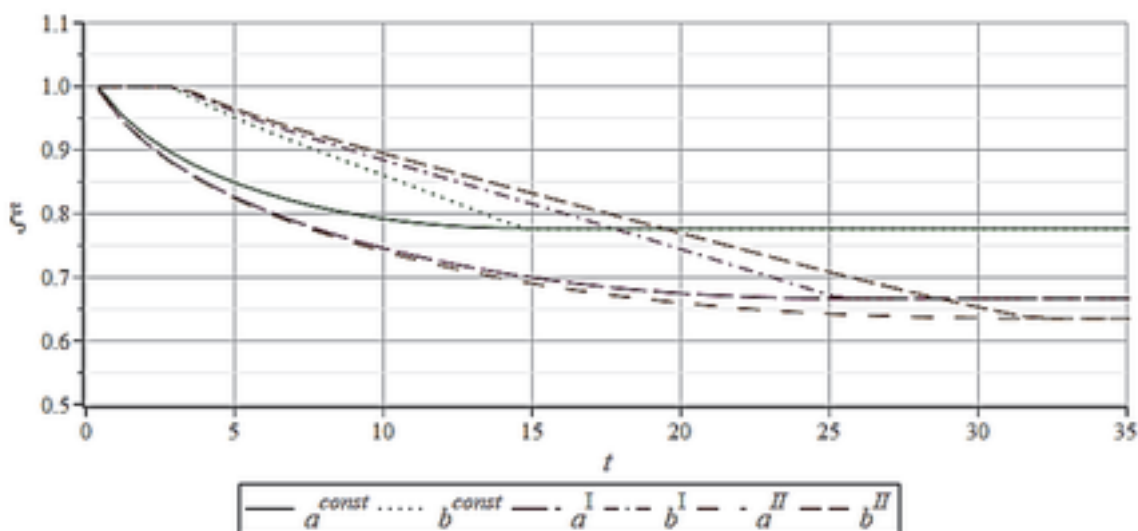


Рис. 2. Зависимость положения упругопластических границ от времени

Анализ численных значений позволил сделать следующие выводы:

- Введение в модель зависимости предела текучести от температуры приводит к изменению скорости деформирования и времени, необходимого на зарождение и развитие областей с отличающимися свойствами.
- Глубина проникания областей вглубь шара может существенно изменяться (в частности, увеличиваться) с введением дополнительных слагаемых в полином.
- Следствием уменьшения предела текучести по мере роста температуры является снижение остаточных напряжений по абсолютной величине.

### Литература

1. Спорыхин А.Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: ВГУ. 1997. 361 с.;
2. Чернышов Д.А., Ковалев А.В. / Термодеформирование тела со сложной реологией в условиях сферической симметрии. – Москва: Изв. РАН. МТТ. 2022. № 4. С. 70–84;
3. Дац Е.П. Неустановившиеся температурные напряжения в условиях зависимости предела текучести от температуры: дис. канд. физ.-мат. наук. – Владивосток, 2017. – с. 23–48;
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.;
5. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения : пер. с нем. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.;
6. Спорыхин А.Н., Ковалев А.В., Щеглова Ю.Д. Неодномерные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: ВГУ, 2004. 218 с.;
7. Буренин А.А, Ковтанюк Л.В., Лушпей А.В. Переходный процесс торможения прямолинейного вязкопластического течения при мгновенном снятии нагружающих усилий / Прикладная математика и механика. 2009. №4. С. 663–669;
8. Карташов Э. М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1979. 415 с.

## НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНОГО КОМПОЗИТНОГО БЕТОННОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск

<sup>3</sup>Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары

В данной работе будем рассматривать бетонные стержни, где различные марки бетонов могут располагаться либо по толщине стержне с одним и тем же поперечным сечением вдоль всей его длины (рис. 1а, рис. 2а), либо с различными параметрами поперечных сечений и разными фазовыми материалами на участках стержня вдоль его длины (рис. 1б, рис. 2б). Будем считать, что все рассматриваемые стержни являются идеальными с точки зрения деформирования конструкциями, где происходит непрерывное вдоль оси деформирование всех фазовых материалов, без взаимных проскальзываний и отрывов. В рассматриваемых задачах будем полагать, что все составляющие фазовые материалы подчиняются единообразным сходственным диаграммам деформирования от начала нагружения и до разрушения. При этом будем учитывать в разрабатываемых модельных расчетных схемах, наблюдаемое практически при всех испытаниях и при эксплуатации конструкций из бетона, что их деформирование носит нелинейную зависимость [1-4]. Примем, как это обычно принимается при расчете стержневых конструкций, что размеры поперечного сечения исследуемых гибридных конструкций существенно меньше их продольных размеров.

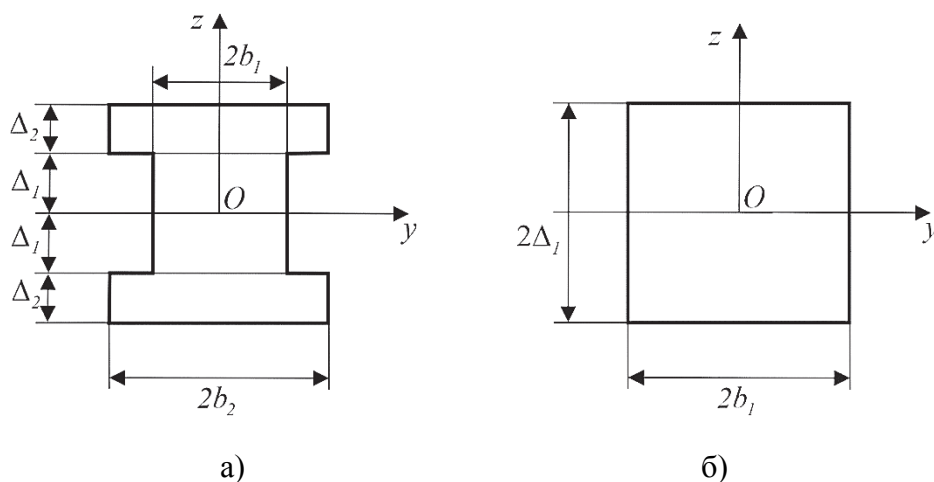


Рис. 1. Поперечное сечение стержня

Будем считать, что стержень длины  $l$  закреплен с одного конца, а с другой растягивается усилием  $P$ . В рассматриваемых задачах будем рассматривать следующую систему координат: ось  $Ox$  направим вдоль центральной оси стержня, ось  $Oz$  направим вертикально вверх, начало координат  $O$  поместим в центр грани левого конца стержня (рис.2).

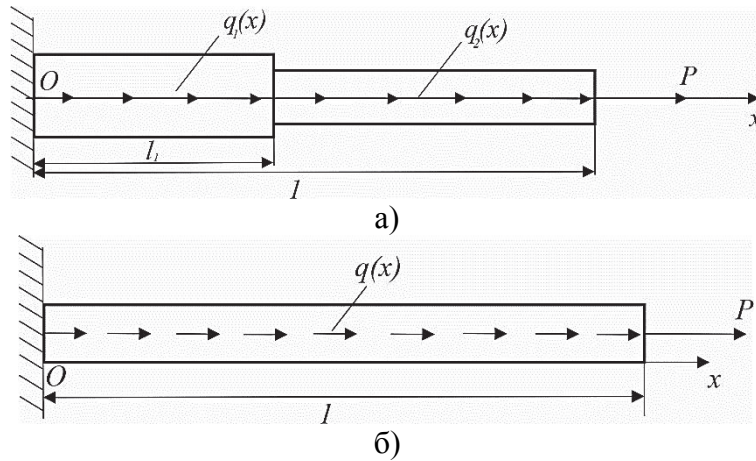


Рис. 2. Защемленный с одного конца стержень

Положим, что  $\sigma_*^+$ ,  $-\sigma_*^-$ ,  $\varepsilon_*^+$ ,  $-\varepsilon_*^-$ ,  $\varepsilon_0^+$ ,  $-\varepsilon_0^-$ ,  $E^+$ ,  $E^-$  – пределы прочности бетона, предельные деформации упрочнения, предельные упругие деформации, модули упругости бетона при растяжении и сжатии, соответственно.

Перейдем к безразмерным величинам

$$\tilde{\sigma}_*^+ = \frac{\sigma_*^+}{\sigma_{1*}^+}, \quad \tilde{\sigma}_0^+ = \frac{\sigma_0^+}{\sigma_{1*}^+}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_{1*}^+}, \quad \tilde{E} = \frac{E}{\sigma_{1*}^+}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{l^2 \sigma_{1*}^+}, \quad \tilde{q} = \frac{q}{l \sigma_{1*}^+}, \quad \tilde{N} = \frac{N}{l^2 \sigma_{1*}^+},$$

$$\tilde{l} = 1, \quad \tilde{l}_1 = \frac{l_1}{l}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{l}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\Delta}{l}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_1},$$

где обезмеривающие величины:  $\sigma_{1*}^-$  – величина предела прочности по модулю при сжатии бетона марки В10,  $l$  – длина стержня,  $\rho_1$  – плотность бетона марки В10;  $P$  – величина точечной нагрузки,  $q$  – величина распределенной нагрузки,  $N$  – величина продольного усилия,  $\rho$  – безразмерная плотность бетона.

Под действием распределенной нагрузки  $q$  действующей на стержень будем понимать результат действия силы тяжести, причем будем полагать, что она направлена вдоль оси стержня. В дальнейших расчетах будем использовать безразмерные величины, если это не оговорено специально и надстрочный индекс «~» во всех формулах и обозначениях будем опускать.

В качестве материалов стержня будем рассматривать бетоны марок В10, В30, В50 с физическими параметрами из таблицы 1.

Таблица 1

Значения физических параметров бетонов

Марка бетона	$\sigma_0^+$	$\sigma_*^+$	$\varepsilon_0^+, 10^{-2}$	$\varepsilon_*^+, 10^{-2}$	$E^+$	$A_{1i}^{3+}$	$A_{3i}^{3+}$	$\rho$
В10	0,09	0,11	0,005	0,015	2057	1109	-1,644	1
В30	0,19	0,24	0,005	0,015	4243	2366	-3,506	1,12
В50	0,25	0,3	0,00375	0,015	7110	2981	-4,417	1,24

Зависимость между напряжениями и деформациями для  $i$ -го фазового материала стержня для случая  $0 < \varepsilon < \varepsilon_*^+$  примем равной

$$\sigma_i = A_{1i}^{3+} \varepsilon_i + A_{3i}^{3+} \varepsilon_i^3, \quad (1)$$

где коэффициенты можно определить из простых предположений [5-7].

В случае достижения в каком-либо из слоев деформации равной или больше предельной упрочнения  $\varepsilon_*^+$  будем считать, что стержень теряет свою несущую способность.

Уравнение равновесия в случае центрального растяжения имеют вид

$$\frac{dN}{dx} = -q, \quad (2)$$

где величина распределенной нагрузки будет результатом действия силы тяжести на стержень

$$q = \frac{1}{l\sigma_*} g \rho S, \quad (3)$$

где величины в правой части выражения (3) подставляются до операции обезразмеривания, в указанной формуле  $g$  – величина ускорения свободного падения,  $\rho$  – плотность материала рассматриваемого сечения,  $S$  – площадь поперечного сечения.

Продольные усилия через напряжения можно определить по соотношениям

$$N = \iint_S \sigma dS. \quad (4)$$

Рассмотрим однородный стержень из бетона марки *B10* с поперечным сечением в форме прямоугольника (рис. 1б) с параметрами

$$\Delta_1 = b_1 = 0,1. \quad (5)$$

Из уравнений (2), (3) и условия, что правый конец стержня растягивается нагрузкой  $P$

$$N(1) = P, \quad (6)$$

имеем

$$N(x) = P + (1 - x)q, \quad (7)$$

где

$$q = \frac{1}{l\sigma_*} g \rho_1 \Delta_1 b_1,$$

и, с другой стороны, для продольного усилия из уравнений (1), (4) имеем

$$N(x) = 4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon + A_{31}^{3+} \varepsilon^3). \quad (8)$$

Из соотношений (7), (8) получим выражения для определения деформаций в стержне

$$A_{11}^{3+} \varepsilon + A_{31}^{3+} \varepsilon^3 = \frac{1}{4\Delta_1 b_1} (P + (1 - x)q). \quad (9)$$

Соотношения (9) показывают, что наибольшее значение деформации в стержне будет реализовано в месте защемления. Примем, что деформация равна величине предельной деформации упрочнения при растяжении  $\varepsilon_*^+$  в левом конце стержня. Из (9) определим предельную нагрузку  $P_1$  при которой стержень теряет несущую способность

$$P_1 = 4\Delta_1 b_1 \left( A_{11}^{3+} \varepsilon_*^+ + A_{31}^{3+} (\varepsilon_*^+)^3 \right) - q. \quad (10)$$

В случае отсутствия действия силы тяжести, т.е. при  $g=0$  в однородном стержне продольные усилия и деформации будут постоянны, для предельной нагрузки  $P_1$  в этом случае будут определяться соотношения

$$P_1 = 4\Delta_1 b_1 \left( A_{11}^{3+} \varepsilon_*^+ + A_{31}^{3+} (\varepsilon_*^+)^3 \right), \quad (11)$$

причем деформация равна предельной не только в месте защемления, а на всей длине стержня.

Удлинение стержня  $\delta$  с учетом силы тяжести при нагрузке  $P_1$  имеет вид

$$\delta = \int_0^1 \varepsilon(x) dx, \quad (12)$$

где  $\varepsilon(x)$  определяется решением уравнения (9) при значении  $P = P_1$ .

В случае отсутствия действия силы тяжести удлинение будет равняться предельной деформации упрочнения, т.е.

$$\delta = \varepsilon_*^+. \quad (13)$$

В результате расчетов по соотношениям (10), (12) получим для случая, где сила тяжести принималась в расчет

$$P_1 = 0,00313, \quad \delta_1 = 1,01573 \cdot 10^{-4}. \quad (14)$$

Корректность выбора решения (9) можно проверить из рис. 3, откуда видно, что деформация в месте защемления равна предельной деформации упрочнения.

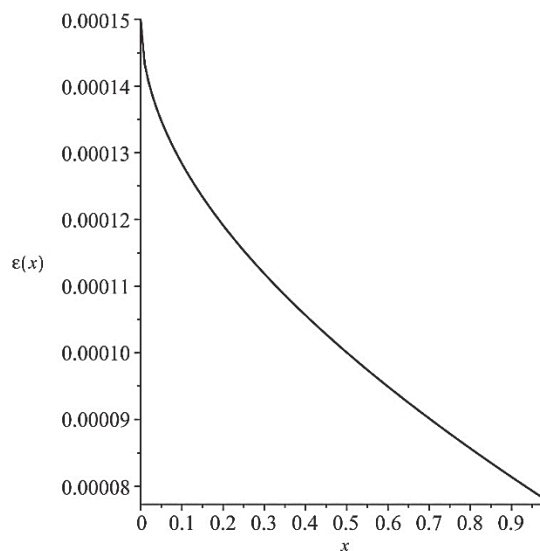


Рис. 3. Распределение деформаций в однородном стержне при нагрузке  $P_1$  с учетом силы тяжести

В случае отсутствия силы тяжести предельная нагрузка и удлинения будут равны

$$P_1 = 0,004439, \quad \delta_1 = 1,5 \cdot 10^{-4}. \quad (15)$$



Сравнивая соотношения (14), (15), можно увидеть, что предельная нагрузка в случае учета силы тяжести меньше случая без учета силы тяжести меньше на 42%, а удлинение стержня меньше на 47%.

В дальнейшем указанный стержень с параметрами (5) будем считать эталонным стержнем и все последующие полученные решения будем сравнивать с указанным стержнем. При этом в рассматриваемых примерах будем принимать, что все стержни имеют одинаковую массу.

Рассмотрим стержень форма поперечного сечения, которого имеет вид (рис. 1а) и данный стержень имеет постоянную форму поперечного сечения вдоль длины стержня (рис. 2б).

Из (1), (2), (4) для указанного стержня для предельной нагрузки  $P_1$  и удлинения  $\delta_1$  справедливы соотношения

$$P_1 = 4\Delta_1 b_1 (A_{1i}^{3+} \varepsilon_*^+ + A_{3i}^{3+} (\varepsilon_*^+)^3) + 4\Delta_2 b_2 (A_{1j}^{3+} \varepsilon_*^+ + A_{3j}^{3+} (\varepsilon_*^+)^3) - q, \quad \varepsilon_*^+ = \min(\varepsilon_{*i}^+, \varepsilon_{*j}^+), \quad (16)$$

где индексы  $i, j$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) соответствуют материалам первого и второго слоя, соответственно, согласно таблице 1, а для величины распределенной нагрузки  $q$  имеем

$$q = \frac{4g}{l\sigma_{1*}^+} (b_1 \Delta_1 \rho_i + b_2 \Delta_2 \rho_j). \quad (17)$$

Для определения удлинения стержня  $\delta_1$  имеем выражение

$$\delta_1 = \int_0^l \varepsilon(x) dx, \quad (18)$$

где  $\varepsilon(x)$  определяется из решения уравнения

$$4\Delta_1 b_1 (A_{1i}^{3+} \varepsilon + A_{3i}^{3+} \varepsilon^3) + 4\Delta_2 b_2 (A_{1j}^{3+} \varepsilon + A_{3j}^{3+} \varepsilon^3) = P_1 + (1-x)q. \quad (19)$$

Рассмотрим эквивалентный по массе эталонному стержню многослойный стержень с параметрами

$$\Delta_1 = 0,05, \quad b_1 = 0,01, \quad \Delta_2 = 0,044, \quad (20)$$

где первый слой реализован из бетона марки В30, второй из бетона марки В50.

Предельная нагрузка  $P_1$  и удлинение  $\delta_1$  в этом случае будет равно

$$P_1 = 0,00765, \quad \delta_1 = 1,162 \cdot 10^{-4}. \quad (21)$$

Распределение деформаций для данного примера имеет вид изображенный на рис. 4.

В случае отсутствия силы тяжести значение предельной нагрузки и удлинения будет равно

$$P_1 = 0,008964, \quad \delta_1 = 1,5 \cdot 10^{-4}.$$

Для указанного составного стержня предельная нагрузка без учета силы тяжести оказалась на 17% меньше, чем с учетом и на 144% больше по сравнению с предельной нагрузкой эталонного стержня в случае учета силы тяжести. Удлинение данного стержня в случае учета силы тяжести стало меньше на 15% чем без учета, а по сравнению с эталонным стержнем удлинение стало больше на 14% в случае учета силы тяжести в обоих случаях.

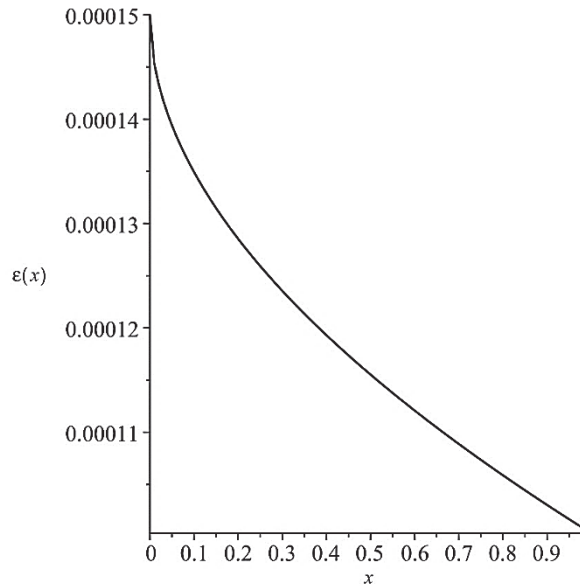


Рис. 4. Распределение деформаций в многослойном стержне при нагрузке  $P_1$  с учетом силы тяжести

Рассмотрим составной стержень, который является неоднородным по длине, т.е. на разных участках имеет форму поперечного сечения с различными параметрами и свойствами материала (рис. 1б, 2а).

В этом случае для предельного усилия  $P_1$  справедливо уравнение

$$P_1 = \min(P_{11}, P_{12}), \quad (22)$$

где нагрузка  $P_{11}$  соответствует нагрузке, при которой деформация равна предельной в зоне защемления, а нагрузка  $P_{12}$  – равенству деформации предельного значения в зоне соединения двух участков составного стержня  $x = l_1$ . Указанные нагрузки определяются из соотношений

$$P_{11} = 4\Delta_1 b_1 (A_{1i}^{3+} \varepsilon_{*i}^+ + A_{3i}^{3+} (\varepsilon_{*i}^+)^3) - (1 - l_1) q_2 - l_1 q_1,$$

$$P_{12} = 4\Delta_2 b_2 (A_{1j}^{3+} \varepsilon_{*j}^+ + A_{3j}^{3+} (\varepsilon_{*j}^+)^3) - (1 - l_1) q_2,$$

где

$$q_1 = 4 \frac{\rho_i g}{l \sigma_{*1}^-} \Delta_1 b_1, \quad q_2 = 4 \frac{\rho_j g}{l \sigma_{*1}^-} \Delta_2 b_2.$$

Удлинение стержня  $\delta_1$  при нагрузке  $P_1$  определяется из соотношения

$$\delta_1 = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x) dx + \int_{l_1}^1 \varepsilon_2(x) dx, \quad (23)$$

где деформации  $\varepsilon_1(x)$ ,  $\varepsilon_2(x)$  определяются из уравнений

$$4\Delta_1 b_1 (A_{1i}^{3+} \varepsilon_1(x) + A_{3i}^{3+} (\varepsilon_1(x))^3) = P_1 + (1 - l_1) q_2 + (l_1 - x) q_1,$$

$$4\Delta_2 b_2 (A_{1j}^{3+} \varepsilon_1(x) + A_{3j}^{3+} (\varepsilon_1(x))^3) = P_1 + (1 - x) q_2.$$

В качестве примера расчета выделим составной стержень эквивалентной массой с эталонным, в первом слое которого реализован бетон марки В50, а во втором слое бетон марки В10.

$$\Delta_1 = \frac{1}{10}, \Delta_2 = \frac{8}{100}, b_1 = \frac{1}{10}, b_2 = \frac{8}{100}, l_1 = \frac{6}{10}.$$

Тогда предельная нагрузка  $P_1$  и удлинение  $\delta_1$  будут равны в случае учета силы тяжести

$$P_1 = 0,00276, \delta_1 = 0,71 \cdot 10^{-4},$$

и без учета силы тяжести равны значениям

$$P_1 = 0,00284, \delta_1 = 0,74 \cdot 10^{-4}.$$

Распределение деформаций при нагрузке  $P_1$  будет иметь вид, изображенный на рис. 5.

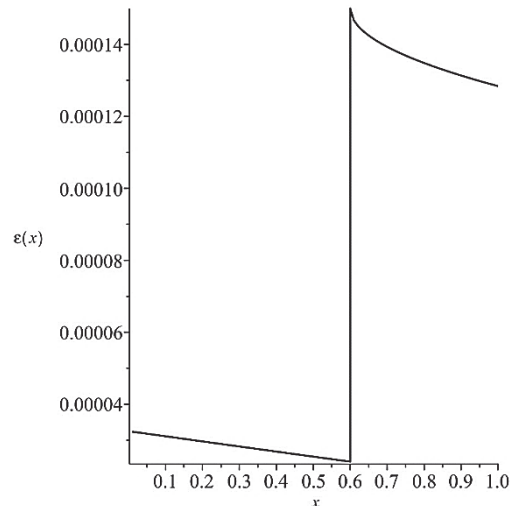


Рис. 5. Распределение деформаций в составном стержне при нагрузке  $P_1$  с учетом силы тяжести

По сравнению с эталонным стержнем в рассматриваемом стержне в случае учета силы тяжести предельная нагрузка  $P_1$  оказалась на 11 процентов меньше, а удлинение меньше на 4,2%. Если рассматривать данный составной стержень с учетом и без учета силы тяжести, то предельная нагрузка оказалась на 3 процента меньше в первом случае, а удлинение меньше на 30%.

### Литература

1. Мищенко А. В. Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XIX Всероссийской конференции, Бийск, 28-31 августа 2005 г. Параллель, 2005. С. 184–188;
2. Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Известия вузов. Строительство. 2013. № 4. С. 133–146;
3. Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики. Москва: Строительство, 1974. 208 с.;
4. Плевков В. С., Колупаева С. Н., Кудряков К. Л. Расчетные диаграммы нелинейного деформирования базальто-фибробетона при статических и кратковременных динамических воздействиях // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 3. С. 95–110;

5. Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С.26-37;

6. Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Центральное растяжение физически нелинейного составного стержня // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1(51). С.16-32;

7. Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Исследование особенностей деформирования слоистых бетонных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1(51). С. 39-58.

**И.К. Андрианов<sup>1</sup>, С.И. Феоктистов<sup>1</sup>**

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ СФЕРИЧЕСКОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЁТОМ СЖИМАЕМОСТИ И НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ**

<sup>1</sup>*Комсомольский-на-Амуре государственный университет,  
Комсомольск-на-Амуре*

Вопросы моделирования напряженно-деформированного состояния оболочек различного типа рассматривались в [1-4] при условиях несжимаемости материала, линейного упрочнения и идеальной пластичности. При определении напряженно-деформированного состояния толстостенных оболочек необходимо также учитывать и физическую нелинейность материала – закон упрочнения при пластическом деформировании.

Диаграмма деформирования материала задаётся линейно-степенной функцией [5]:

$$\sigma_i = \begin{cases} 3G e_i & \text{при } e_i \leq e_{iT} \\ A e_i^n & \text{при } e_i > e_{iT} \end{cases}, \quad (1)$$

где  $G = E/2(1 + \mu)$  – модуль упругости второго рода.

Рассмотрим задачу об определении несущей способности сферической толстостенной оболочки с учётом сжимаемости и нелинейной пластичности. Задачу будем решать, применяя метод переменных параметров упругости (МППУ). Для объёмного осесимметричного напряженного состояния в сферической системе координат  $\rho, \theta, \varphi$  при равномерном давлении внутри сферы касательные напряжения отсутствуют, производные по  $\varphi$  равны нулю, а условия равновесия имеют вид:

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = \frac{2(\sigma_\theta - \sigma_\rho)}{\rho}, \quad (2)$$

где  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_\varphi$  – соответственно, радиальные, тангенциальные (окружные) и меридиональные напряжения.

Интегрируя уравнение (2), получаем интегральное уравнение равновесия в виде:

$$\sigma_\rho = \int_R^\rho \frac{2(\sigma_\theta - \sigma_\rho)}{\rho} d\rho + \sigma_{\rho R}, \quad (3)$$

где  $R$  – радиус внешней поверхности сферы,  $\sigma_{\rho R}$  – радиальное напряжение на внешней поверхности сферы.

Условия совместности логарифмических деформаций в случае центральной симметрии представим в виде [6]:

$$\frac{de_\theta}{d\rho} = \frac{1 - \exp(e_\theta - e_\rho)}{\rho}; \quad (4)$$

$$e_\varphi = e_\theta.$$

Уравнения связи между напряжениями и деформациями, в соответствии с методом переменных параметров упругости, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} e_\rho &= \frac{1}{E^*} [\sigma_\rho - 2\mu^* \sigma_\theta]; \\ e_\theta &= \frac{1}{E^*} [\sigma_\theta - \mu^* (\sigma_\theta + \sigma_\rho)]. \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где  $E^*$  и  $\mu^*$  – переменные параметры упругости.

В уравнении совместности логарифмических деформаций (4) проведем замену:

$$\frac{de_\theta}{d\rho} = \frac{1}{\exp(e_\theta)} \frac{d(\exp(e_\theta))}{d\rho},$$

Рассматривая уравнение (6) как нелинейное дифференциальное уравнение первой степени вида и решая его методом Бернулли, получим общее решение:

$$\exp(e_\theta) = -\rho \int \frac{1}{\rho^2} \exp(2e_\theta - e_\rho) d\rho + C\rho.$$

Учитывая граничные условия: при  $\rho = R$ ,  $e_\theta = e_{\theta R} = \ln(R/R_0)$ , получим:

$$e_\theta = \ln \left( -\rho \int_R^\rho \frac{1}{\rho^2} \exp(2e_\theta - e_\rho) d\rho + \rho/R_0 \right).$$

После достижения заданной точности расчета напряженно-деформированного состояния уточняют положение внутренней поверхности сферической оболочки:

$$r^{(j+1)} = r_0 \exp(e_{\theta r}^{(j)}),$$

где  $e_{\theta r}^{(j)}$  – значение тангенциальной логарифмической деформации на верхней границе численного интегрирования, то есть при  $\rho = r^{(j)}$ .

Чтобы определить несущую способность толстостенной оболочки, необходимо определить, когда давление достигает точки экстремума. Для этого необходимо выполнение условия:

$$p = P_{max} \text{ при } dp = 0.$$

Таким образом, значение  $P_{max}$  определяет несущую способность сферы. Изменяя с определённым шагом наружный радиус  $R$  и определяя на каждом шаге давление  $p$ , можно построить график зависимости  $p$  от  $R$ . Анализируя полученный график, можно определить момент, когда при увеличении наружного радиуса давление деформирования начинает падать, то есть давление достигает максимума и приращение давления при увеличении радиуса становится меньше нуля:

$$dp < 0.$$

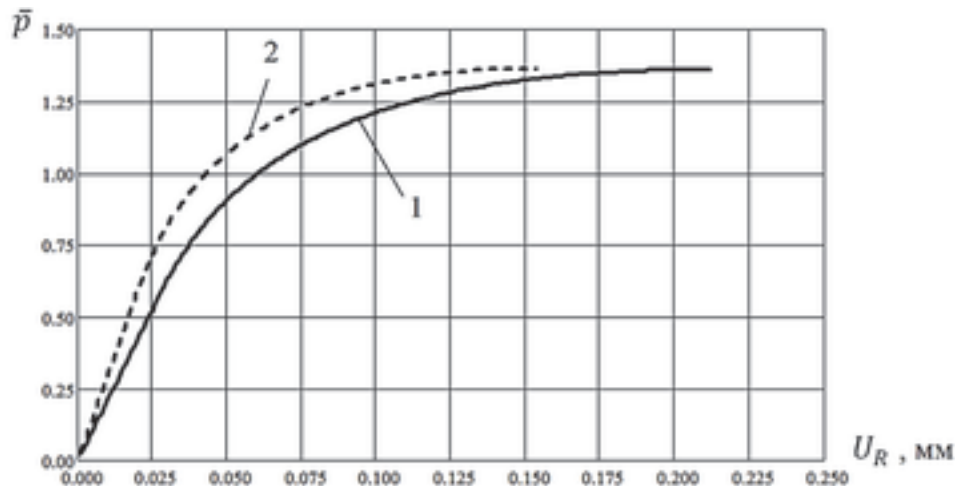
Это говорит о том, что наступил момент неустойчивого деформирования оболочки с последующим разрушением. Величина максимального давления в этом случае определяет несущую способность сферической оболочки.

Сопоставим результаты расчётов, полученные на примере толстостенной сферической оболочки, выполненные с учетом сжимаемости материала и в случае несжимаемого материала, для идеального упруго-пластичного материала и для упруго-пластичного материала с нелинейным упрочнением. Внутренний радиус оболочки  $r_0 = 50$  мм, наружный радиус  $R_0 = 100$  мм.

В случае идеального упруго-пластичного материала диаграмма деформирования материала задаётся уравнением:

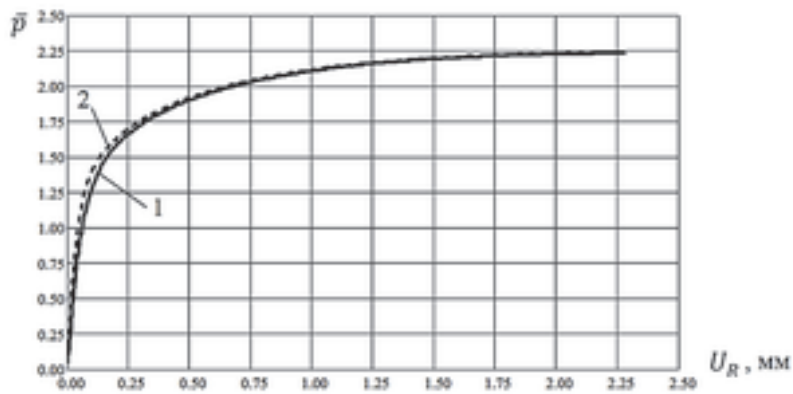
$$\sigma_i = \begin{cases} 3G & \text{при } e_i \leq e_{iT} \\ \sigma_T & \text{при } e_i > e_{iT} \end{cases}$$

На рис.1 и рис.2 представлены результаты изменения относительного внутреннего давления ( $\bar{p} = p/\sigma_T$  или  $\bar{p} = p/\sigma_{0.2}$ ) от радиального перемещения точек наружной поверхности сферической оболочки ( $U_R = R - R_0$ ).



- 1 – с учётом сжимаемости материала ( $\mu = 0,3$ );
- 2 – без учёта сжимаемости материала ( $\mu = 0,5$ ).

Рис. 1. График зависимости относительного давления от радиального перемещения точек наружной поверхности сферической оболочки



(идеальный упруго-пластичный материал  $E=71000$  МПа,  $\sigma_T=224$  МПа)  
 1 – с учётом сжимаемости материала ( $\mu = 0,3$ );  
 2 – без учёта сжимаемости материала ( $\mu = 0,5$ ).

Рис. 2. График зависимости относительного давления от радиального перемещения точек наружной поверхности сферической оболочки (упруго-пластичный материал с нелинейным упрочнением  $E=71000$  МПа,  $\sigma_{0,2}=224$  МПа,  $\sigma_B=400$  МПа,  $\delta\% = 15$ )

Как следует из сопоставления кривых 2 с кривыми 1 (см. рис 1 и рис.2), допущение о несжимаемости материала даёт очень небольшую погрешность в определении несущей способности толстостенной сферической оболочки. Так расчеты показывают, что для идеального упруго-пластичного материала эта погрешность составляет 0,35%, а для упруго-пластичного материала с нелинейным упрочнением – 0,013%.

Значительная погрешность получается при подсчёте радиальных перемещений. Так для идеального упруго-пластичного материала эта погрешность для радиальных перемещений внешней поверхности сферы при разрушении составляет 40%, а для упруго-пластичного материала с нелинейным упрочнением – 7%.

Более глубокий анализ результатов, полученных для идеального упруго-пластичного материала, показал, что они очень хорошо согласуются с аналитическим решением для стеснённой толстостенной трубы, представленным в книгах [2, 7]. Также как и при аналитическом решении, можно показать, что кривая 1 на рис.1 может быть получена из кривой 2 умножением значения радиального перемещения на  $2(1 - \mu)$ .

Данный анализ доказывает адекватность предложенной математической модели и достоверность результатов, полученных в данной статье.

На рис.3 и рис.4 представлены результаты изменения влияния сжимаемости материала на расчётную величину внутреннего давления в зависимости от радиального перемещения точек наружной поверхности сферической оболочки.

Влияние сжимаемости оценивалось в процентах к расчётному давлению в случае сжимаемого материала по формуле

$$\Delta p\% = \frac{(p_{\text{несж}} - p_{\text{сжим}})}{p_{\text{сжим}}} 100\%$$

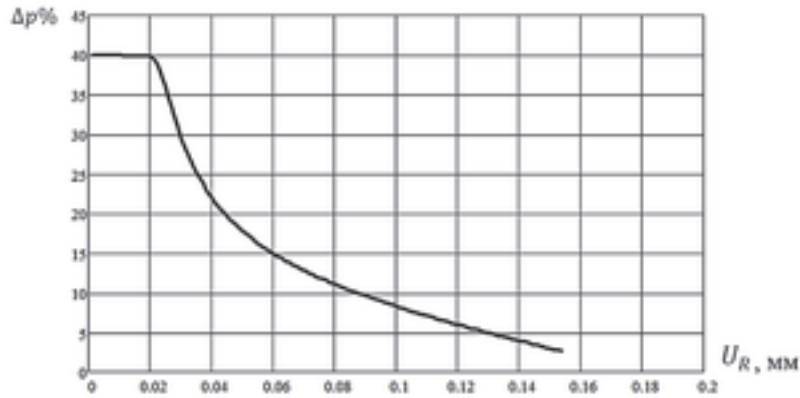


Рис. 3. График изменения влияния сжимаемости материала на расчётную величину внутреннего давления в зависимости от радиального перемещения точек наружной поверхности сферической оболочки (идеальный упруго-пластичный материал)

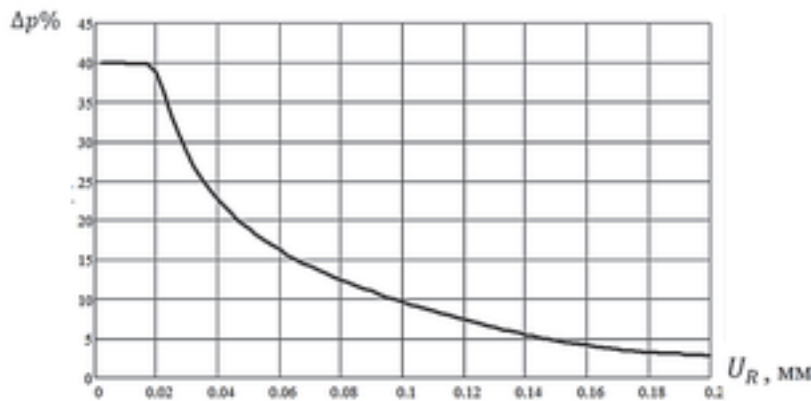


Рис. 4. График изменения влияния сжимаемости материала на расчётную величину внутреннего давления в зависимости от радиального перемещения точек наружной поверхности сферической оболочки (упруго-пластичный материал с нелинейным упрочнением)

Анализ представленных на рис.3 и рис.4 графиков, показывает, что максимальное влияние сжимаемость материала на расчётную величину внутреннего давления оказывает при упругом деформировании. Как только радиальные перемещения превышают некоторое значение, при котором в стенках сферической оболочки возникают пластические деформации, влияние сжимаемости резко снижается, асимптотически приближаясь к нулю. Причём характер изменения влияния сжимаемости практически не зависит от упрочнения, а зависит только от интенсивности деформаций и повторяет характер изменения переменного параметра упругости  $\mu^*$ .

Можно показать, что максимальное значение  $\Delta p_{\text{max}}^{\text{о}}\%$  в явном виде зависит от коэффициента Пуассона и определяется выражением

$$\Delta p_{\text{max}}^{\text{о}}\% = (1 - 2\mu)100\%.$$

Таким образом, данные исследования показали эффективность и универсальность применения МППУ для решения сложных упруго-пластических задач с учетом сжимаемости и нелинейной пластичности материала.



*Научное исследование выполнено при финансовой поддержке «Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных и по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации» в рамках стипендии по проекту СП-2200.2022.5 «Разработка моделей и алгоритмов расчёта пластического формообразования заготовок штамповочного производства».*

### **Литература**

1. Сторожев, М.В. Теория обработки металлов давлением / М.В. Сторожев, Е.А. Попов – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.;
2. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Малинин Н.Н. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.;
3. Биргер, И.А. Круглые пластинки и оболочки вращения / И.А. Биргер. – М.: Оборонгиз, 1961. – 368 с.;
4. Чумадин, А.С. Теория и расчеты процессов листовой штамповки (для инженеров) / А.С. Чумадин. – второе издание. – М: Экссервис «ВИП», 2014. – 216 с.;
5. Феоктистов, С.И. Построение диаграммы деформирования третьего рода с учётом сжимаемости материала и её свойство / С.И. Феоктистов, И.К. Андрианов, Х. Лин. \ \ В сборнике: Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению. Материалы Международной научно-практической конференции. - Комсомольск-на-Амуре, 2022. - С. 528-531;
6. Феоктистов С. И. Уравнения совместности логарифмических деформаций в координатах Эйлера для решения осесимметричных процессов обработки металлов давлением / С. И. Феоктистов, И. К. Андрианов // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2021. – № VII-1(55). – С. 26-30;
7. Прагер, В. Теория идеально-пластических тел / В. Прагер, Ф. Г. Ходж – М.: Изд. иностр. лит., 1956, 398 с.

**С.И. Феоктистов<sup>1</sup>, И.К. Андрианов<sup>1</sup>**

### **ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТРУБНЫХ ЗАГОТОВОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОСНАСТКИ**

<sup>1</sup>*Комсомольский-на-Амуре государственный университет,  
Комсомольск-на-Амуре*

Одной из важнейших задач при разработке технологических процессов деформирования тонкостенных труб, таких как раздача и протяжка, обжим и волочение, является определение напряженно-деформированного состояния с учётом нелинейной пластичности материала. В большинстве известных решений аналогичных процессов рассматривается идеально жестко-пластический материал или материал с линейным упрочнением [1, 2, 3, 4], что приводит к значительным погрешностям.

В данной статье, при определении напряжённо-деформированного состояния при деформировании тонкостенных труб с использованием осесимметричной оснастки будем использоваться метод переменных параметров упругости [4, 5], позволяющий учитывать не только изменение толщины в процессе деформирования, но и сжимаемость и нелинейность упрочнения материала.

Для реализации метода переменных параметров упругости необходимо иметь аналитическое выражение, определяющее диаграмму деформирования. Анализ существующих методов аппроксимации диаграмм деформирования, предлагаемых Н.Н. Малининым [4], М.И. Лысовым [6] и др. исследователями [7, 8] показал, что обычно эта кривая хорошо аппроксимируется либо степенной зависимостью  $\sigma_i = Ae_i^n$ , либо линейно-степенной:

$$\sigma_i = \begin{cases} 3Ge_i & \text{при } e_i \leq e_{iT} \\ Ae_i^n & \text{при } e_i > e_{iT} \end{cases}$$

Рассмотрим процесс деформирования тонкостенных труб с использованием оснастки сложной формы. В зависимости от схемы нагружения, при увеличении диаметра трубы с использованием пуансона, эти операции будем называть раздачей и протяжкой, при уменьшении диаметра с использованием матрицы – обжимом (обжатием) и волочением [4]. На рис.1 и рис.2 приложении сил сверху изображены соответственно схемы раздачи и обжима, приложении сил снизу – протяжки и волочения.

В общем случае, уравнения равновесия тонкостенной осесимметричной оболочки (оболочка может быть, как вогнутой, так и выпуклой) с учётом удельной силы трения действующей со стороны оснастки и находящейся под давлением (давление может быть направлено как внутрь, так и наружу) в проекции на касательную и нормаль к поверхности рассматриваемого элемента можно представить в следующем виде [3, 4, 8]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\rho} (\sigma_m \rho S) - \sigma_\theta S \pm \frac{q_{\text{тр}} \rho}{\sin \alpha} &= 0; \\ \pm \frac{\sigma_m}{R_m} \pm \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} &= \frac{q}{S} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\sigma_m$  – меридиональное главное нормальное напряжение;  $\sigma_\theta$  – окружное главное нормальное напряжение;  $q$  – удельное давление, действующее со стороны оснастки по нормали к рассматриваемому элементу оболочки;  $R_m$  – меридиональный радиус кривизны срединной поверхности оболочки (знак (+) ставим в том случае, если направление нормали кривой в меридиональном сечении совпадает с направлением удельного давления, в противном случае ставим знак (-));  $R_\theta$  – окружной радиус кривизны срединной поверхности оболочки (знак (+) ставим в том случае, если направление нормали кривой в окружном сечении совпадает с направлением удельного давления, в противном случае ставим знак (-));  $q_{\text{тр}} = f_{\text{тр}} q$  – удельная сила трения, действующая со стороны оснастки на рассматриваемый элемент оболочки (знак (+) ставим в том случае, если удельная сила трения направлена в сторону увеличения  $\rho$ , в противном случае ставим

знак (-));  $f_{\text{тр}}$  – коэффициент трения;  $S$  – толщина оболочки;  $\alpha$  – угол между касательной к элементу оболочки и её осью симметрии;  $\rho$  – радиус окружности срединной поверхности оболочки в сечении перпендикулярном оси оболочки.

Окружной радиус кривизны срединной поверхности оболочки определяется по формуле

$$R_{\theta} = \rho / \cos \alpha.$$

Для определения  $R_m$ , выразим кривизну оболочки в меридиональном направлении через  $\alpha$  и  $\rho$  [9]:

$$\kappa_m = \frac{1}{R_m} = \left| \frac{d\alpha}{dl} \right| = \left| \frac{d\alpha}{d\rho} \right| \sin \alpha.$$

Рассмотрим процессы раздачи и протяжки трубной заготовки (рис.1).

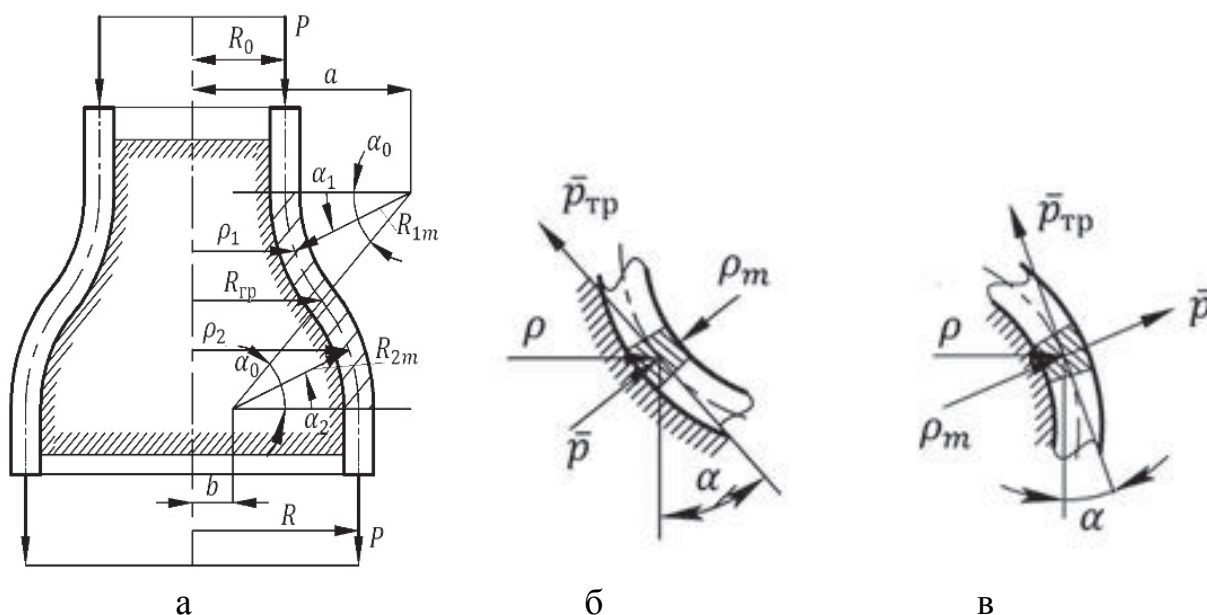


Рис. 1. Общий случай раздачи и протяжки трубной заготовки

В общем случае можно выделить два участка с различным направлением кривизны в меридиональном сечении (рис. 1 а, рис. 1 б).

Рассматривая уравнения равновесия (1) для каждого участка отдельно и учитывая, что для выпуклой оболочки всегда  $\frac{d\alpha}{d\rho} < 0$ , а для вогнутой –  $\frac{d\alpha}{d\rho} > 0$ , уравнение равновесия для выпуклого и вогнутого участков при раздачи и протяжки трубной заготовки с использованием осесимметричной оснастки можно записать так:

$$\frac{d(\sigma_m S)}{d\rho} = \frac{\sigma_{\theta}(1 + f_{\text{тр}} \operatorname{ctg} \alpha) - \sigma_m(1 + f_{\text{тр}} \rho \frac{d\alpha}{d\rho})}{\rho} S. \quad (2)$$

При рассмотрении процесса обжима и волочения трубной заготовки (рис. 2), как и в случае раздачи и протяжки, можно выделить два участка с различным направлением кривизны в меридиональном сечении.

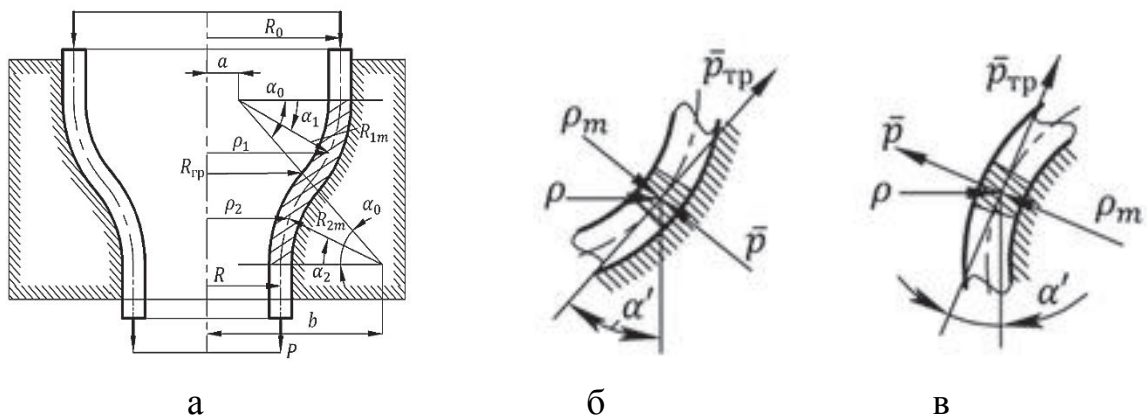


Рис. 2. Общий случай обжима и волочения трубной заготовки

В этом случае уравнения равновесия для выпуклого и вогнутого участков при обжиме и волочении трубной заготовки с использованием осесимметричной оснастки можно записать так:

$$\frac{d(\sigma_m S)}{d\rho} = \frac{\sigma_\theta (1 + f_{\text{тр}} \text{ctg } \alpha') - \sigma_m (1 + f_{\text{тр}} \rho \frac{d\alpha'}{d\rho})}{\rho} S. \quad (3)$$

Сравнивая выражения (2) и (3), можно сделать вывод, что для всех случаев деформирования трубных заготовок с использованием осесимметричной оснастки можно уравнения равновесия представить в виде выражения (2), с учётом того, что  $\alpha$  – угол между касательной к элементу оболочки и её осью симметрии для раздачи и протяжки отсчитывается от оси симметрии против часовой стрелки, для обжима и волочения – по часовой стрелки (рис. 1, рис. 2).

Для решения данного уравнения методом переменных параметров упругости, целесообразно перейти к интегральным уравнениям [5].

Запишем уравнение (2) в виде:

$$\frac{d(\sigma_m S)}{d\rho} + \frac{(1 + f_{\text{тр}} \rho \frac{d\alpha}{d\rho})}{\rho} (\sigma_m S) = \frac{\sigma_\theta S (1 + f_{\text{тр}} \text{ctg } \alpha)}{\rho}.$$

Это уравнение можно рассматривать как линейное неоднородное уравнение первой степени

$$Y' + A(\rho)Y = B(\rho).$$

Такое уравнение решаем методом Бернули и получаем общее решение в виде:

$$\sigma_m S = U(\rho) \left[ \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\sigma_\theta S (1 + f_{\text{тр}} \text{ctg } \alpha)}{\rho \cdot U(\rho)} d\rho + C \right], \quad (4)$$

где

$$U(\rho) = \exp \left[ - \int \frac{(1 + f_{\text{тр}} \rho \frac{d\alpha}{d\rho})}{\rho} d\rho \right] = \frac{1}{\rho} \exp(-f_{\text{тр}} \alpha). \quad (5)$$

Используя уравнение (4) и (5), а также уравнения связи напряжений и логарифмических деформаций, в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \frac{E^*}{(1 - \mu^{*2})} (e_m + \mu^* e_\theta); \\ \sigma_\theta &= \frac{E^*}{(1 - \mu^{*2})} (e_\theta + \mu^* e_m), \end{aligned} \right\}$$

где  $E^*$  и  $\mu^*$  - переменные параметры упругости, получаем интегральное уравнение равновесия в деформациях для всех случаев деформирования тонкостенных труб с использованием осесимметричной оснастки:

$$e_m = -\mu^* e_\theta + \frac{(1 - \mu^{*2})}{E^* S \rho \exp(f_{\text{тр}} \alpha)} * \left[ \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{E^* S (1 + f_{\text{тр}} \operatorname{ctg} \alpha) \exp(f_{\text{тр}} \alpha)}{(1 - \mu^{*2})} (e_\theta + \mu^* e_m) d\rho + \sigma_{m\rho_0} S_{\rho_0} \right] \quad (6)$$

где  $e_m$  и  $e_\theta$  - меридиональные и окружные логарифмические деформации, а  $\sigma_{m\rho_0}$  и  $S_{\rho_0}$  - меридиональное напряжение и толщина деформируемой трубы на одной из границ.

Рассмотрим порядок решения задачи об определении напряжённо-деформированного состояния при деформировании тонкостенных труб с использованием осесимметричной оснастки. Для решения интегрального уравнения (6) необходимо знать функцию изменения угла  $\alpha$  в зависимости от  $\rho$  -  $\alpha = \alpha(\rho)$ .

В случае деформирования тонкостенных труб с использованием осесимметричной оснастки, окружные деформации можно считать известными и зависящими только от координаты рассматриваемой точки:

$$e_\theta(\rho) = \ln \left( \frac{\rho}{R_0} \right),$$

где  $R_0$  - начальный радиус срединной поверхности трубы.

Граничные условия определяются на крае трубы, противоположенном приложению силы.

Решение по определению напряжённо-деформированного состояния трубы, в соответствии методу переменных параметров упругости, проводится методом последовательных приближений по рекуррентной схеме с использованием уравнения (6) для заданных граничных условий:

$$e_m^{(k+1)} = -\mu^{*(k)} \ln \left( \frac{\rho}{R_0} \right) + \frac{(1 - \mu^{*(k)2})}{E^{*(k)} S^{(k)} \rho} * \left[ \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{E^{*(k)} S^{(k)} (1 + f_{\text{тр}} \operatorname{ctg} \alpha(\rho)) \exp(f_{\text{тр}} \alpha(\rho))}{(1 - \mu^{*(k)2})} \left( \ln \left( \frac{\rho}{R_0} \right) + \mu^{*(k)} e_m^{(k)} \right) d\rho + \sigma_{m\rho_0} S_{\rho_0} \right],$$

где величины с индексом  $(k)$  и  $(k+1)$  обозначают соответственно их значения в  $k$ -м и  $(k+1)$ -м приближениях.

Численное интегрирование при обжиме и раздаче проводят от  $R$  до  $R_0$ , а при волочении и протяжке от  $R_0$  до  $R$ . В случае если матрица или пуансон переменной кривизны, интегрирование проводят по двум участкам.

Как показали вычисления, результаты расчетов не зависят от выбора значений исходного приближения, поэтому в исходном приближении принимаем:

$$e_m^{(0)} = 0; S^{(0)} = S_0; E^{*(0)} = 3G; \mu^{*(0)} = \mu,$$

где  $S_0$  – начальная толщина трубы,  $G$  – модуль упругости второго рода,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Затем вычисляют деформации по толщине трубы:

$$e_z^{(k+1)} = \frac{\mu^{*(k)}}{(\mu^{*(k)} - 1)} \left( \ln \left( \frac{\rho}{R_0} \right) + e_m^{(k+1)} \right).$$

После определения деформированного состояния, определяют напряжённое состояние трубы, используя уравнения связи между напряжениями и деформациями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m^{(k+1)} &= \frac{E^{*(k)}}{(1 - \mu^{*(k)2})} (e_m^{(k+1)} + \mu^{*(k)} e_\theta^{(k+1)}); \\ \sigma_\theta^{(k+1)} &= \frac{E^{*(k)}}{(1 - \mu^{*(k)2})} (e_\theta^{(k+1)} + \mu^{*(k)} e_m^{(k+1)}); \end{aligned} \right\}$$

Далее определяют интенсивность напряжений и интенсивность деформаций и уточняют значение  $E_{\text{сек}}$ , используя уравнение аппроксимации диаграммы деформирования степенной функцией:

$$E_{\text{сек}}^{(k+1)} = \frac{A (e_i^{(k+1)})^n}{e_i^{(k+1)}}.$$

Затем уточняют значение переменных параметров упругости [4]:

$$\begin{aligned} E^{*(k+1)} &= \frac{E_{\text{сек}}^{(k+1)}}{1 + \frac{1 - 2\mu}{3E} E_{\text{сек}}^{(k+1)}}; \\ \mu^{*(k+1)} &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1 - 2\mu}{3E} E_{\text{сек}}^{(k+1)}}{1 + \frac{1 - 2\mu}{3E} E_{\text{сек}}^{(k+1)}}. \end{aligned}$$

Для контроля сходимости процесса проводят сравнение значений интенсивностей напряжений:

$$|\sigma_i^{(k+1)} - \sigma_i^{(k)}| \leq \Delta\sigma_i$$

Расчёт продолжают до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

*Научное исследование выполнено при финансовой поддержке «Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных и по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации» в рамках стипендии по проекту СП-2200.2022.5 «Разработка моделей и алгоритмов расчёта пластического формообразования заготовок штамповочного производства».*

## Литература

1. Горбунов, М.Н. Технология заготовительно-штамповочных работ в производстве самолетов: Учебник для вузов / М.Н. Горбунов. – М.: Машиностроение, 1981. – 224 с.
2. Горбунов, М.Н. Штамповка деталей из трубчатых заготовок / М.Н. Горбунов. – М.: Машгиз, 1960. – 190 с.
3. Сторожев, М.В. Теория обработки металлов давлением \ М.В. Сторожев, Е.А. Попов – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
4. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести \ Малинин Н.Н. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.
5. Биргер, И.А. Круглые пластинки и оболочки вращения / И.А. Биргер. – М.: Оборонгиз, 1961. – 368 с.
6. Лысов, М.И. Теория и расчет процессов изготовления деталей методами гибки. – М.: Машиностроение, 1966. – 236 с.
7. Полухин, П.И. и др., Соппротивление пластической деформации металлов и сплавов: Справочник / П.И. Полухин, Г.Я. Гун, А.М. Галкин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Металлургия, 1983. – 352 с.
8. Чумадин, А.С. Теория и расчеты процессов листовой штамповки (для инженеров) / А.С. Чумадин. – второе издание. – М: Эксервис «ВИП», 2014. – 216 с.
9. Выгодский, М.Я. Справочник по математике. – М.: Наука, 1965. – 872 с.

**С.И. Феоктистов<sup>1</sup>, И.К. Андрианов<sup>1</sup>, Лин Хтет<sup>1</sup>**

## МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛА В ОБЛАСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

<sup>1</sup>*Комсомольский-на-Амуре государственный университет,  
Комсомольск-на-Амуре*

Для получения численно-аналитических решений, определяющих напряжённо-деформированное состояние при упругопластическом деформировании методом переменных параметров упругости, необходимо иметь аналитическое выражение диаграммы деформирования с учётом сжимаемости материала

$$\sigma_i = \sigma_i(e_i),$$

где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $e_i$  – интенсивность логарифмических деформаций.

Диаграмму деформирования материала обычно получают на основании проведенных испытаний на разрыв при одноосном растяжении. Так как при решении упругопластических задач аналитическое выражение диаграммы деформирования получают аппроксимируя полученную экспериментальную диаграмму, то желательно иметь метод аппроксимации, который позволяет наилучшим образом описать диаграмму деформирования как в упругой области, так и в области пластичности.

Анализ существующих методов аппроксимации диаграмм деформирования, предлагаемых Н.Н. Малининым [1], М.И. Лысовым [2] и др. исследователями [3] показал, что обычно эта кривая аппроксимируется либо степенной зависимостью  $\sigma_i = Ae_i^n$ , либо линейно-степенной:

$$\sigma_i = \begin{cases} 3Ge_i & \text{при } e_i \leq e_{iT} \\ Ae_i^n & \text{при } e_i > e_{iT} \end{cases} \quad (1)$$

где  $G$  – модуль упругости второго рода;  $e_{iT}$  – значение интенсивности логарифмических деформаций, соответствующее точке перехода линейной зависимости в степенную (предел текучести);  $A$  и  $n$  – параметры степенной функции.

Параметры  $A$  и  $n$  обычно выражаются через основные механические характеристики материала или определяются по экспериментальной диаграмме деформирования, полученной при испытании образцов на разрыв.

Рассмотрим определение параметров аппроксимации через основные механические характеристики материала. Например, эти параметры можно выбрать из условия прохождения степенной функции  $\sigma_i = Ae_i^n$  через точку, соответствующую условному пределу текучести ( $e_{i0,2}$ ,  $\sigma_{i0,2} = \sigma_{s0,2}$ ) и точку, соответствующую началу шейкообразования (временному сопротивлению деформирования) ( $e_{iш}$ ,  $\sigma_{iш} = \sigma_{св}$ ) (рис.1).

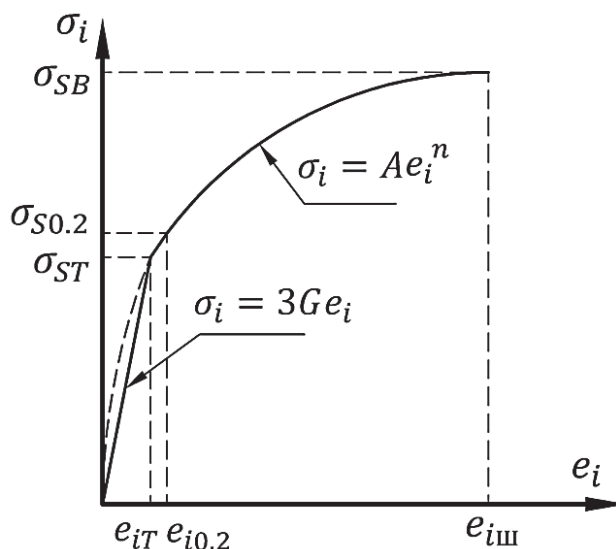


Рис. 1. Схема аппроксимации диаграммы деформирования по двум точкам

Подставив координаты этих точек в выражение степенной аппроксимирующей зависимости, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными  $n$  и  $A$ :

$$\left. \begin{aligned} Ae_{i0,2}^n &= \sigma_{s0,2} \\ Ae_{iш}^n &= \sigma_{св} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Решение системы (2) дает возможность определить  $n$  и  $A$ :

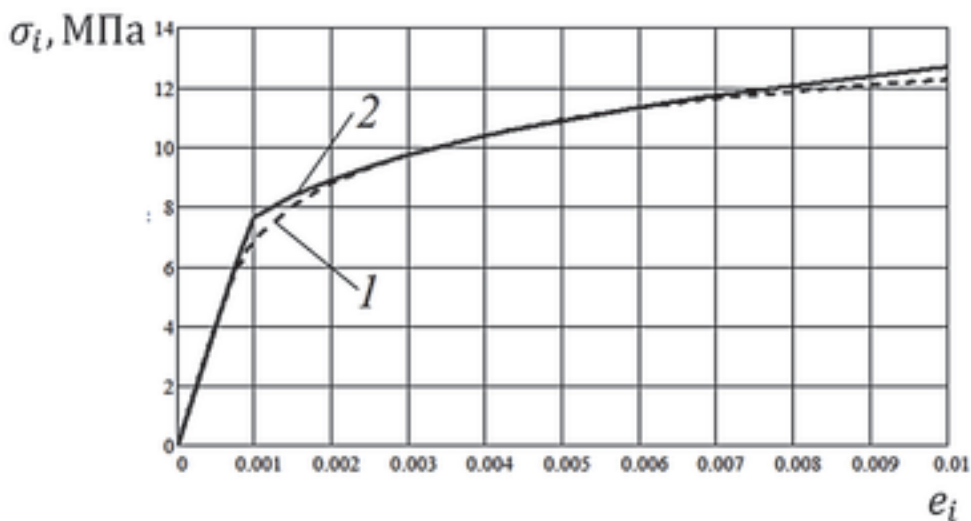


$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{\ln(\sigma_{св}/\sigma_{s0,2})}{\ln(e_{iш}/e_{i0,2})}; \\ A &= \sigma_{s0,2}/e_{i0,2}^n, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $\sigma_{св} = \sigma_{в} \cdot \exp[e_{ш} - 3k_{\mu}\sigma_{в} \cdot \exp(e_{ш})]$  – истинное временное сопротивление деформированию;  $\sigma_{s0,2} = \sigma_{0,2} \cdot \exp[e_{0,2} - 3k_{\mu}\sigma_{0,2} \cdot \exp(e_{0,2})]$  – истинное напряжение, соответствующие условному пределу текучести;  $e_{ш}$  – продольная логарифмическая деформация, соответствующая временному сопротивлению деформирования или началу образования шейки;  $e_{0,2} = \sigma_{0,2}/E + 0,002$  – деформация, соответствующая условному пределу текучести;  $k_{\mu} = (1 - 2\mu)/3E$  – коэффициент, учитывающий сжимаемость материала;  $e_{iш} = (e_{ш} - k_{\mu}\sigma_{св})$  – интенсивность деформаций, соответствующая началу образования шейки;  $e_{i0,2} = (e_{0,2} - k_{\mu}\sigma_{s0,2})$  – интенсивность деформаций, соответствующая условному пределу текучести [4].

Значение интенсивности деформаций, соответствующее точке перехода линейной зависимости в степенную, определяется выражением:

$$e_{iT} = (A/3G)^{1/(1-n)}. \quad (4)$$



- 1 – действительная диаграмма деформирования  
2 – аппроксимирующая кривая

Рис. 2. Аппроксимация диаграммы деформирования АМг2-М линейно-степенной функцией по двум точкам

На рис.2 и рис.3 показаны аппроксимация диаграммы деформирования алюминиевого сплава АМг2-М линейно-степенной функцией по двум точкам и погрешность, получаемая в случае такой аппроксимации. Действительная диаграмма деформирования получена на основании диаграммы одноосного растяжения, взятой из справочника «Авиационные материалы» [5].

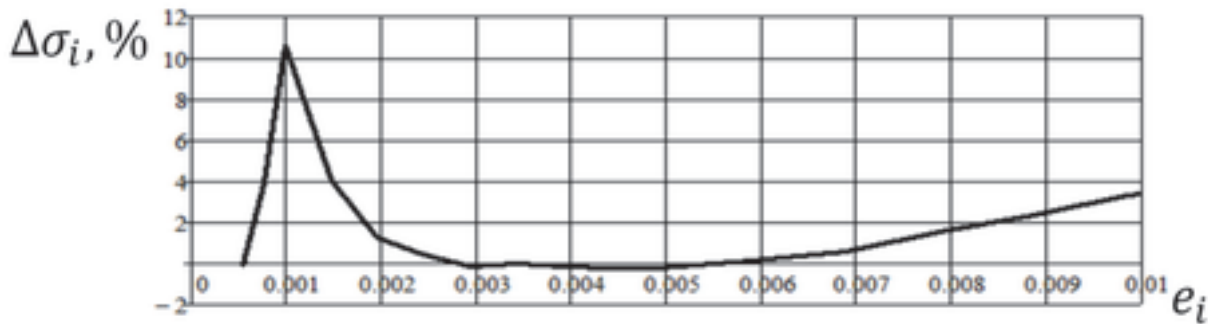


Рис. 3. Погрешность аппроксимации диаграммы деформирования АМг2-М линейно-степенной функцией по двум точкам

Как видно на рис.3, погрешность аппроксимации резко увеличивается в точке перехода линейной функции в степенную и достигает 11%. При решении упругопластических задач, когда рассматриваются одновременно области упругих и пластических деформаций, очень важно точно определить момент перехода материала из упругого в пластическое состояние. Для того чтобы уменьшить погрешность аппроксимации в точке перехода линейной функции в степенную, необходимо сгладить этот переход.

Иногда, для того чтобы сгладить переход от упругого деформирования к пластическому, возможно применение линейно-степенной аппроксимации в виде:

$$\sigma_i = \begin{cases} 3Ge_i & \text{при } e_i \leq e_{iT} \\ A(e_i - e_{0i})^n & \text{при } e_i > e_{iT} \end{cases} \quad (5)$$

где  $e_{0i}$  – величина смещения степенной функции по оси деформаций.

Схема такой аппроксимации, при условии прохождения степенной функции через две характерные точки диаграммы деформирования, представлена на рис.4.

В этом случае систему уравнений (2) необходимо дополнить ещё двумя уравнениями, позволяющими определить  $e_{0i}$  и  $e_{iT}$  и записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} A(e_{i0,2} - e_{0i})^n &= \sigma_{s0,2}, \\ A(e_{iш} - e_{0i})^n &= \sigma_{SB}, \\ A(e_{iT} - e_{0i})^n &= 3Ge_{iT}, \\ nAe_{iш}^{n-1} &= 3G. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В данной системе:

*первое уравнение* – условие прохождения диаграммы деформирования через точку, соответствующую условному пределу текучести ( $e_{i0,2}$ ,  $\sigma_{i0,2} = \sigma_{s0,2}$ );

*второе уравнение* – условие прохождения диаграммы деформирования через точку, соответствующую началу шейкообразования (временному сопротивлению деформирования) ( $e_{iш}$ ,  $\sigma_{iш} = \sigma_{SB}$ );

*третье уравнение* – условие, определяющее точку  $e_{iT}$  перехода линейной зависимости в степенную;

четвёртое уравнение – условие равенства первой производной степенной функции в точке  $(e_{iT}, \sigma_{iT} = \sigma_{ST})$  и коэффициента наклона прямой, соответствующей упругому деформированию.

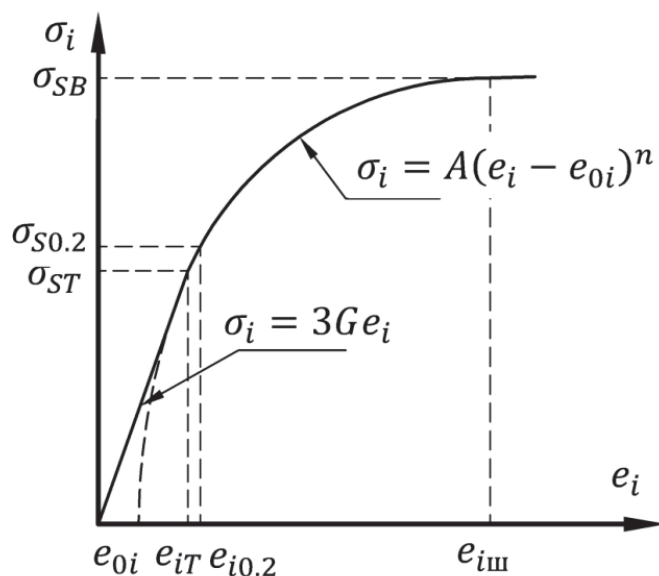


Рис. 4. Схема аппроксимации диаграммы деформирования по двум точкам со сдвигом степенной функции

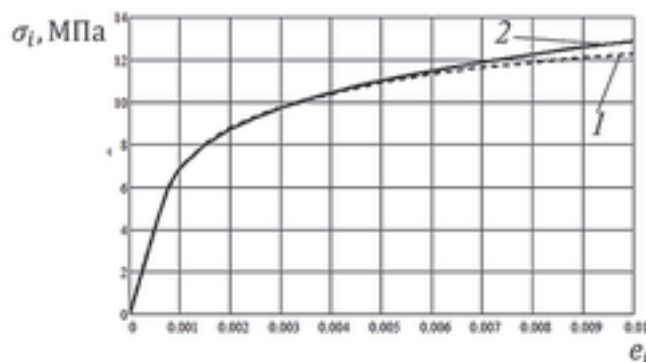
Для решения системы уравнений (6) её приводят к рекуррентному виду и решают методом последовательных приближений:

$$\left. \begin{aligned} n^{(k)} &= \frac{\ln(\sigma_{SB}/\sigma_{S0,2})}{\ln((e_{iш} - e_{0i}^{(k-1)})/(e_{i0,2} - e_{0i}^{(k-1)}))}; \\ A^{(k)} &= \frac{\sigma_{S0,2}}{(e_{i0,2} - e_{0i}^{(k-1)})^{n^{(k)}}}; \\ e_{iT}^{(k)} &= e_{0i}^{(k-1)} + (n^{(k)} A^{(k)} / 3G)^{1/(1-n^{(k)})}; \\ e_{0i}^{(k)} &= e_{iT}^{(k)} (1 - n^{(k)}). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

На первом этапе вычислений принимаются начальное приближение –  $e_{0i}^{(0)} = 0$ . Вычисления повторяются до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность вычислений величины смещения степенной функции в процентах:

$$\Delta e_{0i} \% = |(e_{0i}^{(k)} - e_{0i}^{(k-1)})/e_{0i}^{(k)}| 100\%.$$

На рис.5 и рис. 6 показаны аппроксимация диаграммы деформирования алюминиевого сплава АМг2-М линейно-степенной функцией по двум точкам со сдвигом степенной функции и погрешность, получаемая в случае такой аппроксимации.



1 – действительная диаграмма деформирования  
2 – аппроксимирующая кривая

Рис. 5. Аппроксимация диаграммы деформирования АМг2-М линейно-степенной функцией по двум точкам со сдвигом степенной функции

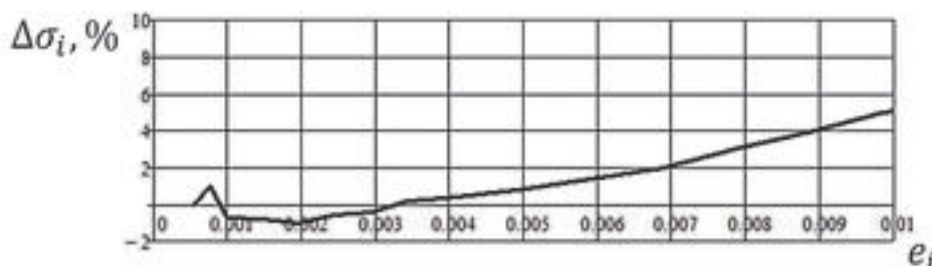


Рис. 6. Погрешность аппроксимации диаграммы деформирования АМг2-М линейно-степенной функцией по двум точкам со сдвигом степенной функции

Анализ полученных графиков показывает, что аппроксимирующая кривая в этом случае значительно точнее описывает действительную диаграмму деформирования и погрешность аппроксимации в области перехода из упругого в пластическое состояние не превышает 1%.

Таким образом, можно сделать вывод, что при решении упругопластических задач методом переменных параметров упругости желательнее аппроксимировать диаграмму деформирования линейно-степенной функцией по двум точкам со сдвигом степенной функции, которая описывается выражением (5) и позволяет с высокой точностью описать область перехода из упругого в пластическое состояние.

*Научное исследование выполнено при финансовой поддержке «Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных и по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации» в рамках стипендии по проекту СП-2200.2022.5 «Разработка моделей и алгоритмов расчёта пластического формообразования заготовок штамповочного производства».*

### Литература

- 1 Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. - М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.;
- 2 Лысов, М.И. Теория и расчет процессов изготовления деталей методами гибки. – М.: Машиностроение, 1966. – 236 с.;

3. Полухин, П.И. и др., Соппротивление пластической деформации металлов и сплавов: Справочник / П.И. Полухин, Г.Я. Гун, А.М. Галкин. – 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Металлургия, 1983. – 352 с.;

4. Феоктистов, С.И. Построение диаграммы деформирования третьего рода с учётом сжимаемости материала и её свойство / С.И. Феоктистов, И.К. Андрианов, Лин Хтет. // В сборнике: Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению. Материалы Международной научно-практической конференции. Комсомольск-на-Амуре, 2022. С. 528-531;

5. Шалин, Р.Е. Авиационные материалы. В 9 т. Т. 4. Алюминиевые и бериллиевые сплавы. Часть 1. Деформируемые алюминиевые сплавы и сплавы на основе бериллия: справочник для инженерно-технических и научных работников / под общ. ред. Р.Е. Шалина. – 6-е изд. перераб. и доп. – М.: Всесоюзный научно-исследовательский институт авиационных материалов (ВИАМ), 1982. – 626 с.

**А.Н. Богданов<sup>1</sup>**

## **К УСТАНОВЛЕНИЮ ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ НЕКОТОРЫХ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ КОНФИГУРАЦИЙ**

<sup>1</sup>*НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва*

Разработка новых прогрессивных технологий в машиностроении, основанных на научном подходе с позиций механики, ставит вопросы всё более глубокого исследования фундаментальных свойств природных и технологических процессов. В этой связи одним из принципиальных вопросов является выяснение возможности установления процесса (достижения им стационарного режима или состояния). Условием стационарности является баланс между притоком энергии и ее диссипацией. Рассеяние энергии может быть не связано с влиянием вязкого трения, в роли диссипативного механизма может выступить инициирование и поддержка (механическое «раскручивание») некоторых спутных («паразитических») процессов, притом непреднамеренное и заранее непрогнозируемое.

В сверхзвуковой аэродинамике не вполне выясненным является вопрос существования предельного режима развития предвестника (составляемого двумя косыми клинообразующими скачками, опережающими фронт УВ<sup>2</sup>) при прогрессии ударной волны (УВ) по среде с продольным каналом нагретого газа [1]. Такие задачи актуальны в связи с разработкой способов защиты от ударно-волнового воздействия [2].

Исследование процесса распространения УВ в неоднородной среде показало (см., например, [3]), что в нагретой среде УВ ускоряется. В простейшем случае одномерной, в направлении распространения волны, стратификации температуры и плотности (при постоянном давлении и покое среды) эта задача была рассмотрена Дж. Уиземом [4], применившим весьма оригинальный метод решения, что позволило ему получить удивительно простую зависимость скорости УВ от плотности газа перед ней ( $\gamma$  – показатель адиабаты)

---

<sup>2</sup>Автор узнал о явлении предвестника от И.В. Немчинова.

$$D \sim \rho_0^{-\beta}, \beta = \beta(\gamma) = const > 0 \quad (1)$$

Зависимость (1) давала правильный качественный (далеко не количественный) результат, показывая, что при понижении плотности среды перед фронтом УВ  $\rho_0 < \rho(0)$  (что при покое среды и постоянном давлении в ней соответствовало повышению её температуры) волна ускоряется, при повышении плотности – замедляется. Явным же недостатком зависимости (1) было отсутствие, при расчетах по ней, всякого последствия при прохождении УВ стратифицированного слоя: как только плотность среды принимала исходное значение, УВ восстанавливала свою исходную скорость. Такое отсутствие рассеяния энергии есть, конечно, абсолютно нефизичный результат. Однако формула (1) качественно подтверждала результат [ 1 ] об автомодельном неограниченном росте предвестника, т.о. наличие продольнопротяженных областей нагретого газа, хотя бы и очень тонких, приведет к глобальной перестройке распространяющейся в такую среду УВ.

Предложенный [3], много позже Уизема, автором этой статьи метод расчета параметров УВ в неоднородной среде заключался в том, что исходная неоднородная среда рассматривалась как последовательность очень тонких слоев, в каждом из которых изменение плотности  $\delta\rho_0$  очень мало. Эти малые отклонения в каждом слое вызывают слабый отклик скорости УВ, который в каждом слое можно представить в виде ряда ( $D(0)$  – значение скорости УВ на входе в слой)

$$D = D(0) + \delta D + \delta^2 D_2 + \dots$$

Подставив это разложение в соотношения на разрыве, определив связь для величин первого порядка малости по  $\delta$  и приняв, что приходящих на фронт УВ возмущений из областей, уже пройденных волной, нет, можно получить соотношение

$$\delta D = \delta D(\delta\rho_0)$$

из которого, перейдя к пределу  $\delta\rho_0 \rightarrow 0$ , и саму зависимость, причем, для любой интенсивности УВ

$$D \sim D(\rho_0) \quad (2)$$

Замечательно, что в приближении сильных УВ зависимость (2) дает в точности полученную Уиземом связь (1). Как и (1), (2) также не позволяет рассчитать диссипацию энергии УВ на областях неоднородности, хотя, она может быть уточнена вычислением членов следующего порядка малости  $\delta^2 D_2$  и т.д. Однако рассчитанная и по уточненной формуле диссипация в рассматриваемом случае будет очень невелика. Действительно, эта формула применима для расчетов только на очень коротком интервале вблизи вершины предвестника, где УВ может считаться прямой. За фронтом прямой УВ течение тормозится до дозвукового, возмущения из областей сзади УВ догоняют ее фронт и могут ослаблять интенсивность УВ. В остальных областях «тела» предвестника, образованного слабыми косыми УВ, течение сверхзвуковое, оно не столько тормозится, сколько отклоняется в стороны, область перестройки потока в предвестнике увеличивается подобно выдвигающемуся из фронта УВ клину среды иных свойств. Слабые возмущения, исходящие из пройденных УВ областей, этих ко-

рых фронтов не достигают. В таких условиях причин изменения скорости роста предвестника, определяемой температурой нагретого канала (а она постоянна), не усматривается.

Возможно ли указание других механизмов диссипации, ставящих предел росту предвестника? Возможны ли предельные стационарные конфигурации?

Компьютерное моделирование показало [1] наличие в «теле» предвестника, имеющего сложную структуру, возвратных течений к его вершине (оставленных в [1] без внимания), раскручивание которых будет затрачивать поступающую из нагретого канала энергию. Т.о. усматривается аналогия течения в «теле» предвестника и обтекания выступа на ограничивающей течение поверхности дозвуковым потоком газа – задаче, с которой столкнулись автомобилестроители. Там установка обтекателя в уступ перед кузовом над водительской кабиной предотвращает образование в этом месте вихря и его дальнейшее раскручивание, что приводит к экономии топлива в среднем на 10%.

При обтекании выступа течение формирует твердая стенка, в случае образования предвестника перед УВ течение более сложное, с разворотом потока системой косых УВ и волн разрежения.

Условие стационарности процесса в рассматриваемом случае есть равенство притока энергии от нагретого канала и удвоенной энергии образующегося в «теле» предвестника вихря (их два):

$$\delta q = 2E_{rot}$$

#### Литература

1. Артемьев В.И., Маркович И.Э., Немчинов И.В., Суляев В.А. Двумерное авто-модельное движение сильной ударной волны над нагретой поверхностью// Докл. АН СССР, т. 293, № 5. 1987. С. 1082–1084;
2. Богданов А.Н. Сильные ударные волны. Способы воздушной защиты/ Актуальные проблемы защиты и безопасности. средства противодействия терроризму. Труды XXIII всероссийской научно-практической конференции. Санкт-Петербург, т. 2, с. 175-179;
3. Богданов А.Н. Динамика ударных волн в средах с продольной стратификацией// Докл. РАН. 2020. Т. 491, № 1. С. 5–6;
4. Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves. John Wiley & Sons. 1974. 635 p. (Имеется перевод: Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.:Мир,1977. 622 с.).

**А.Б. Фрейдин**<sup>1,2</sup>

## СВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ФАЗОВЫХ И ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

Задачи описания фазовых переходов и локализованных химических реакций в деформируемых телах объединяет наличие границы, разделяющей ис-

ходный и превращенный деформируемые материалы. В случае фазового превращения это граница фаз, в случае локализованной химической реакции – фронт превращения. Скорость границы зависит от напряженно-деформированного состояния, в то время как напряженно-деформированное состояние зависит от положения границы. Оба превращения, вообще говоря, сопровождаются деформацией превращения, которая в случае фазового перехода определяется геометрией перестраивающейся решетки кристалла, а в случае химической реакции – взаимодействием компонентов и стехиометрией реакции. Деформация превращения, в свою очередь порождает внутренние напряжения, влияющие на кинетику и равновесие границы.

В случае химической реакции между твердым деформируемым и диффундирующим компонентами скорость фронта химического превращения зависит также от концентрации диффундирующего компонента, причем одно из граничных условий для уравнения диффузии ставится на распространяющемся фронте химической реакции.

Кроме того, превращение сопровождается изменением реологических свойств материала. Например, при окислении кремния исходный материал – кремний – может считаться упругим, в то время как получающийся диоксид кремния демонстрирует свойства нелинейно-вязкого материала (см., напр., [1]).

В докладе представлен краткий обзор постановок связанных задач, возникающих при исследовании распространения и равновесия межфазных границ при фазовых переходах под напряжением и фронтов химических реакций в деформируемых телах, развиваемых в рамках механики конфигурационных сил и в случае химических реакций использующих концепцию тензора химического сродства. Примерами рассматриваемых фазовых превращений являются мартенситные превращения под напряжением в материалах с эффектом памяти формы (см., напр., [2]). Примерами химических реакций являются реакции окисления кремния, важные для микроэлектроники, и литизации кремния в литий-ионных батареях (см., напр., [3-6], а также [7]).

**1. Кинетическое уравнение – дополнительное определяющее соотношение.** Ключевым в постановке задач с распространяющимися межфазными границами является формулировка кинетического уравнения – дополнительно определяющего соотношения, определяющего зависимость скорости межфазной границы от напряженно-деформированного состояния, а в случае химической реакции между деформируемым твердым и диффундирующим компонентами и от концентрации диффундирующего компонента. Термодинамически обоснованный вывод кинетического уравнения может быть сделан на основе второго закона термодинамики, записанного в виде диссипативного неравенства, которое естественным образом определяет термодинамическую силу, управляющую распространением границы. Так как распространение границы означает изменение конфигурации тела, эту термодинамическую силу называют конфигурационной [8-11] (см. также обзор [12]). Тогда кинетическое уравнение может быть сформулировано в виде зависимости скорости границы от конфигурационной силы, а напряженно-деформированное состояние влияет на скорость границы через эту силу.



**2. Задача о фазовом переходе.** Исходную и новую твердые фазы (твердые компоненты химической реакции) будем обозначать как фазы «-» и «+». Скачки величин на границе фаз – квадратными скобками:  $[\varphi] = \varphi_+ - \varphi_-$ . В случае фазовых переходов в роли конфигурационной силы выступает скачок тензора энергии-импульса Эшелби. Из балансов массы, импульса и энергии и второго закон термодинамики, записанного в виде неравенства Клаузиуса–Дюгема с учетом теоремы переноса Рейнольдса для тела с распространяющейся внутренней границей, следуют соотношения для скачков на движущейся межфазной границе, из которых, в свою очередь, следует выражение для диссипации энергии вследствие распространения межфазной границы (см., напр., [13-15]):

$$\text{Dis} = \int_{\Gamma_0} D_0 d\Gamma_0 \quad (1)$$

где

$$D_0 = -\mathbf{N}_0 \cdot \left[ \mathbf{b}_+ + \frac{\rho}{2} \mathbf{W}_0^2 \overset{\circ}{\mathbf{C}} \right] \cdot \mathbf{N}_0 \mathbf{W}_0, \quad (2)$$

$$\mathbf{b}_\pm = \rho_\pm^\circ \mathbf{f}_\pm \mathbf{I} - \overset{\circ}{\mathbf{F}}_\pm^T \cdot \overset{\circ}{\mathbf{S}}_\pm, \quad (3)$$

– тензоры энергии-импульса Эшелби [16,17], которые называют также тензорами напряжений Эшелби, определенные относительно отсчетной (ненапряженной, недеформированной) конфигурации исходной фазы  $\overset{\circ}{V}$ ,  $\mathbf{W}_0$  – нормальная составляющая скорости границы относительно отсчетной конфигурации  $\overset{\circ}{V}$ ,  $\overset{\circ}{\mathbf{F}}_-$  и  $\overset{\circ}{\mathbf{F}}_+$  – градиенты деформации, определенные относительно конфигурации  $\overset{\circ}{V}$ ;  $\mathbf{f} = \mathbf{u} - T\mathbf{s}$  – массовая плотность свободной энергии Гельмгольца,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор,  $\overset{\circ}{\mathbf{C}} = \overset{\circ}{\mathbf{F}}^T \cdot \overset{\circ}{\mathbf{F}}$  – правый тензор деформаций Коши–Грина,  $\mathbf{N}_0$  – нормаль к прообразу межфазной границы  $\overset{\circ}{\Gamma}$ , внешняя к области «+»;  $\overset{\circ}{\mathbf{S}}_\pm$  – тензоры напряжений Пиолы–Кирхгоффа, определенные относительно конфигурации  $\overset{\circ}{V}$ ,  $\rho_-^\circ$  – плотность материала в ненапряженном фазовом состоянии «-»,  $\rho_+^\circ$  – плотность материала в ненапряженном фазовом состоянии «+», пересчитанная как масса фазы «+» на единицу объема фазового состояния «-». Если порция фазы «-»  $dm_-$  превращается в порцию фазы «+»  $dm_+$ , то  $dm_- = \rho_-^\circ d\overset{\circ}{V}$ ,  $dm_+ = \rho_+^\circ d\overset{\circ}{V}$ . Конечно, в случае бездиффузионных фазовых переходов  $\rho_+^\circ = \rho_-^\circ = \rho^\circ$ , но это не так в случае химических реакций.

В квазистатике диссипация определяется нормальной компонентой тензора Эшелби:

$$D_0 = -\overset{\circ}{W} \mathbf{N}_0 \cdot [\mathbf{b}] \cdot \mathbf{N}_0. \quad (4)$$

Следовательно, скачок нормальной компоненты тензора Эшелби является термодинамической (конфигурационной) силой, определяющей скорость границы согласно кинетическому уравнению вида

$$\overset{\circ}{\dot{W}} = W([\overset{\circ}{b}_{NN}]) , \quad (5)$$

так что  $[\overset{\circ}{b}_{NN}] \overset{\circ}{\dot{W}} \leq 0$ . В приближении линейной термодинамики  $\overset{\circ}{\dot{W}} = -k[\overset{\circ}{b}_{NN}]$ , где кинетический коэффициент  $k > 0$ .

Независимо было показано, что необходимым условием минимума энергии Гиббса двухфазного упругого тела является непрерывность нормальной компоненты тензора Эшелби на равновесной межфазной границе [18,19], аналогично непрерывности скалярного химического потенциала. Это вместе с соотношениями (1)–(4) привело к заключению о тензорности химического потенциала в случае деформируемого твёрдого тела и трактовке тензора Эшелби как тензора химического потенциала.

Таким образом, краевая задача определения равновесных двухфазных конфигураций включает уравнения механического равновесия, граничные условия на внешней поверхности двухфазного тела, условия непрерывности перемещений и усилий на межфазной границе и условие непрерывности нормальной компоненты тензора напряжений Эшелби. Решение в такой постановке может быть неединственным и, вообще говоря, дополняется анализом изменений энергии и устойчивости (напр., [20,21]).

В случае распространяющейся межфазной границы вместо условия равновесия имеем кинетическое уравнение (5) (см., напр., [22–25]), которое также может использоваться для описания эволюции возмущений при анализе устойчивости [21].

Анализ условий равновесия и построение точных нижних оценок энергии двухфазных микроструктур позволил также разработать процедуры построения предельных поверхностей фазового превращения в пространстве деформаций и построить диаграммы деформирования на пути фазового превращения [26–28].

### 3. Тензор химического сродства. В случае химической реакции



где  $V_-$ ,  $V_*$  и  $V_+$  – химические формулы исходного твёрдого и диффундирующего компонентов и продукта реакции,  $n_-$ ,  $n_*$  и  $n_+$  – стехиометрические коэффициенты, реакция поддерживается диффузией компонента  $V_*$  к фронту реакции. В этом случае, как показано в [29-31] (см. также [7]), диссипация энергии на фронте реакции

$$D_0 = A_{NN} \overset{\circ}{\omega}(\mathbf{N}), \quad (6)$$

где  $\overset{\circ}{\omega}(\mathbf{N})$  – скорость реакции на ориентированной площадке прообраза фронта реакции в отсчетной конфигурации исходного материала с нормалью  $\mathbf{N}$ ,  $A_{NN}$  – нормальная компонента тензора химического сродства. В квазистатическом приближении

$$\mathbf{A} = n_* M_* \mu_* \mathbf{I} + n_- M_- M_- - n_+ M_+ M_+ \quad (7)$$

где тензоры химического потенциала твёрдых компонентов равны тензорам Эшелби, деленным на плотности материала:

$$\mathbf{M}_- = f_- \mathbf{I} - \frac{1}{\rho_-^0} \mathbf{F}_-^T \cdot \overset{\circ}{\mathbf{S}}_-, \quad \mathbf{M}_+ = f_+ \mathbf{I} - \frac{1}{\rho_+^g} \mathbf{F}_+^T \cdot \overset{g}{\mathbf{S}}_+ = f_+ \mathbf{I} - \frac{1}{\rho_+^0} \mathbf{F}_+^T \cdot \overset{\circ}{\mathbf{S}}_+, \quad (8)$$

$\mu_*$  – химический потенциал диффундирующего компонента, зависит от концентрации диффундирующего компонента,  $M_{\pm}$  и  $M_*$  – молярные массы твердых и диффундирующего компонент реакции,  $\overset{g}{\mathbf{F}}_{\pm}$  и  $\overset{g}{\mathbf{S}}_{\pm}$  – градиенты деформаций и тензоры напряжений Пиолы–Кирхгоффа, определенные относительно отсчетной конфигурации  $\overset{g}{V}$  продукта реакции  $V_+$ ,  $\rho_+^g$  и  $\rho_+^0$  – плотности материала  $V_+$  в его отсчетной конфигурации и пересчитанная на отсчетную конфигурацию материала  $V_-$ . Тензорность сродства, как и тензорность химического потенциала, может быть объяснена тем, что в деформируемом теле химические реакции связаны с ориентированными площадками. На тензорность сродства также указывалось в [32, 33].

Из (6) видно, что нормальная компонента тензора химического сродства является конфигурационной силой, определяющей скорость реакции. Подставив нормальную компоненту тензора сродства в известное кинетическое уравнение [34], определяющее зависимость скорости реакции от скалярного сродства, получим

$$\overset{\circ}{\omega}(\mathbf{N}) = k_* \overset{\circ}{c} \left( 1 - \exp\left(-\frac{A_{NN}}{RT}\right) \right) \quad (9)$$

где  $\overset{\circ}{c}$  – концентрация диффундирующего компонента относительно отсчетной конфигурации исходного вещества,  $k_*$  – константа скорости реакции. Аналогичная формула может быть записана относительно отсчетной конфигурации продукта реакции. Скорости фронта относительно конфигураций  $\overset{\circ}{V}$  и  $\overset{g}{V}$  связаны со скоростями реакции соотношениями

$$\overset{\circ}{W} = \frac{n_- M_-}{\rho_-^0} \overset{\circ}{\omega}(\mathbf{N}), \quad \overset{g}{W} = \frac{n_+ M_+}{\rho_+^g} \overset{g}{\omega}(\mathbf{N}). \quad (10)$$

**5. Связанная задача механохимии.** Таким образом, постановка задачи о квазистатическом распространении фронта химической реакции в деформируемом теле включает:

– определяющее соотношение для диффузионного потока, уравнение диффузии с граничными условиями на внешней поверхности тела и условием на распространяющемся фронте реакции (балансом массы);

– уравнения механического равновесия в областях, занятых твердыми компонентами реакции, с граничными условиями на внешней поверхности тела и на фронте реакции;

– определяющие соотношения для твердых компонентов реакции;

– определяющее соотношение для химического потенциала диффундирующего компонента;

– кинетическое уравнение, определяющее скорость фронта реакции в зависимости от конфигурационной силы, зависящей от напряженно-деформированного состояния и концентрации диффундирующего компонента.

При этом необходимо также ответить на вопрос о том, как устроен фронт реакции: он может быть непроницаемым – когда все подводимое диффузией вещество поглощается химической реакцией – или частично проницаемым.

Напряжения могут влиять на скорость фронта реакции

– через прямое влияние на скорость реакции, когда именно скорость реакции ограничивает скорость распространения фронта (распространение фронта, контролируемое скоростью реакции);

– через влияние на диффузионный поток (см., напр., [35,36]), когда скорость реакции достаточно велика, и распространение фронта контролируется диффузией;

– диффузия также может породить напряжения.

Говоря о фронте химической реакции, следует также мотивировать наличие фронта, так как реакции могут быть нелокализованными, распределенными в объеме. В случае начально-краевой задачи с нестационарной диффузией могут рассматриваться два этапа:

– стадия первоначальной аккумуляции диффундирующего компонента (реакция не может начаться до тех пор, пока концентрация и поток диффундирующего компонента на границе не станут достаточными);

– запуск реакции на поверхности тела, отщепление фронта реакции от поверхности и его дальнейшее распространение; запасенная к этому моменту (на первой стадии) концентрация – начальное условие для этого этапа.

**6. Кинетика, блокирование и устойчивость фронта химической реакции.** Фронты реакций типа окисления или литизации кремния относятся фронтам, контролируемым скоростью реакции (см., напр., [5]). Согласно (9), (10), фронт реакции может распространяться только если  $A_{NN} \geq 0$ . При этом напряжения могут ускорять, замедлять (см., напр., примеры решения краевых задач [31, 37-40]) и блокировать реакцию. Если  $A_{NN} < 0 \forall N$ , то фронт не может распространяться ни в каких направлениях. Это приводит к понятию запретных зон в пространстве деформаций или напряжений, образованных деформациями (напряжениями), при которых распространение фронта прямой реакции невозможно [41, 42].

Еще одной особенностью задач описания фронтов химической реакции, в отличие от фазового перехода, является то, что химическая реакция в открытой системе начинается там, где подводится вещество (обычно снаружи тела). В случае фазового перехода область новой фазы возникает так, чтобы минимизировать энергию тела и, если не создаются специальные условия, например, подвод тепла, устойчивая новая фаза может возникать внутри тела. В случае химической реакции фронт реакции может запуститься в сторону неустойчивого состояния. Такая особенность химических реакций делает важным анализ устойчивости распространяющегося фронта реакции [43, 44]. Потеря устойчивости фронта реакции порождает концентрации напряжений, которые в свою очередь, могут приводить к разрушению.

*Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 121112500318-1).*

## Литература

1. Kao D, McVitie J, Nix W, Saraswat K (1988) Two dimensional thermal oxidation of silicon—II. Modeling stress effect in wet oxides // IEEE Trans Electron Devices ED-35, P. 25-37;
2. Бойко В.С., Гарбер Р.И., Косевич А.М. Обратимая пластичность кристаллов. М.: Наука, 1991. 280 с.;
3. Buttner, C., Zacharias, M.: Retarded oxidation of *Si* nanowires // Applied physics letter. 2006. V. 89. P. 263106;
4. Heidemeyer H, Single C, Zhou F. et al. Self-limiting and pattern dependent oxidation of silicon dots fabricated on silicon-on-insulator material // Journal of Applied Physics. 2000. V. 8. P. 4580–4585;
5. Jia, Z., Li, T.: Stress-modulated driving force for lithiation reaction in hollow nanodes // Journal of Power Sources. 2015. V. 275. P. 866–876;
6. McDowell M.T., Lee S.W., Nix W.D., Cui Y. (2013b) 25<sup>th</sup> anniversary article: understanding the lithiation of silicon and other alloying anodes for lithium-ion batteries. Adv. Mater. V. 25. P. 4966–4985;
7. Freidin, A.B., Vilchevskaya, E.N.: Chemical affinity tensor in coupled problems of mechanochemistry // Encyclopedia of Continuum Mechanics / Ed. By Altenbach, H. et al., Springer, Berlin, Heidelberg. 2020;
8. Maugin G. Configurational Forces. Thermomechanics, Physics, Mathematics, and Numerics. London, New York : Chapman & Hall/CRC Boca Raton. 2011. 527 p.;
9. Gurtin M. E. Configurational Forces as Basic Concepts of Continuum Physics. Berlin : Springer, 2000. 249 p. (Applied Mathematical Sciences. Vol. 137);
10. Kienzler R., Herrmann G. Mechanics in Material Space with Application to Defect and Fracture Mechanics. Berlin: Springer, 2000. 307 p.;
11. Abeyaratne R., Knowles J.K. Evolution of phase transformation. A continuum theory. Cambridge: Univ. Press, 2006. 242 p.;
12. Фрейдин А. Б. О конфигурационных силах в механике фазовых и химических превращений // Прикладная математика и механика, 2022, Т. 86, № 4, С. 571–583;
13. Wilmanski K. Thermomechanics of continua. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1998. 273 p.;
14. Šilhavy M. The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1997. 517 p.;
15. I-Shih Liu. On interface equilibrium and inclusion problems // Continuum Mech. Thermodyn. 1992. V.4. P. 177-186;
16. Eshelby J.D. Energy relations and the energy-momentum tensor in continuum mechanics // Inelastic Behavior of Solids / Ed. by M. Kanninen et al. New York: McGraw-Hill, 1970. P. 77–115;
17. Eshelby J.D. The elastic energy-momentum tensor // J. Elasticity. 1975. V. 5. № 4. P. 321–335;
18. Гринфельд М.А. Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 4. С. 824-828;
19. Гринфельд М.А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука. 1990. 312 с.;
20. Freidin A.B., Fu Y.B., L.L. Sharipova L.L., Vilchevskaya E.N. Spherically symmetric two-phase deformations and phase transition zones // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. P. 4484–4508;
21. Еремеев В.А., Фрейдин А.Б., Шарипова Л.Л. Об устойчивости равновесия двухфазных упругих тел // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 1. С. 61-84;

22. Mueller R., Gross D. 3D inhomogeneous, misfitting second phase particles equilibrium shapes and morphological development // *Computational Materials Science*. 1999. Vol. 16. P. 53-60;
23. Freidin A.B., Eremeyev V.A. On Kinetic nature of hysteresis phenomena in stress-induced phase transformations. In: *Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures* / Ed. by H. Altenbach et al. // *Advanced Structured Materials*. 2019. Vol. 103. P. 223-229;
24. Eremeyev V.A., Altenbach H. Configurational forces in the theory of two-phase plates. In: *IUTAM Symposium on Progress in the Theory and Numerics of Configurational Mechanics. Proceedings of the IUTAM Symposium held in Erlangen, Germany, 20-24 October 2008.* / Ed. by Steinmann P. 2009. Springer. Dordrecht, Heidelberg, London, New York. P. 121-130;
25. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. Thermomechanics of shells undergoing phase transition // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2011. Vol. 59. P. 1395-1412;
26. Antimonov M.A., Cherkaev A., Freidin A.B. Phase transformations surfaces and exact energy lower bounds // *Int. J. Eng. Sci.* 2016, Vol. 98. P. 153–182;
27. Freidin A., Sharipova, L. Two-phase equilibrium microstructures against optimal composite microstructures // *Arch. Appl. Mech.* 2019. Vol. 89(3). P. 561–580;
28. Freidin A.B., Leah L. Sharipova L.L., Cherkaev A.V. On equilibrium two-phase microstructures at plane strain // *Acta. Mech.* 2021. Vol. 232, P. 2005–2021;
29. Freidin A.B. Chemical affinity tensor and stress-assist chemical reactions front propagation in solids // *ASME 2013 Int. Mech. Engng. Congr. and Exposition. V. 9: Mechanics of Solids, Structures and Fluids*. San Diego, California, USA, 2013. Paper No. IMECE2013-64957. P. V009T10A102;
30. Фрейдin А.Б. О тензоре химического сродства при химических реакциях в деформируемых материалах // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2015. №3. С. 35-68;
31. Freidin A., Vilchevskaya E., Korolev I. Stress-assist chemical reactions front propagation in deformable solids // *Int. J. Eng. Sci.* 2014. V. 83. P. 57-75;
32. Русанов А.И. Термодинамические основы механохимии. СПб.: Наука. 2006. 221 с.;
33. Rusanov, A.I.: Surface thermodynamics revisited. // *Surface Science Reports*. 2005. V. 58. P. 111–239;
34. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 280 с.;
35. Knyazeva, A.: Cross effects in solid media with diffusion // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2003. Vol. 44, P. 373–384;
36. Knyazeva, A.: Application of irreversible thermodynamics to diffusion in solids with internal surfaces // *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 2022. Vol. 45(4). P. 401–418;
37. Poluektov M., Freidin A.B., Figiel L. Modelling stress-affected chemical reactions in non-linear viscoelastic solids with application to lithiation reaction in spherical Si particles // *International Journal of Engineering Science*. 2018. V. 128, P. 44–62;
38. Morozov A., Freidin A.B., Klinkov V.A., Semencha A.V., Müller W.H., Hauck T. Experimental and theoretical studies of Cu-Sn intermetallic phase growth during high-temperature storage of eutectic snag interconnects // *Journal of Electronic Materials*, 2020. Vol. 49, No. 12. P. 7194-7210;
39. Petrnko S., Freidin A.B., Charkaluk E. On chemical reaction planar fronts in an elastic–viscoelastic mechanical framework // *Continuum Mech. Thermodyn.* 2022. Vol. 34. P. 137–163;

40. Freidin A.B., Korolev I.K., Aleshchenko S.P. FEM-simulations of a chemical reaction front propagation in an elastic solid with a cylindrical hole // *Mechanics and Control of Solids and Structures/ Ed. by Polyanskiy V.A. et al. (Advanced Structured Materials, V. 164) 2022, P. 195-208;*

41. Фрейдin А.Б., Шарипова Л.Л., Морозов Н.Ф. О блокирующих деформациях в механохимии фронтов химических реакций // *Чебышевский сборник. 2017. Т. 18. №3. (63). С. 475-487;*

42. Freidin A. B., Sharipova L. L., Forbidden strains and stresses in mechanochemistry of chemical reaction fronts. In: *Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials 1/ Ed. by Altenbach H. et al (Advanced Structured Materials. V. 89), Springer, Cham. 2018. P. 335- 348;*

43. Морозов А.В., Фрейдin А.Б., Мюллер В. Устойчивость фронтов химических превращений вблизи состояния блокирования // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 3. С. 58-64;*

Morozov A.V., Freidin A.B., Müller W.H. Stability of chemical reaction fronts in the vicinity of a blocking state // *PNRPU Mechanics Bulletin. 2019. No. 3. P. 58-64 (2019);*

44. Freidin A., Morozov A., Müller W.H. Propagation and stability of chemical reaction fronts in coupled problems of mechanochemistry. 2021 AIP Conference Proceedings 2371, 020002.

**Д.С. Лисовенко<sup>1</sup>, В.А. Городцов<sup>1</sup>**

## **РАСТЯЖЕНИЕ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ, СОДЕРЖАЩИХ АУКСЕТИЧЕСКИЙ СЛОЙ**

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН*

Изделия, изготовленные из материалов различных структур с различными значениями и знаками коэффициентов Пуассона все шире используются в настоящее время [1]. Тем не менее, редкие упоминания о материалах с отрицательными коэффициентами Пуассона встречались до публикации [2], в которой впервые были получены экспериментально полимерные пены с отрицательным коэффициентом Пуассона. Материалы с такими упругими свойствами стали называться ауксетиками. В настоящее время развивается широкое изучение ауксетиков среди метаматериалов, полимерных материалов, пенопластов, цеолитов и кристаллов [3].

Анализ упругих свойств анизотропных кристаллов показал, что ауксетики составляют значительную долю кристаллов большинства кристаллических систем [4,5]. Ауксетики встречаются даже более часто среди цилиндрических трубок, образованных сворачиванием кристаллических пластин [6,7].

Статьи [8,9] инициировали изучение роли ауксетиков в слоистых композитах, в которых упругое поведение становится еще разнообразнее. В этих работах было показано, что наиболее существенное отклонение от предсказания правила смеси было для ауксетико-неауксетических пластин.

В работе проанализировано продольное и поперечное растяжение тонких двухслойных пластин из гексагональных кристаллов.

Дан теоретический анализ продольного растяжения тонкой прямоугольной двухслойной пластины, образованной из гексагональных кристаллов с одинаковой ориентацией. Эффективные упругие свойства (модуль Юнга и коэффициенты Пуассона) пластины оказываются зависящими от таких свойств составляющих пластины кристаллов, как знак и величина коэффициентов Пуассона, отношение модулей Юнга и отношение толщин слоев. Эти зависимости могут быть как простыми, так и сложными. Показано, что эффективный модуль Юнга пластины всегда превосходит результат, вычисленный по правилу смесей Фойгта. Однако при небольших различиях модулей Юнга и коэффициентов Пуассона исходных кристаллов точность предсказания эффективного модуля Юнга по правилу смесей оказывается вполне удовлетворительной. Эффективный продольный коэффициент Пуассона пластины может быть как больше, так и меньше предсказаний по правилу смесей. В случае одинаковой толщины слоев пластин, образованных из пар неауксетиков, предсказание правила смеси часто остается также приемлемым. Иной результат получен для пластин типа ауксетик-неауксетик. Значительные отличия эффективного продольного коэффициента Пуассона от предсказания правила смеси установлены для ауксетика дисульфида молибдена в одном из равной толщины слоев. Найдено, что эффективный модуль Юнга для пластин из дисульфида молибдена и неауксетиков в ряде случаев может превосходить модули Юнга пар исходных кристаллов, что невозможно при выполнении правила смеси. Изменение толщины слоя ауксетика двухслойных пластин ауксетик-неауксетик с неравными толщинами слоев позволило управлять величиной отрицательного эффективного продольного коэффициента Пуассона слоистого композита.

Дается теоретический анализ поперечного растяжения тонкой двухслойной пластины, образованной из гексагональных кристаллов с одинаковой ориентацией. Получены формулы для эффективных поперечных модулей Юнга и эффективных поперечных коэффициентов Пуассона. Показано, что эффективный модуль Юнга в большинстве случаев превосходит среднее по Ройссу, так что правило смесей нарушается. Равенство этих характеристик возможно только при равенстве отношений поперечных модулей Юнга и отношений поперечных коэффициентов Пуассона исходных кристаллов, заполняющих слои пластинки. Кроме того эффективные характеристики двухслойных пластин могут превосходить упругие характеристики исходных кристаллов, а эффективные коэффициенты Пуассона могут быть также меньше последних. Общие теоретические заключения подтверждены численными оценками, использующими экспериментальные значения упругих постоянных известных гексагональных кристаллов.

*Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-29-01200).*

#### Литература

1. Kolken H.M.A., Zadpoor A.A. Auxetic mechanical metamaterials // RSC Adv. 2017. V.7. N 9. P.5111-5129;
2. Lakes R.S. Foam structures with a negative Poisson's ratio // Science. 1987. V. 235. N 4792. P.1038-1040;
3. Lim T.-C. Auxetic materials and structures – Springer Singapore, 2015. 588 p.



4. Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Ауксетики среди материалов с кубической анизотропией // Известия РАН. МТТ. 2020. N 4. С.7-24;
5. Lethbridge Z.A.D., Walton R.I., Marmier A.S.H., Smith C.W., Evans K.E. Elastic anisotropy and extreme Poisson's ratios in single crystals // Acta Mater. 2010. V. 58. N 19. P.6444-6451;
6. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С., Волков М.А. Отрицательный коэффициент Пуассона для кубических кристаллов и нано/микротрубок // Физическая мезомеханика. 2013. Т.16. N 6. С.13-31;
7. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovento D.S., Volkov M.A. Negative Poisson's ratio for 6-constant tetragonal nano/microtubes // Phys. Status Solidi B. 2015. V.252. N 7. P.1580-1586;
8. Lim T.-C. On simultaneous positive and negative Poisson's ratio laminates // Phys. Status Solidi B. 2007. V.244. N 3. P.910-918;
9. Kocer C., McKenzie D.R., Bilek M.M. Elastic properties of a material composed of alternating layers of negative and positive Poisson's ratio // Mater. Sci. Eng. A. 2009. V.505. N 1-2. P.111-115.

**Е.В. Мурашкин<sup>1</sup>**

## **КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НАРАЩИВАНИЯ 3D МАТЕРИАЛОВ В ТЕРМИНАХ ПСЕВДОТЕНЗОРОВ**

<sup>1</sup>*Институт проблем механики РАН*

В работе обсуждаются вопросы формулировки и решения краевых задач механики поверхностного наращивания 3D материалов. Рассматриваются возможные обобщения моделей поверхностного роста Арутюняна. Сравниваются подходы к определению дифференциальных ограничений на поверхности наращивания. Приводятся основные сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. Рассмотрены различные релации ковариантных производных псевдотензорных полей. Указываются преимущества использования псевдотензорного формализма для вывода определяющих соотношений и динамических уравнений в процессах наращивания микрополярных материалов.

Быстрое развитие и внедрение методов аддитивного производства в современную технологическую практику требует развития методов математического моделирования процессов повехностного наращивания 3D материалов. В случае современных мета и био материалов классические континуальные модели [1-4] накладывают существенные ограничения на их использование. Математическое моделирование подобных технологических процессов требует привлечения методов современной геометрии и тернзорного анализа [5-9]. При моделировании микрополярных свойств чувствительных к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства оказывается удобным использование пседотензорного формализма и теории ориентируемых многообразий [10-14].

Уравнения механики растущих деформируемых твердых тел обычно записываются в скоростях искомым величин в эйлеровых координатах. Процесс по-

верхностного наращивания связан с распространением в пространстве поверхности. В настоящей работе мы будем пользоваться обозначениями и терминологией принятой в публикациях [10-14]. Распространяющуюся поверхность наращивания  $\Sigma$  в трехмерном пространстве зададим неявным уравнением

$$t = \tau(x^i). \quad (1)$$

Единичный вектор нормали  $n_i$  в этом случае связан с пространственным градиентом (1)

$$n_i = c \partial_i \tau, \quad c = |\nabla \tau|^{-1} \quad (t = \tau), \quad (2)$$

где  $c$  — линейная скорость распространения растущей поверхности в нормальном направлении  $n_k$ .

Для преобразования уравнений равновесия воспользуемся формулами восстановления для актуальных компонент тензора силовых напряжений  $\sigma^{ij}$

$$\sigma^{ij} = \int_{\tau+0}^t [\partial \sigma^{ij}(x^s, t')] dt' + \mathcal{S}^{ji} + \sigma_*^{ij}(x^s), \quad \mathcal{S}^{ij} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial \sigma^{ij}(x^s, t')] dt', \quad (3)$$

тогда в результате несложных преобразований можем получить

$$c[\nabla_j \sigma_*^{ji}(x^s) + \nabla_j \mathcal{S}^{ji} + X_*^i(x^s)] - n_j \partial_i \sigma^{ji}(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau+0). \quad (5)$$

В уравнениях (3)–(5) мы используем обозначения, принятые в [1]:  $\mathcal{S}^{ji}$  — интеграл, связанный со скачком напряжений,  $\sigma_*^{ij}(x^s) = \sigma^{ij}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$  — компоненты тензора напряжений, соответственно, вычисленные в момент  $t = \tau(x^s) - 0$  прямо перед включением элемента в основное твердое тело,  $X_*^i(x^s) = X^i(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)+0}$ . Момент  $t = \tau(x^s) + 0$  соответствует моменту сразу после прикрепления элемента к растущей поверхности.

Формулы для компонент псевдотензора моментных напряжений по аналогии с уравнениями (3) можно примем в форме

$$\mu_{.k}^{[-1]^i} = \int_{\tau+0}^t [\partial \mu_{.k}^{[-1]^i}(x^s, t')] dt' + \mathcal{M}_{.k} + \mu_{.k}^{[-1]^i}(x^s), \quad \mathcal{M}_{.k} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial \mu_{.k}^{[-1]^i}(x^s, t')] dt', \quad (6)$$

где  $\mathcal{M}_{.k}^{[-1]^i}$  — интеграл, связанный со скачком моментных напряжений,  $\mu_{.k}^{[-1]^i}(x^s) = \mu_{.k}^{[-1]^i}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$  компоненты тензора моментных напряжений, вычисленные во время  $t = \tau(x^s) - 0$ .

Следуя процедуре, описанной в работах [8], для моментных напряжений получим

$$c[\nabla_i \mu_{.k}^{[-1]^i}(x^s) + \nabla_i \mathcal{M}_{.k} - 2 \tau_{.k}^{[-1]} + Y_{.k}^{[-1]}] - n_i \partial_i \mu_{.k}^{[-1]^i}(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau+0). \quad (8)$$

В общем случае силовых  $\sigma_*^{ij}$  и моментных напряжений  $\mu_{.k}^{[-1]^i}$  выражаются через актуальными напряжения и пары на растущей поверхности с помощью

тензорных материальных уравнений следующим образом

$$\sigma_*^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}(\sigma^{ij}, \mu_{.j}, n_i, \dots), \quad \mu_*^{ik} = \mathfrak{Z}_{.k}(\sigma^{ik}, \mu_{.k}, n_k, \dots), \quad (9)$$

Функции  $\mathfrak{F}_{ij}$  и  $\mathfrak{Z}_{.k}$  могут быть определены методом черного ящика, характеризующим параметры оценки во временном интервале  $\tau - 0 \leq t \leq \tau + 0$  прямо перед прикреплением элементов к растущему телу. "Черный ящик" может быть связан с различными физическими явлениями.

Следуя вышеизложенным обсуждениям мы можем получить дифференциальные ограничения на распространение растущей поверхности, являющейся поверхностью уровня псевдоскалярного поля. В процессе роста максимальная интенсивность касательных напряжений может быть достигнута на контактной (растущей) поверхности между основным твердым телом и растущей частью. Определим растущую поверхность как поверхность уровня псевдоскалярной функции неявным уравнением

$$t = \tau_*^{[W]}(x^i). \quad (10)$$

Дифференциальные ограничения в этом случае принимают вид

$$c \left[ \nabla_j t_*^{ji}(x^k) + X_*^i(x^k) \right] - n_j \left. \frac{\partial t^{ji}(x^k)}{\partial t} \right|_{t = \tau_*^{[W]}(x^k)} = 0. \quad (11)$$

Искомые компоненты тензора напряжений могут быть получены согласно формулам восстановления

$$t^{ij} = \int_{\tau_*^{[W]}}^{t^{[W]}} \left[ \frac{\partial t^{ij}(x^k, t)}{\partial t} \right] d t + t_*^{ij}(x^k). \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) представляют собой обобщенные граничные условия на растущих поверхностях, которые можно использовать для широкого класса материалов, включая тканые композиты.

*Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект № 20-01-00666.*

### Литература

1. Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226–902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6\_2;
2. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. 579 p.;
3. Maugin G. A. Material inhomogeneities in elasticity. – CRC Press, 2020;
4. Весоловский З. Динамические задачи нелинейной теории упругости. Научная думка, 1981. 216 с.;
5. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука. 1966. 648 с.;
6. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.];

7. Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi+324 pp.;
10. Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 1951. 275 pp.;
8. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ: с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматлит, 1963. 411 с.;
9. Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.];
10. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, No 4. С. 399–412.
11. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, No 3. С. 424–444;
12. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, No 4. С. 752–761;
13. Yu. N. Radayev, E. V. Murashkin, and T. K. Nesterov On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2022. Т. 26, No 1. Pp. 40–51;
14. Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона-Кэли // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 130-138.

*Научное издание*

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ  
МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА  
И ПРОГРЕССИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
В МЕТАЛЛУРГИИ И МАШИНОСТРОЕНИИ**

Материалы VI Дальневосточной конференции  
с международным участием  
Комсомольск-на-Амуре, 5-7 октября 2022 г.

Ответственный редактор А. И. Евстигнеев,  
доктор технических наук, профессор

Редакторы электронной верстки  
С. Г. Жилин, О. Н. Комаров

Подписано в печать 01.09.2022.  
Формат 60×84 1/16. Бумага 65 г/м<sup>2</sup>. Ризограф EZ570E  
Усл. печ. л. 14,21. Уч.-изд. л. 13,80. Тираж 100 экз. Заказ 30655.

Оригинал-макет изготовлен в Федеральном государственном бюджетном  
учреждении науки «Институт машиноведения и металлургии  
Дальневосточного отделения Российской академии наук»  
681005, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1

Отпечатано в полиграфической лаборатории  
Федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования  
«Комсомольский-на-Амуре государственный университет»  
681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.