ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В ЗАДАЧАХ

Введение

Ежедневно, в производственной деятельности и в быту, возникают такие ситуации, в которых появляется потребность в массовом обслуживании. Очень часто обслуживающие организации располагают ограниченными возможностями удовлетворения спроса на обслуживание. Это, как правило, приводит к созданию очередей. Примеры подобных явлений встречаются на каждом шагу: парикмахерские, больницы, ремонтные мастерские, на остановках общественного транспорта, задержка ремонта бытовых приборов в ателье по обслуживанию населения и т.д. Хотя приведенные примеры взяты из различных областей человеческой деятельности, всем им присущи формальные одинаковые признаки, которые позволяют их описать с помощью одного и того же математического аппарата.

Целью данной работы является практическое применение теории массового обслуживания в задачах.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

- рассмотреть, что собой представляет теория массового обслуживания;
- рассмотреть, какой поток называется пуассоновским;
- представить этапы решения задач массового обслуживания.

Теория массового обслуживания изучает процессы, в которых, с одной стороны, постоянно возникают запросы на выполнение каких-либо работ, а с другой – происходит постоянное удовлетворение этих запросов. Та часть процесса, в которой возникают запросы, называется обслуживаемой системой, а та, которая принимает запросы и удовлетворяет их – обслуживающей. Совокупность обслуживающей и обслуживаемой систем составляет систему массового обслуживания.

Первой характерной особенностью системы массового обслуживания является наличие некоторого потока (протяженного во времени) одинаковых по свойствам требований (заявок, объектов, событий).

Для того, чтобы математически описать систему массового обслуживания, необходимо описать свойства входящего потока однородных требований.

Общей особенностью всех задач, связанных с массовым обслуживанием, является случайный характер исследуемых явлений. Количество Требований на обслуживание и временные интервалы между их поступлениями, длительность обслуживания требований случайны. Время пребывания требований в некоторых видах систем массового обслуживания также случайно.

Задача теории массового обслуживания состоит в первую очередь в выработке общих методов, применяемых не только к решению тех частных задач, на базе которых была начата ее разработка, но множества других быть может, даже очень далеких по своей формулировке от первоначальных.

1 Пуассоновский поток

Существуют две наиболее распространенные системы массового обслуживания: система с потерями и система с ожиданием. Далее будет рассмотрен стационарный пуассоновский поток требований на обслуживание.

Изучение того потока требований, который поступает на обслуживающий прибор - первичная задача, с которой должно начаться каждое серьезное исследование по теории массового обслуживания. Причем чаще рассматривается простейший случай потоков, т.е. таких, которые обладают тремя основными свойствами:

а) ординарностью, т.е. вероятность того, что за малый отрезок времени поступит больше одного требования, пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью того, что за этот отрезок времени поступит ровно одно требование.

Практически свойство ординарности потока означает невозможность поступления одновременно двух или более требований;

б) стационарностью - такой поток, что для любой группы из конечного числа непересекающихся отрезков времени вероятность появления в них соответственно k_1, $k_2,\ldots,k_n$ требований зависит только от этих чисел и от длин указанных промежутков времени, но не зависит от их расположения на оси времени;

в) отсутствием последствий, т.е., если для любых двух непересекающихся участков времени, число требований, поступающих в систему на одном из них, не зависит от числа требований, поступающих на другом.

Поток требований, удовлетворяющий трем сформулированным условиям, называется пуассоновским.

Эти три свойства (стационарность, отсутствие последействия, ординарность), которыми определен простейший поток, полностью характеризуют его структуру с точностью до значения параметра потока λ, которое может быть любым положительным числом. Два простейших потока могут отличаться друг от друга только значениями этого параметра.

Интенсивностью потока называется математическое ожидание числа требований, поступающих за единицу времени

$$\mu = \lambda,$$

Если интенсивность потока обозначить за μ, а параметр потока через λ, то для простейшего потока интенсивность совпадает с параметром потока $\mu = \lambda$, а для любого стационарного потока $\mu \geq \lambda$.

В практических задачах, связанных с изучением входного потока требований, удобно исследовать распределение интервалов времени между появлениями соседних требований. Если моменты поступления требований в систему распределены по закону Пуассона, то промежутки между требованием имеют показательное распределение.

Время обслуживания является важнейшей характеристикой каждого обслуживающего прибора, определяющей пропускную способность системы массового обслуживания. Оно показывает, сколько времени затрачивается на обслуживание одного требования в данном обслуживающем приборе. В общем случае время обслуживания является случайной величиной. Обслуживание одного требования можно вычислить по формуле, где μ - интенсивностью обслуживания

$$T_{\text{об}} = \frac{1}{\mu},$$

$$\mu = \frac{1}{T_{\text{об}}}.$$

2 Этапы решения задач массового обслуживания

Введем величину ρ, которая равна $\frac{\lambda}{\mu} = \lambda T_{\text{об}}$. На вход n-канальной системы массового обслуживания поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Время обслуживания каждого требования распределено по показательному закону с параметром μ. Необходимо, чтобы $\rho < n$.

Для решения практических задач по теории массового обслуживания имеется ряд формул с использованием введенных параметров. Если обозначить через $P_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t в системе находится k требований, тогда можно сказать, что задача состоит в том, чтобы найти явное выражение функций $P_k(t), (k = 0,1, \dots, n)$ через параметры системы μ, n, λ.

Шаг 1. Необходимо вычислить вероятность того, что в системе нет ни одного требования:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}}.$$

Шаг 2. Необходимо вычислить вероятность того, что все приборы будут заняты в какой-то наудачу взятый момент. Используем формулу:

$$\pi = \frac{\rho^n P_0}{(n-1)!\,(n-\rho)}.$$

Шаг 3. Для задачи с ожиданием основной характеристикой качества обслуживания является длительность ожидания требованием начала обслуживания. Средняя длительность ожидания вычисляется по формуле:

$$\alpha = \frac{\pi}{\mu(n-\rho)}.$$

Шаг 4. Можно найти среднюю потерю времени требованиями, пришедшими в систему обслуживания в течение промежутка времени T. Общая потеря времени на ожидание в среднем равна

$$z = \alpha\lambda T.$$

Шаг 5. При решении задач массового обслуживания с очередью нужны такие характеристики, как средняя длина очереди. Для этого используется формула:

$$M_1 = \frac{\rho}{n(1-\frac{\rho}{n})^2} \cdot P_{n,}$$

где $P_n = \pi\left(1 - \frac{\rho}{n}\right).$

Шаг 6. Следующее, что необходимо найти – среднее число требований в системе обслуживания:

$$M = M_1 + \frac{n^2 P_n}{n-\rho} + P_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^k}{(k-1)!}.$$

Шаг 7. Среднее число простаивающих аппаратов определяется следующим образом:

$$N_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) P_k,$$

где $P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0.$

Шаг 8. Коэффициент простоя аппаратов:

$$K_n = \frac{N_n}{n}.$$

3 Решение задачи с очередью

Рассмотрим конкретную задачу, решение которой проведем по описанному выше плану.

Система массового обслуживания – стоматология. В системе работают n стоматологов, к которым устанавливается неограниченная очередь. Поток пациентов, поступающих в стоматологию, является пуассоновским с интенсивностью λ пациентов в час. На лечение каждого из них стоматолог тратит в среднем $T_{\text{об}}$ часа.

Проанализировать работу стоматологии в течение времени t при следующих численных значениях переменных величин: $n = 3,\ \lambda = 4,\ T_{\text{об}} = 0{,}5,\ T = 8$.

Решение. Для начала нужно вычислить параметр ρ и проверить выполнение условия $\rho < n$.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda T_{\text{об}} = 2.$$

Получаем, что $2 < 3$, следовательно, задача имеет решение.

$$\mu = \frac{1}{T_{\text{об}}} = \frac{1}{0{,}5} = 2\ (\text{чел}/\text{ч}).$$

1. Вероятность того, что в системе нет ни одного клиента

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}} = \frac{1}{1+2+3+1{,}3333+\frac{2^4}{3!}} = \frac{1}{6{,}6667} = 0{,}15.$$

2. Найдем вероятность того, что все стоматологи заняты

$$\pi = \frac{\rho^n P_0}{(n-1)!(n-\rho)} = \frac{2^3 \cdot 0{,}15}{2!} = 0{,}6.$$

3. Средняя длительность ожидания начала обслуживания одним клиентом

$$\alpha = \frac{\pi}{\mu(n-\rho)} = \frac{0{,}6}{2(3-2)} = 0{,}3\ (\text{ч}).$$

4. Средняя потеря времени клиентами, пришедшими в систему обслуживания в течение 8 часов

$$z = \alpha\lambda T = 0{,}3 \cdot 2 \cdot 8 = 4{,}8\ (\text{ч}).$$

5. Средняя длина очереди

$$M_1 = \frac{\rho}{n\,(1-\frac{\rho}{n})^2} \cdot P_n,$$

$$P_n = \pi(1-\frac{\rho}{n}) = 0{,}6(1-\frac{2}{3}) = 0{,}2,$$

$$M_1 = \frac{2}{3(1-\frac{2}{3})^2} \cdot 0{,}2 = 1{,}2(\textit{чел.})$$

6. Среднее число клиентов в системе обслуживания

$$M = M_1 + \frac{n^2 P_n}{n-\rho} + P_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^k}{(k-1)!} = 1{,}2 + 9 \cdot 0{,}2 + 0{,}15 \cdot 6 = 7{,}5(\text{чел.}).$$

7. Среднее число стоматологов, свободных от обслуживания

$$N_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) P_k,$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0,$$

$$P_1 = 2 \cdot 0{,}15 = 0{,}3;$$

$$P_2 = \frac{2^2}{2!} 0{,}15 = 0{,}3;$$

$$N_n = \sum_{k=0}^{2} (3-k) P_k = 1{,}35(\text{чел.}).$$

8. Коэффициент простоя мастеров

$$K_n = \frac{N_n}{n} = \frac{1{,}35}{3} = 0{,}45(\text{ч}).$$

Итак, проведенный анализ показал, с какими потерями, занятостью и простоями работает данная система массового обслуживания. В пункте 2 можно увидеть, что стоматологи заняты только на 60% . К ним выстраивается очередь, в среднем, из одного человека (пункт 5). Пункт 3 указывает на то, что пациент, стоящий в очереди, в среднем, ожидает обслуживания 0,3 часа. В среднем за 8 часов работы стоматологии пациенты теряют 4,8 часов в день.

Список используемых источников

1 Саати, Томас Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения = Elements of Queueing Theory with Applications / Т. Л. Саати ; пер. с англ. Е. Г. Коваленко ; под ред. Ин. Н. Коваленко ; предисл. Б. В. Гнеденко. - 3-е изд. - М. : ЛИБРОКОМ, 2010.

2 Дубров А.М. Компонентный анализ и эффективность в экономике / А.М. Дубров. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 352с.

3 Таха, Хэмди. Введение в исследование операций / Х. Таха; пер. с англ. В. И. Тюпти, А. А. Минько. - 6-е изд. - М. : Вильямс, 2001.

4 Лабскер Л.Г. – Теория массового обслуживания в экономической сфере: Учебное пособие для вузов / Л.Г. Лабскер, Л.О. Бабешко. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. – 319с.