Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 5–12

Л. В. Ковтанюк[1], *Г. Л. Панченко*[1,2], *Е. О. Попова*[1]

К МОДЕЛИРОВАНИЮ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ УПРУГИХ СРЕД

[1]*Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия*

[2]*Владивостокский государственный университет, г. Владивосток, Россия*

Аннотация. Для разномодульных нелинейных упругих изотропных сред рассмотрены деформации изменения формы. С использованием предложенных модельных соотношений получено решение краевой задачи о прямолинейном движении среды в круглой трубе под действием переменного перепада давления. Приводится сравнение полученных результатов с точным решением для нелинейной упругой изотропной среды.

Ключевые слова: упругость, разномодульные среды, большие деформации.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.001

УДК: 539.371

Обычно в качестве разномодульных сред рассматривают материалы с различным сопротивлением растяжению и сжатию, к которому приводит наличие микродефектов в реальных материалах, например, в горных породах.В общем случае различие свойств материалов наблюдается и при деформациях изменения формы. Моделирование таких свойств материалов неоднократно рассматривалось в механике, как на стадии обратимого деформирования, так и необратимого. Соответствующие модели описаны давно и достаточно подробно [1–6]. Классическая теория идеально упругих

Ковтанюк Лариса Валентиновна
`e-mail:` lk@iacp.dvo.ru, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.
Панченко Галина Леонидовна
`e-mail:` panchenko@iacp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия, доцент Владивостокского государственного университета, г. Владивосток, Россия.
Попова Елена Олеговна
`e-mail:` polenao@bk.ru, аспирант, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.

Поступила 10.01.2023

тел может быть построена на основе потенциала напряжений, который в случае изотропной среды является функцией инвариантов напряжений. Выбирать такие инварианты можно по-разному. Предложение выбирать в качестве второго инварианта интенсивность напряжений содержится, например, в [7, 8]. Здесь рассмотрим деформации изменения формы в нелинейно упругих материалах, аналогично [7, 8] выбирая интенсивность деформаций вторым инвариантом.

1. Пусть деформированное состояние нелинейной упругой изотропной среды характеризует тензор деформаций Альманси d_{ij}

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}\right), \tag{1}$$

где u_i — компоненты вектора перемещений.

Для несжимаемой среды компоненты тензора напряжений Эйлера — Коши σ_{ij} связаны с деформациями d_{ij} формулой Мурнагана

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}\left(\delta_{kj} - 2d_{kj}\right). \tag{2}$$

Здесь p — добавочное гидростатическое давление, W — упругий потенциал. Для изотропной несжимаемой среды W является функцией инвариантов тензора деформаций: $W = W\left(I_1, I_2\right)$. Выберем инварианты тензора Альманси I_1, I_2 в виде

$$\begin{gathered} I_1 = \frac{1}{3}\left(d_1 + d_2 + d_3\right) = \frac{1}{3}\left(d_{11} + d_{22} + d_{33}\right) = \frac{1}{3}d_{kk} = d, \\ I_2 = \frac{3}{2}\left((d_1 - d)^2 + (d_2 - d)^2 + (d_3 - d)^2\right). \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь d_1, d_2, d_3 — главные значения тензора деформаций d_{ij}. Инвариант I_2 в таком случае равен квадрату интенсивности деформаций. Исключая d_1, d_2, d_3 из (3), запишем его в форме

$$I_2 = \frac{3}{2}\left(d_{ik}d_{ki} - \frac{1}{3}d_{kk}^2\right). \tag{4}$$

Выберем функцию $W = W\left(I_1, I_2\right)$ в виде ее разложения в ряд Тейлора относительно свободного состояния, ограничиваясь слагаемыми до третьего порядка по компонентам d_{ij}

$$\begin{gathered} W = -\gamma_1 I_1 + \gamma_2\sqrt{I_2} + \gamma_3 I_1^2 + \gamma_4 I_2 - \gamma_5 I_1\sqrt{I_2} - \gamma_6 I_1^3 + \\ + \gamma_7 I_1^2\sqrt{I_2} - \gamma_8 I_1 I_2 + \gamma_9 I_2\sqrt{I_2}... \end{gathered} \tag{5}$$

В (5) $\gamma_k > 0$ — упругие модули. Подстановка производных инвариантов

$$\frac{\partial I_1}{\partial d_{ik}} = \frac{1}{3}\delta_{ik}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial d_{ik}} = 3d_{ik} - d_{jj}\delta_{ki}$$

в формулу Мурнагана (2) позволяет получить зависимости для компонент тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \left[3L - \frac{2}{3}\left(-\gamma_1 + 2\gamma_3 I_1 - \gamma_5\sqrt{I_2} - 3\gamma_6 I_1^2 + 2\gamma_7 I_1\sqrt{I_2} - \gamma_8 I_2\right)\right] d_{ij} +$$
$$+ 2L\left(d_{kk}d_{ij} - 3d_{ik}d_{kj}\right), \quad P = p - \frac{1}{3}\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2}d_{kk}, \tag{6}$$
$$L = \frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{\gamma_2}{2\sqrt{I_2}} + \gamma_4 - \gamma_5\frac{I_1}{2\sqrt{I_2}} + \gamma_7\frac{I_1^2}{2\sqrt{I_2}} - \gamma_8 I_1 + \frac{3}{2}\gamma_9\sqrt{I_2}.$$

В случае антиплоской деформации для компонент перемещений справедливы зависимости

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u_3\left(x_1, x_2\right). \tag{7}$$

Для компонент тензора Альманси в рассматриваемом случае получаем

$$d_{11} = -\frac{1}{2}u_{3,1}^2, \quad d_{12} = -\frac{1}{2}u_{3,1}u_{3,2}, \quad d_{13} = \frac{1}{2}u_{3,1},$$
$$d_{22} = -\frac{1}{2}u_{3,2}^2, \quad d_{23} = \frac{1}{2}u_{3,2}, \quad d_{33} = 0. \tag{8}$$

Инварианты деформаций для компонент (8) принимают форму

$$I_1 = -\frac{1}{6}b^2, \quad I_2 = \frac{1}{4}b^2\left(b^2 + 3\right), \quad b^2 = u_{3,1}^2 + u_{3,2}^2. \tag{9}$$

В случае чистого сдвига, когда $u_2 = u_2\left(x_1\right)$, $b = u_{2,1}$. Для напряжений в таком случае получаем зависимости

$$\sigma_{11} = -P - \left(\frac{1}{3}\gamma_1 + 3\gamma_4\right)b^2 \pm \frac{1}{2}\gamma_5\frac{b^3}{a} - \left(\frac{1}{2}\gamma_8 + \frac{1}{9}\gamma_3 + \gamma_4\right)b^4 \pm \left(\gamma_5 + \frac{1}{2}\gamma_7\right)\frac{b^5}{6a} \pm$$
$$\pm\left(\frac{1}{6}\gamma_5 + \frac{9}{4}\gamma_9\right)ab^3 - \left(\gamma_8 + \frac{1}{6}\gamma_6\right)\frac{b^6}{6} - \frac{\gamma_8}{12}a^2b^4 \pm \left(\frac{\gamma_7}{18} + \frac{3}{4}\gamma_9\right)ab^5 \pm \frac{\gamma_7}{36}\frac{b^7}{a},$$
$$\sigma_{12} = \left(\frac{1}{3}\gamma_1 + \frac{3}{2}\gamma_4\right)b \mp \frac{1}{4}\gamma_5\frac{b^2}{a} + \left(\frac{1}{4}\gamma_8 + \frac{1}{9}\gamma_3 + \gamma_4\right)b^3 \mp \left(\gamma_5 + \frac{1}{4}\gamma_4\right)\frac{b^4}{6a} \mp \tag{10}$$
$$\mp\left(\frac{1}{6}\gamma_5 + \frac{9}{8}\gamma_9\right)ab^2 + \left(\gamma_8 + \frac{1}{6}\gamma_6\right)\frac{b^5}{6} + \frac{\gamma_8}{12}a^2b^3 \mp \left(\frac{\gamma_7}{18} + \frac{3}{4}\gamma_9\right)ab^4 \mp \frac{\gamma_7}{36}\frac{b^6}{a},$$
$$\sigma_{22} = -P - \frac{3}{2}\gamma_4 b^2 \pm \frac{1}{4}\gamma_5\frac{b^3}{a} \pm \frac{9}{8}\gamma_9 ab^3 \pm \frac{1}{24}\gamma_7\frac{b^5}{a} - \frac{1}{4}\gamma_8 b^4, \quad \sigma_{33} = -P.$$

В (10) $a = \sqrt{b^2 + 3}$. Здесь и далее верхний знак соответствует $u_{2,1} < 0$, нижний $u_{2,1} > 0$.

Как известно [9], в случае антиплоского движения среды коэффициенты в упругом потенциале являются зависимыми. Такое движение осуществимо, если

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + hJ_1^2 + (h - \mu)J_1 J_2 - \zeta J_1^3 + ...,$$
$$J_1 = d_{kk}, \quad J_2 = d_{ik}d_{ki}. \tag{11}$$

Сравнивая (5) и (11), для коэффициентов потенциала (5) получим

$$\gamma_1 = 6\mu, \quad \gamma_3 = 3\left(3h - \mu\right), \quad \gamma_4 = -\frac{2}{3}\mu, \quad \gamma_6 = 9\left(\mu - h\right) + 27\zeta, \quad \gamma_8 = 2\left(\mu - h\right). \tag{12}$$

Отметим, что равенство нулю коэффициента γ_2 следует из условия отсутствия касательного напряжения в недеформированном материале.

2. Прямолинейное движение среды в круглой трубе. Пусть несжимаемый упруговязкопластический материал, деформационные свойства которого приведены выше, заполняет круглую трубу радиуса R с недеформируемыми стенками. Рассмотрим обратимое деформирование материала и его продвижение по трубе в условиях растущего со временем перепада давления. Решение этой краевой задачи теории больших деформаций в цилиндрической системе координат r, φ, z будем искать в классе функций

$$u = u_z\,(r,t)\,, \quad v = v_z\,(r,t)\,, \quad P = P\,(r,z,t)\,.$$

Для отличных от нуля компонент тензора деформаций в рассматриваемом случае имеем

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}\left(u'\right)^2, \quad d_{rz} = \frac{1}{2}u'. \tag{13}$$

Полагаем, что деформирование начинается из свободного состояния материала. Далее ограничимся слагаемыми до третьей степени $u' = u_{z,r}$. Таким образом, учитываются только старшие нелинейные слагаемые в зависимостях напряжений от обратимых деформаций. Согласно соотношениям (10) и (12) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P \pm \frac{1}{2}\gamma_5\frac{b^3}{a}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -P, \\ \sigma_{rz} &= \mu b \mp \frac{1}{4}\gamma_5\frac{b^2}{a}, \quad \sigma_{zz} = -P + \mu b^2 \pm \frac{1}{4}\gamma_5\frac{b^3}{a}. \end{aligned} \tag{14}$$

Деформирование и движение материала по трубе свяжем с воздействием градиента давления

$$\partial P/\partial z = \mp\psi\,(t)\,, \quad \psi\,(0) = 0. \tag{15}$$

Считаем, что во всем процессе деформирования на стенках трубы выполнено условие жесткого сцепления

$$u\,(R,t) = 0. \tag{16}$$

Далее силами инерции будем пренебрегать, считая процесс деформирования достаточно медленным. Тогда интегрирование уравнений равновесия

$$\sigma_{rz,r} + \sigma_{zz,z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \quad \sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \tag{17}$$

приводит к зависимостям

$$\sigma_{rz} = \frac{c\,(t)}{2}r + \frac{c_1\,(t)}{r}, \quad P = c\,(t)\,z + g\,(r,t)\,. \tag{18}$$

Неизвестные функции интегрирования $c\,(t)$, $c_1\,(t)$ необходимо определить из краевых условий. Заметим, что $c_1\,(t) = 0$, так как напряжение σ_{rz} обязано быть конечным при $r = 0$.

Для краевых условий (15), (16) решение получаем в виде

$$\sigma_{rz} = \mp\psi\,(t)\,r/2, \quad P = \mp\psi\,(t)\,z + g\,(r,t)\,. \tag{19}$$

Для определения перемещений согласно (14) и (19) получаем уравнение

$$\mu b \mp \frac{1}{4}\gamma_5\frac{b^2}{a} = \mp\frac{\psi\,(t)\,r}{2}. \tag{20}$$

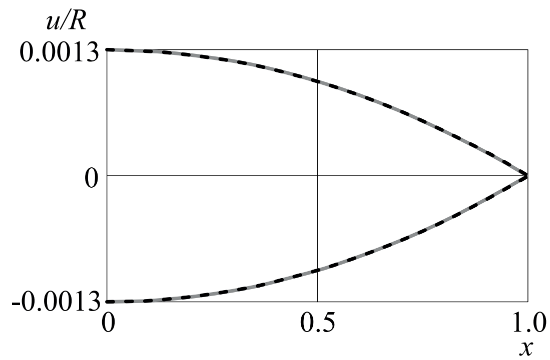

Рис. 1. Распределение перемещений u/R в зависимости от радиуса x в момент начала пластического течения τ_0

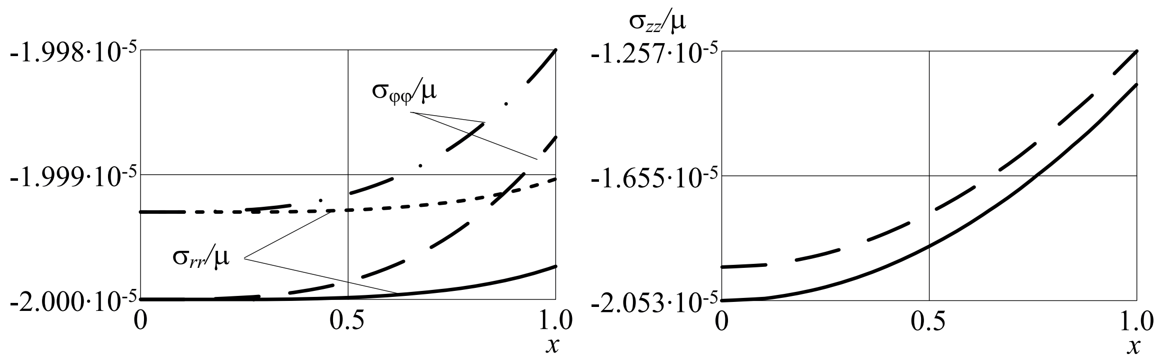

Рис. 2. Компоненты напряжений σ_{rr}/μ, $\sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ и σ_{zz}/μ в момент времени τ_0

Для определенности полагаем далее $\psi(t)$ линейной функцией времени $\psi(t) = \alpha t$ ($\alpha = \text{const}$).

По известным перемещениям компонента напряжений σ_{rr} находится интегрированием второго уравнения равновесия (17) с учетом (14) и с использованием граничного условия

$$\sigma_{rr}|_{r=R,z=0} = \sigma_0, \tag{21}$$

которое задает напряженное состояние, вызванное начальным поджатием в сечении трубы $z = 0$. Таким образом, получаем

$$\sigma_{rr} = \mp\frac{1}{2}\gamma_5\int\limits_R^r\frac{b^3}{a}dr \pm \psi(t)z + \sigma_0. \tag{22}$$

Гидростатическое давление находится из (14) по известному напряжению σ_{rr}. Компонента напряжений σ_{zz} определится также из (14).

Расчеты проводились в безразмерных переменных $\tau = \alpha tR/\mu$ и $x = r/R$ при значениях постоянных $\gamma_5/\mu = 3$, $k/\mu = 2.629\cdot10^{-3}$, $\sigma_0/\mu = -2\cdot10^{-5}$. Численные решения уравнения (20) иллюстрирует рис. 1 (верхняя пунктирная линия для $u' < 0$ и нижняя пунктирная линия для $u' > 0$); сплошными серыми линиями показано точное решение соответствующей задачи, полученное для случая обратимого деформирования без учета разномодульности среды [10–12]. Перемещения точек разномодульной среды отличаются от перемещений точек среды без учета разномодульности в шестом знаке после запятой, поэтому на графике соответствующие линии перемещений совпадают.

Полученное решение при возрастающей функции $\psi(t)$ справедливо в промежутке времени от 0 до последующего момента времени $t = t_0$, начиная с которого от стенки $r = R$ развивается область пластического течения. Выбирая, например, условие Треска

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k$$

для рассмотренного случая, записанного в форме

$$\left((\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{rz}^2\right)\Big|_{r=R} = 4k^2,$$

в принятом приближении получим

$$\sigma_{rz}(R, t_0) = \mp k, \quad t_0 = \frac{2k}{\alpha R}.$$

На рис. 2 показаны распределения компонент напряжений σ_{rr}/μ и $\sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ в зависимости от радиуса x при $z/R = 0.000001$ сплошной и штриховой линиями соответственно для $u' > 0$ и пунктирной и штрих-пунктирной линиями соответственно для $u' < 0$. Распределения компоненты напряжений σ_{zz}/μ при $z/R = 0.0001$ приведены на рис. 2 сплошной и штриховой линиями для $u' > 0$ и $u' < 0$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Амбарцумян С. А. Разномодульные теории упругости. М.: Наука. 1982.320 с.

[2] Мясников В. П., Олейников А. И. Основные общие соотношения изотропно-упругой разносопротивляющейся среды // ДАН СССР. 1992. Т. 322. № 1. С. 57–60.

[3] Быковцев Г. И., Лаврова Т. Б. Модель анизотропно упрочняющейся среды, имеющей различные законы упрочнения для растяжения и сжатия // Изв. АН СССР. МТТ. 1998. № 2. С. 146–151.

[4] Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С.29–34.

[5] Шапиро Г. С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. журн. МТТ. 1966. № 2. С 123–125.

[6] Саркисян М. С. К теории упругости изотропных тел, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 5. С. 99–108.

[7] Буренин А. А., Ярушина В. М. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: к 75-летию со дня рождения академика Е.И. Шемякина: сб. науч. тр. М.: Изд-во Физ.-мат. лит., 2006. С. 100–106.

[8] Цвелодуб И. Ю. К разномодульной теории упругости изотропных материалов // В сб. Динамические задачи механики сплошных сред. СО АН СССР. Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева. Вып. 32. 1977. С. 123–131.

[9] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

[10] Ковтанюк Л. В. О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу // ДАН. 2005. Т. 400, № 6. С. 764–767.

[11] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последействие // Монография. Владивосток: Дальнаука. 2013. 312 с.

[12] Ковтанюк Л. В., Матвеенко В. П., Буренин А.А. Течение упруговязкопластической среды по трубе в условиях изменяющегося перепада давления // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1(15). С. 69–80.

L. V. Kovtanyuk[1], *G. L. Panchenko*[1,2], *E. O. Popova*[1]

ON MODELING OF LARGE STRAINS OF MULTIMODULUS ELASTIC MEDIA

[1] *Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia*

[2] *Vladivostok State University, Vladivostok, Russia*

Abstract. For nonlinear elastic isotropic media with different moduli, deformations of shape change are considered. Using the proposed model relations, a solution of a boundary value problem of the rectilinear motion of a medium in a round pipe under the action of a variable pressure drop is obtained. The obtained results are compared with the exact solution for a nonlinear elastic isotropic medium.

Keywords: elasticity, multimodulus media, large strains.

REFERENCES

[1] Ambartsumyan S. A. Multimodulus theories of elasticity. M.: Science. 1982. 320 p. (in Russian).

[2] Myasnikov V. P., Oleinikov A. I. Basic General Relationships of an Isotropically Elastic Differently Resisting Medium // DAN SSSR. 1992. V. 322, No. 1. P. 57–60. (in Russian).

[3] Bykovtsev G. I., Lavrova T. B. Model of an anisotropically hardening medium with different laws of hardening for tension and compression // Izv. Academy of Sciences of the USSR. MTT. 1998. No. 2. P. 146–151. (in Russian).

[4] Lomakin E. V., Rabotnov Yu. N. Relationships of the theory of elasticity for an isotropic multimodular body // Izv. Academy of Sciences of the USSR. MTT. 1978. No. 6. P. 29–34. (in Russian).

[5] Shapiro G. S. On the deformations of bodies with different resistance to tension and compression // Inzh. journal. MTT. 1966. No. 2. P. 123–125. (in Russian).

[6] Sargsyan M. S. On the theory of elasticity of isotropic bodies, the material of which resists tension and compression in different ways // Izv. Academy of Sciences of the USSR. MTT. 1971. No. 5. P. 99–108. (in Russian).

[7] Burenin A. A., Yarushina V. M. On modeling the deformation of materials that resist tension and compression in different ways // Problems of Mechanics of Deformable Solids and Rocks: On the 75th Anniversary of Academician E.I. Shemyakin: collection of scientific papers. M.: Publishing house Fiz.-mat. lit., 2006. P. 100–106. (in Russian).

[8] Tsvelodub I. Yu. On the multi-modulus theory of elasticity of isotropic materials // In the collection of articles. Dynamic problems of continuum mechanics. SO AN USSR. Institute of Hydrodynamics. M.A. Lavrentiev. Issue. 32. 1977. P. 123–131. (in Russian).

[9] Lurie A. I. Nonlinear theory of elasticity. M.: Nauka, 1980. 512 p. (in Russian).

Kovtanyuk Larisa Valentinovna
`e-mail:` lk@iacp.dvo.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.
Panchenko Galina Leonidovna
`e-mail:` panchenko@iacp.dvo.ru, Candidate of Phys. & Math., Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia, Associate Professor, Vladivostok State University, Vladivostok, Russia.
Popova Elena Olegovna
`e-mail:` polenao@bk.ru, Postgraduate Student, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

[10] Kovtanyuk L. V. On the forcing of an elastoviscoplastic material through an inflexible circular cylindrical die // Doklady Physics. 2005. T. 50. No. 2. P. 112–114.

[11] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Large irreversible strains and elastic aftereffect // Monograph. Vladivostok: Dalnauka. 2013. 312 p. (in Russian).

[12] Kovtanyuk L. V., Matveenko V. P., Burenin A. A. The flow of elasto-viscous-plastic medium through a tube in the conditions of changing differential pressure // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2013. No. 1(15). P. 69–80. (in Russian).